الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة العربي بن مهيدي –أم البواقي–
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي

أطروحة

تخرج لنيل شهادة دكتوراه علوم

تخصص رياضيات

بعنوان:

دراسة بعض المسائل الحدية المكافئة غير الخطية (المحلية وغير المحلية): الوجود، الوحدانية، الانفجار الزمني المحدود للحلول، والدراسة العددية.

من اعداد: بن براهيم عبد الوهاب

لجنة المناقشة:

د. دهيليس سفيان	رئيسا	جامعة أم البواقي
د. أوصيف تقي الدين	مشرفا	جامعة أم البواقي
د. بصيلة خالد	مناقشا	جامعة قسنطينة 1
د. براح خالد	مناقشا	جامعة تبسة

السنة الجامعية: 2022/ 2023

بسم الله الرحمن الرحيم

الافتتاح

إن الحمد لله نحمده ونستعينه ونستغفره ونعوذ بالله من شرور أنفسنا ومن سيئات أعمالنا من يهده الله فلا مضل له ومن يضلل فلا هادي له وأشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له وأشهد أن محمدا عبده ورسوله.

﴿يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا اتَّقُوا اللَّهَ حَقَّ تُقَاتِهِ وَلا تَمُوتُنَّ إِلَّا وَأَنْتُمْ مُسْلِمُونَ﴾

﴿يَا أَيُّهَا النَّاسُ اتَّقُوا رَبَّكُمُ الَّذِي خَلَقَكُمْ مِنْ نَفْسٍ وَاحِدَةٍ وَخَلَقَ مِنْهَا زَوْجَهَا وَبَثَّ مِنْهُمَا رِجَالاً كَثِيراً وَنِسَاءً وَاتَّقُوا اللَّهَ الَّذِي تَسَاءَلُونَ بِهِ وَالْأَرْحَامَ إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلَيْكُمْ رَقِيباً﴾

﴿يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا اتَّقُوا اللَّهَ وَقُولُوا قَوْلاً سَدِيداً، يُصْلِحْ لَكُمْ أَعْمَالَكُمْ وَيَغْفِرْ لَكُمْ ذُنُوبَكُمْ وَمَنْ يُطِعِ اللَّهَ وَرَسُولَهُ فَقَدْ فَازَ فَوْزاً عَظِيماً﴾

الإهداء

أهدي عملي المتواضع إلى معلمي وأبتي رحمة الله عليه صالح، وإلى والدتي وإخوتي وأخواتي وجميع زملائي في جامعة أم البواقي وكل أقاربي وأحبائي وأصدقائي وجيراني.

وتشكر والعرفان

من لم يشكر الناس لم يشكر الله، أتقدم بأسمى عبارات الشكر العرفان إلى أخي وأعز أصدقائي وأستاذي **أوصيف تقي الدين** الذي كانت له يد العون في إنجاح هذا العمل.

كما أتقدم بجزيل الشكر وعرفان لكل من الأساتذة الكرام أعضاء لجنة المناقشة الدكتور الفاضل **دهيليس سفيان** والدكتور الفاضل **بصيلة خالد** والدكتور الفاضل **براح خالد** على تفضلهم بقبول مناقشة رسالتي هذه.

الملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة وجود ووحدانية الحل لنوعين من مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية ذات مشتقات كسرية مقرونة بشروط حدية مختلفة:

نبدأ في الفصل الأول بالتذكير ببعض المفاهيم الأساسية الأولية والأدوات المهمة المستعملة في هذا العمل.

الفصل الثاني يتناول دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية مع شروط نيومان، باستخدام طريقة متراجحة الطاقة.

وفي الأخير الفصل الثالث يتناول دراسة وجود ووحدانية حل ضعيف لمسألة معادلة تفاضلية جزئية غير خطية كسرية مع شرط حدي من نوع دريكلي ومن نوع التكامل من الصنف الثاني، باستعمال طريقة تكرارية للتقريب الخطي للمسألة

؛الكلمات المفتاحية:

معادلة تفاضلية جزئية كسرية ؛ معادلة تفاضلية تكافئية غير خطية ؛ طريقة متراجحة الطاقة ؛ الوجود ؛ الوحدانية الشرط الحدي من نوع تكامل.

Abstract

In this work, we have studied two fractional parabolic problems with different boundary conditions.

We started with reminders of certain fundamental preliminary notions and the tools necessary in this work.

The second chapter we examined a fractional parabolic problem with Neumann type conditions using the energy inequality method.

Finally in the third chapter, a study of the existence and uniqueness of the solution of the non-linear fractional partial differential problem with Dirichlet and second type integral condition by using an iterative method based on the results of the linear case.

Keywords: Fractional parabolic equations ; nonlinear parabolic equation ; Energy inequalities, Uniqueness ; Existence ; integral condition.

Résumé

Dans ce travail on a étudié deux problèmes paraboliques fractionnaires avec conditions aux limites différentes.

On a débuté par des rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce travail.

Dans, le deuxième chapitre on a examiné un problème parabolique fractionnaire avec de conditions de type Neumann en utilisant la méthode d'inégalité d'énergie.

Enfin en troisième chapitre, Une étude d'existence et d'unicité de la solution du problème parabolique fractionnaire non-linéaire avec condition de Dirichlet et condition integral de deuxième type.

Mots clés : Equations paraboliques fractionnaires ; Equations paraboliques non linéaire ; Inégalités d'énergie, Unicité ; Existence ; condition intégrale.

الفهرس

الافتتاح 2

الملخص 4

الفهرس ..... أ

المقدمة عامة 1

1 الفصل الأول: المفاهيم الأولية 5

1.1 العلاقة بين التعامد والكثافة في الفضاءات الهيلبرتية 5

2.1 دوال الأثر في فضاءات سوبولاف 6

1.2.1 فضاءات سوبولاف $H_1(\Omega)$، و$W^{1,P}(\Omega)$: 6

3.1 المؤثر الخطي غير المحدود 7

1.3.1 وجود الأثر 8

4.1 التفاضل والتكامل الكسري 8

1.4.1 بعض الدوال الخاصة 9

2.4.1 الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان – ليوفيل 10

3.4.1 الاشتقاق الكسري بمفهوم كابيتو 11

أ. الاشتقاق الكسري بمفهوم كابيتو اليساري 11

ب. الاشتقاق الكسري بمفهوم كابيتو اليميني 11

4.4.1 التكامل ذي الرتب الكسري 11

5.4.1 العلاقة بين الاشتقاق الكسري لريمان–ليوفيل وكابيتو 11

6.4.1 بعض خواص المشتقة ذي الرتب الكسرية 12

1. الخاصية الخطية 12

2. الخاصية غير التبديلية 13

3. قاعدة ليبنتز 13

4. تحويل فوريه 13

7.4.1 مقارنة بين المشتقة الكسرية لريمان–ليوفيل وكابيتو 14

5.1 فضاءات الدوال 15

1.5.1 فضاء $L_2(\Omega)$ 15
2.5.1 فضاء سوبولاف $H_\alpha(\mathbb{R})$ 16
3.5.1 الفضاءات $r_{H^\alpha(I)}, l_{H^\alpha(I)}$ و $c_{H^\alpha(I)}$ 17
6.1 طريقة متراجحة الطاقة 28
2 الفصل الثاني: وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تكافئية جزئية كسرية مع شروط نيومان 30
1.2 مقدمة 30
2.2 مسألة 30
3.2 التقدير المسبق للحل 31
4.2 اثبات وحدانية الحل 35
5.2 وجود الحل 38
3 الفصل الثالث: وجود ووحدانية حل ضعيف لمسألة معادلة تكافئية غير خطية كسرية مع شرط تكامل من النوع الثاني 40
1.3 مقدمة: 40
2.3 عرض المسألة 40
3.3 دراسة المسألة الخطية المرافقة 40
4.3 حل المسألة (3.3) باستعمال طريقة فصل المتغيرات 41
5.3 قابلية الحل الضعيف للمسألة غير الخطية (3.1) 44
4 خاتمـة 51
5 المراجع 52

المقدمة عامة

يمكن نمذجة العديد من الظواهر الطبيعية والمسائل الحديثة في الفيزياء والميكانيك والبيولوجيا والتكنولوجيا بواسطة معادلات تفاضلية جزئية ((équations aux dérivées partielle (EDP) مع شروط غير محلية (conditions non-locales).

في الواقع، بفضل نمذجة هذه الظواهر من خلال المعادلات التفاضلية الجزئية، تمكنا من فهم دور كل معامل ومتغير، والحصول على تنبؤات دقيقة للغاية في بعض الأحيان.

على الأرجح تمت صياغة المعادلات التفاضلية الجزئية لأول مرة أثناء بداية الميكانيكا الكلاسيكية خلال القرن السابع عشر مثلا من طرف نيوتن (Newton)، ولايبنيز (Leibniz) ثم تم إثراء "فهرس" المعادلات التفاضلية الجزئية مع تطور العلوم والفيزياء على وجه الخصوص.

وإذا أردنا ذكر ببعض الأسماء، فيجب أن نذكر أولر (Euler)، ونافيير (Navier) وستوكس (Stokes)، لمعادلات ميكانيكا الموائع (mécanique des fuides)، وفورييه (Fourier) لمعادلة الحرارة (équation de la chaleur)، وماكسويل (Maxwell) الخاصة بالكهرومغناطيسية (électromagnétisme)، ولشرودينجر (Schrodinger) وهايزنبرغ (Heisenberg) لمعادلات ميكانيكا الكم (les équations de la mécanique quantique) ، وبالطبع معادلات أينشتاين (Einstein) للنظرية النسبية.

اتخذ شوارتز (L.Schwartz) خطوة عملاقة عندما اكتشف نظرية التوزيعات (la théorie des distributions) (حوالي الخمسينيات من القرن الماضي)، ويرجع التقدم المماثل على الأقل إلى هرماندر (L.Hormander) لتطوير حساب شبه التفاضل (في أوائل السبعينيات).

من الجدير بالذكر أن نأخذ في الاعتبار أن دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية لا تزال مجالًا نشطًا للبحث في بداية القرن الحادي والعشرين، علاوة على ذلك لا يؤثر هذا البحث في العلوم التطبيقية والنظرية فحسب، بل يلعب أيضًا دورًا مهمًا للغاية في التطور الحالي للرياضيات نفسها، في كل من الهندسة والتحليل.

تعتبر دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية في واجهة العديد من المسائل العلمية، حيث تؤدي النماذج البسيطة لمختلف الظواهر الطبيعية والمسائل الاقتصادية والاجتماعية بشكل طبيعي إلى معادلات تفاضلية جزئية خطية، لكن في واقع الأمر معظم الظواهر الفيزيائية، الكيميائية، والبيولوجية تؤدي دراستها إلى معادلات تفاضلية جزئية غير خطية.

عندما تكون الظاهرة المنمذجة غير الثابتة أي تطورية متعلقة بالزمن، عادة ما يتم تمثيلها بنموذج رياضياتي بواسطة معادلات تطورية ذات قطع مكافئ أو زائدي.

المثال النموذجي لمعادلات القطع المكافئ هو معادلة الحرارة التالية:

$$\forall x \in \Omega, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\,\Delta u(x,t) + \frac{\mathrm{P}}{\rho C}$$

حيث Δ هي مؤثر لابلاس (Laplacien)، D هو معامل الانتشـــار الحراري، و P هو حجم الإنتاج المحتمل للحرارة الذاتية.

تزامنا مع تطور التكنولوجيا أصبح لا يمكن نمذجة عدة ظواهر في العلوم والهندسة بواسطة المعادلات التفاضلية الجزئية الكلاسيكية، لذلك وجب إيجاد أدوات ومفاهيم رياضياتية جديدة لنمذجة الظواهر المعقدة التي تتمثل في المعادلات التفاضلية الكسرية التي يتم الحصول عليها من خلال تعميم المعادلات التفاضلية العادية، فهي تلعب دورًا حاسمًا في الهندسة والفيزياء والرياضيات التطبيقية، نتيجة لذلك، يمكن للمرء أن يجد العديد من التطبيقات في دراسة اللزوجة المرنة، والكيمياء الكهربائية، ومعالجة الإشارات، ونظرية التحكم، والوسائط المسامية، وميكانيكا الموائع، وعلم الريولوجيا، والنقل بالانتشار، والشبكات الكهربائية، ونظرية الكهرومغناطيسية والاحتمالية، والعديد من العمليات الفيزيائية الأخرى.

النمذجة الرياضياتة للمسائل المتعلقة بالمعادلات التفاضلية الجزئية مع وجود شروط حدية من نوع تكامل نجدها في فيزياء البلازما (عمليات انتشار الجسيمات في بلازما مضطربة) [42]، نظرية انتشار الحرارة [6] [25] [7] [17] [20]، المرونة الحرارية [34] [48] [47]، بعض العمليات التكنولوجية [33]، اهتزازات الوسط [16]، ديناميكيات المياه الجوفية [35]، [49] انتشار الرطوبة [35]، الهندسة الكيميائية [10] وأشباه الموصلات [3] والنماذج الديموغرافية [4] والمسائل الرياضياتة في علم الأحياء [38]. أيضًا، تُستخدم هذه الشروط في المسائل العكسية لنظرية التوصيل الحراري [8] [9] [15] [23] [21] [26].

وهكذا الشروط الحدية من نوع تكامل سواء كانت من الصنف الأول:

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = E(t), \int_0^1 k(x,t)u(x,t)\,dx = 0$$

حيث k دالة معطاة.

أو من الصنف الثاني:

$$u(0,t) = \int_0^1 k(x,t)u(x,t)\,dx, \forall t \in (0,T)$$

$$u(1,t) = \int_0^1 k(x,t)u(x,t)\,dx, \forall t \in (0,T)$$

$$u_x(0,t) = \int_0^1 k(x,t)u(x,t)\,dx, \forall t \in (0,T)$$

$$u_x(1,t) = \int_0^1 k(x,t)u(x,t)\,dx, \forall t \in (0,T)$$

نستعملها عندما يتعذر علينا أو يستحيل القياس المباشر للكمية المبحوث عنها حول الحافة أو عندما تكون قيمتها المتوسطة معروفة. وأكثر دقة فإن الشروط الحدية الاعتيادية مثل شروط دريكلي وشروط نيومان التي تحدد نقطيا على الحافة ليست دائما متلائمة مع الطبيعة الفيزيائية للحافة، وهذا ما نجده في الحواف المرنة التي تتأثر بأي أداة قياس مهما كان نوعها.

المعنى الفيزيائي للشروط الحدية من نوع تكامل قد يمثل الطاقة الكلية، والحرارة المتوسطة، والكتلة الكلية للشوائب، والتدفق الكلي، ...إلخ. وهذا ما يعطي السبب الأساسي للاهتمام المتزايد بهذه المسائل التي تحتوي على شروط الحدية من نوع تكامل.

وبما أن السؤال الأول الذي يجب طرحه في الدراسة النظرية، هو معرفة ما إذا كان هناك حل محلي واحد على الأقل وهل هو وحيد لمسألة تطورية غير خطية ذات شروط ابتدائية وشروط حدية، حسب الحالة المدروس، تم حل فئة كبيرة من المسائل التطورية غير الخطية من خلال سلسلة من الطرق والنظريات الناجعة التي تم تطويرها خاصة منذ الستينيات، مثل طريقة متراجحة الطاقة، وطريقة فايدو غالاركين (Faedo Galerkin)، وطريقة النقطة الثابتة، والطريقة الرتيبة التكرارية (لمزيد من التفاصيل حول هذه الطرق انظر [29]).

وتم الحصول على نتائج، وجود ووحدانية الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام نظرية لاكس–ميلغرام (Lax–Milgram) ، انظر [50] [28] [11]، وكذلك طرق أخرى مختلفة اعتمدها العديد من المؤلفين، انظر على سبيل المثال [2]، [32] [40].

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو تطبيق طريقة متراجحة الطاقة لدراسة وجود وحدانية الحل لمسألة تكافئية خطية ذات مشتقات كسرية وتطبيق طريقة التقريب الخطي لإثبات وجود ووحدانية الحل للمسألة غير الخطية.

تتكون هذه الرسالة من ثلاث فصول مقدمة على النحو التالي:

الفصل الأول مخصص للتذكير ببعض الأدوات الأساسية والنتائج الأولية الأساسية لعملنا. على وجه الخصوص، نقدم بعض النتائج الأساسية حول خصائص الاشتقاق الجزئي الكسري والمؤثر الخطي الغير محدود والفضاء الدالي.

الفصل الثاني يتناول دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية خطية مع شروط نيومان.

الفصل الثالث مخصص لدراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية غير خطية مع شروط حدية من نوع دريكلي ومن نوع تكامل من الصنف الثاني.

1 الفصل الأول: المفاهيم الأولية

هذا الفصل الأول مخصص لتذكير بأهم المفاهيم الأساسية في التحليل المستعملة خلال هذا العمل، حيث يتم ذكرها في شكل تعريفات وملحوظات و توطئات.....الخ.

1.1 العلاقة بين التعامد والكثافة في الفضاءات الهيلبرتية

ليكن F فضاء هيلبرتيا، مزود بالجداء السلمي $<.,.>_F$، و M فضاء شعاعي جزئي غير خالي من الفضاء الهيلبرتي F.

تعريف 1.1: نعرف العمودي على الجزء M من F، المجموعة الذي نرمز لها بـ $M^{\perp}$ والمعرفة كما يلي:

$$M^{\perp} = \{f \in F, < f, g >_F = 0, \forall g \in M\}.$$

تعريف 1.2: نقول إن M كثيف في F إذا وفقط إذا كان:

$$\overline{M} = F.$$

خاصية 1.1: M كثيف في F إذا وفقط إذا كان:

$$M^{\perp} = \{0\}.$$

البرهان:

1. " $\Leftarrow$ " نفرض أن M كثيف في F، ومنه من أجل كل $f \in M^{\perp} \subset F$، إذن توجد متتالية $(f_n)_{n\in N}$ من M متقاربة نحو f،

   ومنه $< f_n, f >_F = 0, \forall n \in N$

   بالمرور إلى النهاية نجد: $< \lim_{n\to\infty} f_n , f >_F =< f, f >_F = \|f\|_F^2 = 0$،

   ومنه $f = 0$ إذن $M^{\perp} = \{0\}$.

2. " $\Rightarrow$ ": ومن الجهة العكسية نفرض أن $M^{\perp} = \{0\}$ إذن $(M^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = F$ وبما أن $M \subset \overline{M}$ وعليه

$((\overline{M})^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$ مغلق إذن $F = (M^{\perp})^{\perp} \subset ((\overline{M})^{\perp})^{\perp}$، ومنه $(\overline{M})^{\perp} \subset M^{\perp}$

إذن $F = \overline{M}$.

2.1 دوال الأثر في فضاءات سوبولاف

1.2.1 فضاءات سوبولاف $W^{1,P}(\Omega)$ و$H^1(\Omega)$

ليكن **Ω** مفتوح غير خالي من $\mathbb{R}^n$.

تعريف 1.3: من اجل كل $p \in [1, \infty]$ نضع:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega); \forall\, i = \overline{1,n} \right\}$$

المزودة بالنظيم:

1. **حالة** $p \neq \infty$:

$$\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\| u \|^p_{L^P(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|^p_{L^P(\Omega)} \right)^{1/p} = \left(\| u \|^p_{L^P(\Omega)} + \| \nabla u \|^p_{\left(L^P(\Omega)\right)^n} \right)^{1/p}$$

2. حالة $p = \infty$:

$$\| u \|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max_{1 \le i \le n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

3. **مثال: في حالة** $p = 2$:

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); \forall\, i = \overline{1,n} \right\}$$

المزودة بالجداء السلمي:

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{(L^2(\Omega))^n}$$

وبالنظيم مرفق: $\| u \|_{H^1(\Omega)} = \left(\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla u \|^2_{L^{2(\Omega)^n}} \right)^{1/2}$.

نظرية 1.1: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$.

معناه: من أجل كل u من $W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$ توجد متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ بحيث (u_n) تتقارب نحو u من $W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$.

3.1 المؤثر الخطي غير المحدود

ليكن E و F فضاءين شعاعين على حقل سلمي K ($K = \mathbb{C}$ أو $K = \mathbb{R}$).

تعريف 1.4:

- نقول عن دالة T من E نحو F أنه **مؤثر خطي**، (يمكن أن نكتب: $T: E \to F$) إذا تحقق:

$$\forall u_1, u_2 \in E\ , \forall \mu, \lambda \in K : T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2).$$

- **مجموعة تعريف المؤثر الخطي T**: هي مجموعة العناصر x من E المعرف عندها المؤثر T، ونرمز لها بـ $D(T)$، (عندما يكون T مؤثر خطي لابد أن تكون $D(T)$ فضاء شعاعي جزئي من فضاء E).

تعريف 1.5: نقول إن المؤثر S **هو تمديد** لـ T إذا كان:

- ✓ $D(T) \subset D(S)$.
- ✓ $Tu = Su, \forall u \in D(T)$.

تعريف 1.6: بيان مؤثر خطي T هي المجموعة الجزئية من $E \times F$ التي نرمز لها بـ $G(T)$، والمعرفة كما يلي:

$$G(T) = \{(u, Tu), u \in D(T)\}$$

خاصية 1.2:• $G(T)$ هو فضاء شعاعي جزئي من فضاء $E \times F$.

- ليكن G فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $E \times F$، إذن يكون G بيان لمؤثر خطي إذا وافق إذا كان:

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0 \qquad (1.1)$$

ملحوظة 1.1: ليس كل فضاء شعاعي جزئي من $E \times F$ هو بيان لمؤثر خطي.

تعريف 1.7: نقول إن المؤثر الخطي T مؤثر مغلق إذا كان بيانه $G(T)$ مغلق في $E \times F$.

تعريف 1.8: نقول إن المؤثر الخطي T **قابل للغلق في** E إذا كان يقبل تمديد مغلق.

خاصية 1.3: يكون المؤثر الخطي T قابل للغلق إذا وفقط إذا كان من اجل كل متتالية $(u_n)_{n \epsilon N}$ من $D(T)$ بحيث: $Tu_n \longrightarrow v$ و $u_n \longrightarrow 0$ لما إذن $v = 0$.

1.3.1 وجود الأثر

لنعتبر $L^2(\partial\Omega)$ مجموعة الدوال ω قابلة للقياس على $\partial\Omega$ بحيث: $\int_{\partial\Omega} \omega^2 \, d\Gamma < \infty$، هي فضاء هيلبرتي مزود بالجداء السلمي الاعتيادي.

نظرية 1.2: (**نظرية وجود الأثر**) لتكن Ω مفتوحة ومحدودة في $\mathbb{R}^n$ بحافة $\partial\Omega$ نظامية بما يكفي، إذن تطبيق الأثر:

$$\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \cap C_0^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$
$$u \longmapsto \gamma_0 u = {}^{u}/_{\partial\Omega}$$

قابلة للتمديد باستمرار إلى تطبيق خطي مستمر نرمز له أيضا γ_0، من $H^1(\Omega)$ نحو $L^2(\partial\Omega)$، ويوجد ثابت $c^* > 0$ مستقل عن u بحيث:

$$\| u \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \| u \|_{H^1(\Omega)}$$

ملحوظة 1.2: تطبيق الأثر γ_0 ليس غامر من $H^1(\Omega)$ نحو $L^2(\partial\Omega)$، لكن هو غامر نحو $H^{1/2}(\partial\Omega)$، حيث $H^{1/2}(\partial\Omega)$ فضاء سوبولاف بمعامل كسري $\frac{1}{2}$ ، لدينا:

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{\omega \in L^{1/2}(\partial\Omega); \exists v \in H^1(\Omega), \omega = \gamma_0(v)\}$$

4.1 التفاضل والتكامل الكسري

يعتبر بعض علماء الرياضيات هذا العلم جزء من التحليل الرياضي، ويتعامل مع تطبيقات التكامل والاشتقاق في حالة الرتب الكسرية، وهذا المجال يهتم بتعميم مشتق دالة ما لأي مشتقة ذات رتبة غير صحيحة، فمثلا: نحن في العادة نتعامل مع المشتقة الأولى والثانية. أما هذا المجال (التفاضل الكسري) فيفيدنا في إيجاد المشتقة رقم نصف أو 0.3 أو 0.8 .... إلخ

بدأت أصول هذا الاتجاه في القرن السابع عشر حينما وضع نيوتن وليبنز أساسيات التفاضل والتكامل، فقد وضع ليبنز الرمز الشهير $\frac{d^n y}{dx^n}$ ليدل على المشتقة النونية للدالة f فأرسل لايبنز رسالة إلى لوبيتال يخبره بهذا الرمز الجديد لكن لوبيتال رد على الرسالة بسؤال محير: " ماذا لو كانت $n = 1/2$ ؟" الرسالة كتبت عام 1695 ويعد اليوم الأول لظهور المشتقة الكسرية.

وفي وقت لاحق ظهرت نظريات أخرى مثل نظرية وايل وكابيتو في ذلك الوقت لم تكن هناك تطبيقات عملية تقريبا لهذه نظرية، ولهذا السبب تم اعتبارها مجردا يحتوي على معالجات رياضياتية قليلة الاستخدام، حيث بدأ الانتقال من الصيغ الرياضياتية البحتة إلى التطبيقية في الظهور منذ التسعينيات، عندما ظهرت المعادلات التفاضلية الجزئية في عدة مجالات مثل الفيزياء والهندسة علم الأحياء والميكانيك.

1.4.1 بعض الدوال الخاصة

نتطرق في هذا الجزء إلى بعض المفاهيم الأساسية للدوال الخاصة التي نعتمد عليها في هذه المذكرة، كما أنها تلعب دورا هاما في الحساب الكسري، وهي:

أ. دالة غاما

تعريف 1.9: الدالة غاما: هي تعميم لدالة العاملي $(n!)$ في مجموعة الأعداد الحقيقية والمركبة، وهي معرفة على النحو التالي:

من أجل $x \in \mathbb{C}$ بحيث $Re(x) > 0$: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$

- هذا التكامل الموسع يكون متقارب من أجل $Re(x) > 0$.

خاصية4.1: من أجل $x \in \mathbb{R}_*^+$ لدينا:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

البرهان: من التعريف 1.9 من أجل $x \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x}\, dt = \lim_{M \to +\infty} \int_0^{M} e^{-t} t^{x}\, dt$$

لنستعمل التكامل بالتجزئة نجد:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{M \to +\infty} \left[[-e^{-t} t^{x}]_{t=0}^{t=M} + x \int_0^{M} e^{-t} t^{x-1}\, dt \right]$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \left[[-e^{-M} M^{x}] + x \int_0^{M} e^{-t} t^{x-1}\, dt \right] = x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

ومنه $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

ملحوظة 1.3: إذا كانت $x = n \in \mathbb{N}_*$ إذن $\Gamma(n+1) = n!$.

مثال 1.1: $\Gamma(1) = 1$، و$\Gamma(0_+) = +\infty$، و$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

عرف الاشتقاق الكسري منذ ظهوره عدة تعاريف ومقاربات، سنذكر منها أهم تعريفين، لأنهما لعبا دورا مهم جدا في تطوير حساب الاشتقاق الكسري.

- ✓ **الأول:** الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان – ليوفيل.

✓ **الثاني**: الاشتقاق الكسري بمفهوم كابيتو.

2.4.1 الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان – ليوفيل

تعريف 1.10: لتكن $\alpha \in \mathbb{R}^+$ حيث $(n-1 < \alpha < n)$، وv دالة معرفة وقابلة للتكامل محليا على المجال $[a.b]$، المشتقة من الدرجة α لـ v معرفة كما يلي:

أ. الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان – ليوفيل اليساري

$$(1.2) \qquad {}_a^R D_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{(n)} \int_a^t \frac{v(\tau)}{(\mathrm{t}-\tau)^{\alpha-n+1}}\, d\tau \,, \forall t > a$$

ب. الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان – ليوفيل اليميني

$$(1.3) \qquad {}_t^R D_b^\alpha v(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{(n)} \int_t^b \frac{v(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}\, d\tau \,\,, \forall t < b$$

مثال 1.2: الاشتقاق الكسري لبعض الدوال باستعمال صيغة ريمان ليوفيل.

✓ $v(t) = (t-a)^\beta; \beta \in \mathbb{R}$

$${}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\mathrm{n}-\alpha)}(t-\alpha)^{\beta+n-\alpha}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\mathrm{n}-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-\alpha)^{\beta+n-\alpha}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-\alpha)^{\beta+n-\alpha} = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\ldots(\beta-\alpha+1)(t-\alpha)^{\beta-\alpha}$$

$${}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\ldots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+\mathrm{n}-\alpha)}(t-\alpha)^{\beta-\alpha}$$

$${}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\ldots(\beta-\alpha+1)}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)-(\beta-\alpha+1)\,\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-\alpha)^{\beta-\alpha}$$

$${}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-\alpha)^{\beta-\alpha}$$

✓ من أجل $\alpha = 1$:

$${}_a^R D_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-\alpha)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^\beta$$

✓ من أجل $\beta = 0$، ومنه $v(t) = C$ اشتقاق دالة ثابتة بواسطة ريمان – ليوفيل:

$$ {}_a^R D_t^1 C = \frac{(t-a)^{0-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} $$

3.4.1 الاشتقاق الكسري بمفهوم كابيتو

تعريف 1.11: لتكن $\alpha \in \mathbb{R}^+$ حيث: $(n-1 < \alpha < n)$، وv دالة معرفة وقابلة للتكامل محليا على المجال $[a.b]$، المشتقة من الدرجة α لـ v معرفة كما يلي:

أ. الاشتقاق الكسري بمفهوم كابيتو اليساري

$$ {}_a^C D_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{v^{(n)}(\tau)}{(\mathrm{t}-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \, , \forall t > a \tag{1.4} $$

ب. الاشتقاق الكسري بمفهوم كابيتو اليميني

$$ {}_t^C D_b^\alpha v(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{v^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau \ , \forall t < b \tag{1.5} $$

4.4.1 التكامل ذي الرتب الكسري

تعريف 1.12: لتكن $\alpha \in \mathbb{R}^+$ حيث $(n-1 < \alpha < n)$، وv دالة معرفة وقابلة للتكامل محليا على المجال$[a.b]$ التكامل الكسري من الدرجة α لـ v معرفة كتالي:

$$ {}_a I_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau $$

$$ {}_t I_b^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{v(\tau)}{(\tau-t)^{1-\alpha}} d\tau $$

5.4.1 العلاقة بين الاشتقاق الكسري لريمان–ليوفيل وكابيتو

لتكن $\alpha \in \mathbb{R}^+$ حيث $(n-1 < \alpha < n)$، نفرض أن v يقبل مشتقة كسرية، إذن:

$$ {}_a^R D_t^\alpha v(t) = {}_a^C D_t^\alpha v(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} $$

$$ {}_t^R D_b^\alpha v(t) = {}_t^C D_b^\alpha v(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v^{(i)}(b)(b-t)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} $$

$$ {}_a^C D_t^\alpha I_t^\alpha v(t) = v(t) $$

$$ {}_a I_t^\alpha \left({}_a^C D_t^\alpha v(t) \right) = v(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} v^{(i)}(a) \tag{1.6} $$

لما $n = 1$ ا لدينا:

$$ {}_a^R D_t^\alpha v(t) = {}_a^C D_t^\alpha v(t) + \frac{v(a)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \tag{1.7} $$

$$ {}_t^R D_b^\alpha v(t) = {}_t^C D_b^\alpha v(t) + \frac{v(b)}{\Gamma(1-\alpha)(b-t)^\alpha} $$

$$ {}_a I_t^\alpha \left({}_a^C D_t^\alpha v(t)\right) = v(t) - v(a) \tag{1.8} $$

إذا كان $v^{(i)}(a) = 0$ من أجل $i = 0,1, \ldots . n-1$، إذن المشتقة الكسرية لريمان ليوفيل وكابيتو تكون متساوية:

$$ {}_a^R D_t^\alpha v(t) = {}_a^C D_t^\alpha v(t) $$

إذا كان $\alpha > 0$ لدينا

$$ {}_a^R D_t^\alpha \left({}_a^R \mathrm{D}_t^{-\alpha} v(t)\right) = v(t) $$

6.4.1 بعض خواص المشتقة ذي الرتب الكسرية

1. الخاصية الخطية

الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان – ليوفيل خطي.

نظرية 1.3: لتكن v و w دوال قابلة لاشتقاق الكسرية بمفهوم ريمان ليوفيل من الدرجة α، ومنه من أجل $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$، المشتقة ${}_a^R D_t^\alpha (\lambda v + \mu \mathrm{w})$ موجودة ولدينا:

$$ {}_a^R D_t^\alpha (\lambda v + \mu \mathrm{w})(t) = \lambda \, {}_a^R D_t^\alpha v(t) + \mu {}_a^R D_t^\alpha w(\mathrm{t}) $$

البرهان: لتكن $\alpha \in \mathbb{R}^+$ حيث $(n-1 < \alpha < n)$ لدينا:

$$ {}_a^R D_t^\alpha (\lambda v + \mu \mathrm{w})(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{(\lambda v + \mu \mathrm{w})(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\int_a^t \frac{\lambda v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \, d\tau + \int_a^t \frac{\mu w(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \, d\tau \right) $$

$$ = \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{\lambda v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau + \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{\mu w(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau $$

$$ {}_a^R D_t^\alpha (\lambda v + \mu \mathrm{w})(t) = \lambda \, {}_a^R D_t^\alpha v(t) + \mu {}_a^R D_t^\alpha w(\mathrm{t}) $$

2. الخاصية غير التبديلية

خاصية 1.5: لتكن v دالة بحيث:

$$v^{(k)}(a) = 0, k \in \{0,1, \dots, n-1\}.$$

ومنه المشتقة الكسرية بمفهوم ريمان ليوفيل وكابيتو تبديلية مع المشتقة من الدرجة n، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$ {}_a^R D_t^n \, {}_a^R D_t^\alpha v(t) = {}_a^R D_t^{\alpha+n} v(t) = {}_a^R D_t^\alpha \, {}_a^R D_t^n v(t)$$

$$ {}_a^C D_t^n \, {}_a^C D_t^\alpha v(t) = {}_a^C D_t^{\alpha+n} v(t) = {}_a^C D_t^\alpha \, {}_a^C D_t^n v(t)$$

توطئة 1.1: نضع $n-1 < \alpha < n$، و$m-1 < \beta < m$، ولتكن v دالة بحيث ${}_a^R D_t^\alpha v$ موجودة إذن:

$$ {}_a^R D_t^\alpha \left({}_a^R D_t^\beta v(\mathrm{t}) \right) = {}_a^R D_t^{\alpha+\beta} v(\mathrm{t}) - \sum_{i=1}^{m} \left[{}_a^R D_t^{\beta-i} v(a) \right] \frac{(t-a)^{-\alpha-i}}{\Gamma(1-\alpha-i)}$$

$$ {}_a^R D_t^\beta ({}_a^R D_t^\alpha v(\mathrm{t})) = {}_a^R D_t^{\alpha+\beta} v(\mathrm{t}) - \sum_{i=1}^{n} \left[{}_a^R D_t^{\alpha-i} v(a) \right] \frac{(t-a)^{-\beta-i}}{\Gamma(1-\alpha-i)}$$

ومنه

$$ {}_a^R D_t^\alpha \left({}_a^R D_t^\beta v(\mathrm{t}) \right) = {}_a^R D_t^{\alpha+\beta} v(\mathrm{t}) \neq {}_a^R D_t^\beta ({}_a^R D_t^\alpha v(\mathrm{t}))$$

3. قاعدة ليبنتز

نتيجة 1.1: ليكن $T > a$، و $n-1 < \alpha < n$، إذا كان v وw وكل مشتقاتهما مستمرة في المجال $[a,T]$ إذن:

$$ {}_a^R D_t^\alpha (vw)(\mathrm{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{i!\,(\alpha-i)!} ({}_a^R D_t^{\alpha-i} v(\mathrm{t})) w^{(i)}(t), \forall \mathrm{t} \in [a,T]$$

4. تحويل فوريه

من اجل كل $\alpha \in \mathbb{R}^+$ و$v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ لدينا:

$$ \mathcal{F}({}_a^R D_t^\alpha v(\mathrm{t})) = (iw)^\alpha \mathcal{F}(v(\mathrm{t})(w) \tag{1.9}$$

$$ \mathcal{F}({}_t^R D_b^\alpha v(\mathrm{t})) = (-iw)^\alpha \mathcal{F}(v(\mathrm{t})(w) \tag{1.10}$$

ملحوظة 1.4:

من خلال العلاقة بين المشتقة الكسرية لريمان – ليوفيل وكايبتو لدينا:

- المشتقة الكسرية لكايبتو هي كذلك خطية، وغير تبديلية.
- قاعدة ليبنتز بالنسبة لمشتقة الكسرية لكايبتو تعطى بالعلاقة:

$$ {}_a^C D_t^\alpha (vw)(\mathrm{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{i!\,(\alpha-i)!} \left({}_a^R D_t^{\alpha-i} v(\mathrm{t}) \right) w^{(i)}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t)^{i-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha+i)} \left((vw)^{(i)}(a) \right) $$

7.4.1 مقارنة بين المشتقة الكسرية لريمان–ليوفيل وكابيتو

توطئة 1.2: لتكن الدالة v بحيث ${}_a^R D_t^\alpha v$ و ${}_a^C D_t^\alpha v$ موجودة مع $n-1 < \alpha < n$ إذن لدينا:

$$ {}_a^R D_t^\alpha v(t) \neq {}_a^C D_t^\alpha v(t) $$

مثال 1.3: المشتق كسري لدالة ثابتة بالنسبة لريمان ليوفيل ليس صفرا وليس ثابت من مثال 2.1 لدينا:

$$ {}_a^R D_t^\alpha C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} $$

والمشتق الكسري لدالة ثابت بالنسبة لكابيتو:

$$ {}_a^C D_t^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{C^{(n)}(\tau)}{(\mathrm{t}-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau = 0 $$

خاصية 1.6: ليكن $n-1 < \alpha < n$ إذن:

$$ \lim_{\alpha \to n} {}_a^R D_t^\alpha v(t) = \lim_{\alpha \to n} {}_a^C D_t^\alpha v(t) = v^{(n)}(t) $$

البرهان: باستعمال التكامل بالتجزئة والخاصية 1.3 نحصل على:

$$ {}_a^R D_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{v(\tau)}{(\mathrm{t}-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau $$

$$ {}_a^R D_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (\mathrm{t}-\tau)^{n-\alpha-1} v(\tau) d\tau $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(-v(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \int_a^t v'(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} d\tau \right) $$

$$ {}_a^R D_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(v(a) t^{n-\alpha} + \int_a^t v'(\tau)\,(t-\tau)^{n-\alpha} d\tau \right) \quad (1.11) $$

و:

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha v(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (\mathrm{t}-\tau)^{n-\alpha-1} v^n(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-v^{(n)} \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \int_a^t v^{n+1}(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} d\tau \right)
\end{aligned}
$$

$$
{}_a^C D_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(v^n(a) t^{n-\alpha} + \int_a^t v^{(n+1)}(\tau)\, (t-\tau)^{n-\alpha} d\tau \right) \qquad (1.12)
$$

لما $\alpha \to n$ على (1.11) و(1.12) لدينا:

$$
\lim_{\alpha \to n} {}_a^R D_t^\alpha v(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(v(a) + \int_a^t v(\tau)\, d\tau \right) = v^n(t)
$$

$$
\lim_{\alpha \to n} {}_a^C D_t^\alpha v(t) = \left(v^n(a) + \int_a^t v^{(n+1)}(\tau)\, d\tau \right) = v^n(t)
$$

$$
\lim_{\alpha \to n} {}_a^R D_t^\alpha v(t) = \lim_{\alpha \to n} {}_a^C D_t^\alpha v(t) = v^{(n)}(t)
$$

5.1 فضاءات الدوال

من أجل دراسة بعض المسائل نحتاج للتذكير ببعض الفضاءات الدوال، نذكر منها:

1.5.1 فضاء $L^2(\Omega)$

ليكن $d \in \mathbb{R}_+^*$، و $L^2((0,d))$ فضاء هيلبرتي مزود بالجداء السلمي نرمز له بـ $(.,.)_{L^2((0,d))}$، والنظيم المرافق $\|.\|_{L^2((0,d))}$، نعرف الفضاء الهيلبرتي $L^2(\Omega) = L^2\left((0,T), L^2((0,d))\right)$، و $\Omega = (0,d) \times (0,T)$ مزود بالجداء السلمي المعرف كما يلي:

$$
\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_0^d (u(x,.), v(x,.))_{L^2(0,T)} dx
$$

مرفق بنظيم يعني $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ المعرف كالتالي:

$$
\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_0^d \|u(x)\|^2_{L^2(0,T)} \right)^{1/2}
$$

2.5.1 فضاء سوبولاف $H^{\alpha}(\mathbb{R})$

تعريف 1.13: من اجل كل $\alpha \in \mathbb{R}_+$ معرف بـ:

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}) = \left\{u/u\epsilon L^2(\mathbb{R}); (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(u)(x)\epsilon L^2(\mathbb{R}); \forall x\epsilon\, \mathbb{R}^n\right\}$$

مزود بالنظيم:

$$\|u\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R})} = \left\|(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(u)(x)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

والجداء السلمي:

$$\langle u, v\rangle_{H^{\alpha}(\mathbb{R})} = \langle 1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(u)(x), 1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(v)(x)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

حيث يعطى تحويل فورييه بالنسبة لي u كالتالي:

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\exp(-2\pi i t\xi)\, dt$$

تعريف1.14: من أجل I يرمز لمجال محدود من $\mathbb{R}$، نعرف الفضاء $H^{\alpha}(I)$ كما يلي:

$$H^{\alpha}(I) = \{u\epsilon L^2(I)/\exists\tilde{u}\,\epsilon\, H^{\alpha}(\mathbb{R})\ tel\ que\ \tilde{u}|_I = u\}$$

مزود بالنظيم:

$$\|u\|_{H^{\alpha}(I)} = \inf_{\tilde{u}\,\epsilon H^{\alpha}(\mathbb{R}), \tilde{u}|_I = u} \|\tilde{u}\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R})}$$

تعريف1.15: لتكن $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ نعرف:

$$H_0^{\alpha}(I) = \left\{u; \|u\|_{H^{\alpha}(I)} < \infty\right\}$$

مزودة بالنظيم:

$$\|u\|_{H_0^{\alpha}(I)} = \left(\|u\|^2_{L^2(I)} + |u|^2_{H_0^{\alpha}(I)}\right)^{1/2}$$

حيث:

$$|u|_{H_0^{\alpha}(I)} = \left|\frac{\langle {}_a^R D_t^{\alpha} u, {}_t^R D_b^{\alpha} u\rangle_{L^2(I)}}{\cos(\alpha\pi)}\right|^{1/2}$$

يعرف نصف نظيم على $H_0^\alpha(I)$، لذلك نعرف الفضاء $H_0^\alpha(I)$ على أنه مكمل للفضاء $C_0^\infty(I)$ حسب النظيم $\|\cdot\|_{H_0^\alpha(I)}$.

ملحوظة 1.5: إذا كان $\alpha = 1$ و I مجال محدود في $\mathbb{R}$، العبارة $\langle u,v\rangle_{H_0^1(I)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{L^2(I)}$

النظيم المرفق من الجداء السلمي هو:

$$\|u\|_{H_0^1(I)} = \langle u,u\rangle_{H_0^1(I)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L^2(I)} = \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(I)}$$

3.5.1 الفضاءات $l_{H^\alpha(I)}, r_{H^\alpha(I)}$ و $c_{H^\alpha(I)}$

تعريف1.16: لتكن $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ نعرف:

$$1_{H^\alpha(I)} = \left\{u; \|u\|_{1_{H^\alpha(I)}} < \infty\right\}$$

مزود بالنظيم:

$$\|u\|_{1_{H^\alpha(I)}} = \left(\|u\|^2_{L^2(I)} + |u|^2_{1_{H^\alpha(I)}}\right)^{1/2}$$

حيث:

$$|u|_{1_{H^\alpha(I)}} = \|{}_a^R D_t^\alpha u\|_{L^2(I)}$$

يعرف نصف نظيم $1_{H^\alpha(I)}$.

لذلك نعرف الفضاء $1_{H^\alpha(I)}$ على أنه مكمل للفضاء $C_0^\infty(I)$ حسب النظيم $\|.\|_{1_{H^\alpha(I)}}$.

ملحوظة 1.6: لدينا $|u|_{1_{H^\alpha(I)}}$ نصف نظيم وليس بنظيم لأن من أجل:

$$u(\theta) = (t-\theta)^\alpha (t-2\theta)$$

من اجل $n = 1$ لدينا:

$$|u|_{1_{H^\alpha(I)}} = \left(\int_I \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\tau)^\alpha(t-2\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_I \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-2\tau)\,d\tau\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

إذن نجد $u \neq 0$ على الرغم من $|u|_{1_{H^\alpha(I)}} = 0$.

تعريف 1.17: لتكن $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ نعرف:

$$r_{H^\alpha(I)} = \left\{u; \|u\|_{r_{H^\alpha(I),}} < \infty\right\}$$

مزود بالنظيم:

$$\|u\|_{r_{H^\alpha(I),}} = \left(\|u\|^2_{L^2(I)} + |u|^2_{r_{H^\alpha(I)}}\right)^{1/2}$$

حيث:

$$|u|_{r_{H^\alpha(I)}} = \|{}_t^R D_b^\alpha u\|_{L^2(I)}$$

يعرف نصف نظيم على $r_{H^\alpha(I)}$، لذلك نعرف الفضاء $r_{H^\alpha(I)}$ على أنه مكمل للفضاء $C_0^\infty(I)$ حسب النظيم $\|\cdot\|_{r_{H^\alpha(I),}}$.

تعريف1.18: لتكن $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ و $\alpha \neq n + \frac{1}{2}$ نعرف:

$$c_{H^\alpha(I)} = \left\{u; \|u\|_{c_{H^\alpha(I)}} < \infty\right\}.$$

مزود بالنظيم:

$$\|u\|_{c_{H^\alpha(I),}} = \left(\|u\|^2_{L^2(I)} + |u|^2_{c_{H^\alpha(I)}}\right)^{1/2}$$

حيث:

$$|u|_{c_{H^\alpha(I)}} = \left|({}_a^R D_t^\alpha u, {}_t^R D_b^\alpha u)_{L^2(I)}\right|^{1/2}$$

يعرف نصف نظيم على $c_{H^\alpha(I)}$، لذلك نعرف الفضاء $c_{H^\alpha(I)}$ على أنه مكمل للفضاء $C_0^\infty(I)$ حسب النظيم $\|\cdot\|_{c_{H^\alpha(I),}}$.

توطئة 1.3: من اجل كل $0 < \alpha < 1$ إذا كان $u \epsilon H^\alpha(I)$ و $v \epsilon C_0^\infty(I)$ إذن:

$$({}_a^R D_t^\alpha u(t), v(t))_{L^2(I)} = (u(t), {}_t^R D_b^\alpha v(t))_{L^2(I)} \qquad (1.13)$$

البرهان: باستعمال التكامل بالتجزئة نجد:

$$\frac{d}{d\tau}\int_\tau^T \frac{v(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}dt = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{v(t)(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{t=\tau}^{t=T} - \int_\tau^T \frac{v'(t)(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}dt\right]$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left[\frac{v(T)(T-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \int_{\tau}^{T}\frac{v'(t)(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}dt\right]$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_{\tau}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{v}'(\mathrm{t})(\mathrm{t}-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\mathrm{dt}$$

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{T}\frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}dt = \int_{\tau}^{T}\frac{v'(t)}{(1-\tau)^{\alpha}}dt$$

من خلال تعريف الجداء السلمي في$L^2(I)$ وتكامل بالتجزئة نجد:

$$({}_a^R D_t^{\alpha}u(t), v(t))_{L^2(I)} = \int_a^T \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right).v(t)dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[v(t)\int_a^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\Big|_{\tau=a}^{\tau=T} \int_a^T v'(t)\int_a^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[v(T)\int_a^T \frac{u(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau - \int_a^T\int_a^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau v'(t)\, dt\right]$$

$$({}_a^R D_t^{\alpha}u(t), v(t))_{L^2(I)} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[v(T)\int_a^T \frac{u(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau - \int_a^T\int_a^t \frac{v'(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}dtu(\tau)\, d\tau\right]$$

من خلال (13.1) نجد:

$$({}_a^R D_t^{\alpha}u(t), v(t))_{L^2(I)} = \int_a^T u(\tau)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{v(T)}{(T-\tau)^{\alpha}} - \int_{\tau}^{T}\frac{v'(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}dt\right]d\tau$$

$$= \int_a^T u(\tau)\left[\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{\tau}^{T}\frac{v(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\right]d\tau$$

$$({}_a^R D_t^{\alpha}u(t), v(t))_{L^2(I)} = (u(t), {}_t^R D_b^{\alpha}v(t))_{L^2(I)}$$

توطئة 1.4: من اجل كل $\alpha \in \mathbb{R}_+$ إذا كان $u\epsilon\, 1_{H^{\alpha}(I)}$ و $v\epsilon C_0^{\infty}(I)$ إذن:

$$({}_a^R D_t^{\alpha}u(t), v(t))_{L^2(I)} = (u(t), {}_t^R D_b^{\alpha}v(t))_{L^2(I)}$$

البرهان:

ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n-1 < \alpha < n$ من خلال العلاقة مشتق الكسري لريمان وكابيتو و$v\epsilon C_0^{\infty}(I)$ لدينا:

$$ {}_t^R D_b^\alpha v(t) = {}_t^C D_b^\alpha v(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v^{(i)}(T)(T-t)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} = {}_t^C D_b^\alpha v(t) $$

من خلال تعريف الجداء السلمي في $L^2(I)$ والمشتقة من ${}_t^R D_b^\alpha v(t)$ نجد:

$$ ({}_a^R D_t^\alpha u(t), v(t))_{L^2(I)} = \int_a^T \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+n-1} u(\tau) d\tau \right) v(t) dt $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^T \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+n-1} u(\tau) d\tau \right) v(t) dt $$

باستعمال التكامل بالتجزئة n مرة نجد:

$$ \int_a^T v(t) \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+n-1} u(\tau) d\tau \right) dt = $$

$$ = (-1)^n \int_a^T v^{(n)}(t). \left(\int_a^t (t-\tau)^{\alpha+n-1} u(\tau) d\tau \right) dt $$

$$ = (-1)^n \int_a^T \int_a^t v^{(n)}(t). ((t-\tau)^{\alpha+n-1} u(\tau) d\tau)\, dt $$

$$ = (-1)^n \int_a^T \int_a^t v^{(n)}(t). (t-\tau)^{\alpha+n-1} u(\tau) dt d\tau $$

ومنه:

$$ ({}_a^R D_t^\alpha u(t), v(t))_{L^2(I)} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^T u(\tau) \left(\int_\tau^T (t-\tau)^{\alpha+n-1} v^{(n)}(t) dt \right) d\tau $$

$$ = (u(\tau), {}_t^C D_b^\alpha v(\tau))_{L^2(I)} = (u(\tau), {}_t^R D_b^\alpha v(\tau))_{L^2(I)} $$

توطئة 1.5: من اجل كل $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ لدينا:

$$ ({}_{-\infty}^R D_t^\alpha u(t), {}_t^R D_{\infty}^\alpha u(t))_{L^2(\mathbb{R})} = \cos(\pi\alpha) \| {}_{-\infty}^R D_t^\alpha u \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 $$

$$ ({}_{\infty}^R D_t^\alpha u(t), {}_t^R D_{-\infty}^\alpha u(t))_{L^2(\mathbb{R})} = \cos(\pi\alpha) \| {}_{\infty}^R D_t^\alpha u \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 $$

البرهان: ليكن $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ من خلال نظرية بارسوفال (Théorème de Plancherel-Parseval):

$$ ({}_{-\infty}^R D_t^\alpha u(t), {}_t^R D_{\infty}^\alpha u(t))_{L^2(\mathbb{R})} = (\mathcal{F}({}_{-\infty}^R D_t^\alpha u, \mathcal{F}({}_t^R D_{\infty}^\alpha u))_{L^2(\mathbb{R})} $$

من خلال (1.9) نجد:

$$({}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t), {}_{t}^{R}D_{\infty}^{\alpha}u(t))_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}({}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u).\overline{\mathcal{F}({}_{t}^{R}D_{\infty}^{\alpha}u)}d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(v(t)\big)\omega.\overline{(-\imath\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(v(t)\big)\omega}\, d\omega$$

ومنه:

$$\overline{(\imath\omega)^{\alpha}} \begin{cases} \exp(-i\pi\alpha)\,\overline{(-\imath\omega)^{\alpha}}, & \omega \geq 0 \\ \exp(i\pi\alpha)\,\overline{(\imath\omega)^{\alpha}}, & \omega < 0 \end{cases}$$

إذن:

$${}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t), {}_{t}^{R}D_{\infty}^{\alpha}u(t))_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big((i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega.\overline{(-\imath\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega}\Big)\, 1_{E_1}\, d\omega$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \Big((i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega.\overline{(-\imath\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega}\Big)\, 1_{E_2}\, d\omega$$

حيث: $E_1 = \{\omega \geq 0\}$ و $E_2 = \{\omega < 0\}$ إذن:

$${}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t), {}_{t}^{R}D_{\infty}^{\alpha}u(t))_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{0}^{+\infty} \Big((i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(\mathrm{u}(t)\big)\omega.\exp(i\alpha\pi)\overline{(\imath\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega}\Big)\, d\omega$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \Big((i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega.\exp(-i\alpha\pi)\overline{(\imath\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega}\Big)\, d\omega$$

$$= \exp(i\alpha\pi)\int_{0}^{\infty} \big|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\big|^2 d\omega$$

$$+\exp(-i\alpha\pi)\int_{-\infty}^{0} \big|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\big|^2 d\omega$$

$$({}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t), {}_{t}^{R}D_{\infty}^{\alpha}u(t))_{L^2(\mathbb{R})} = (\cos(\alpha\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi\alpha))\int_{0}^{\infty} \big|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\big|^2 d\omega$$

$$+(\cos(\alpha\pi) - \mathrm{i}\sin(\pi\alpha))\int_{-\infty}^{0} \big|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\big|^2 d\omega$$

$$({}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t), {}_{t}^{R}D_{\infty}^{\alpha}u(t))_{L^2(\mathbb{R})} = (\cos(\alpha\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} \big|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\big|^2 d\omega$$

$$+\mathrm{i}\sin(\pi\alpha)\left[\int_0^{\infty}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(\mathrm{t})\big)\omega\right|^2 d\omega-\int_{-\infty}^{0}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\right|^2 d\omega\right]$$

يكفي أن نبرهن:

$$\int_0^{\infty}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\right|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{0}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\right|^2 d\omega$$

من اجل $\omega=-v$ نجد:

$$\int_{-\infty}^{0}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\right|^2 d\omega=-\int_{\infty}^{0}\left|(-iv)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)(-v)\right|^2 dv=\int_0^{\infty}\left|(iv)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)(v)\right|^2 dv$$

إذن:

$$\begin{aligned}\langle {}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t),{}_{t}^{R}D_{\infty}^{\alpha}u(t)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}&=\cos(\alpha\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\right|^2 d\omega\\&=\cos(\alpha\pi)\,\langle(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega,(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\big(u(t)\big)\omega\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\\&=\cos(\alpha\pi)\langle {}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t),{}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\\&=\cos(\alpha\pi)\,\|{}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\end{aligned}$$

بنفس الطريقة نثبت المتراجحة الثانية:

ملحوظة 1.7: إذا كان $\alpha=n+\frac{1}{2}$ مع $n\in\mathbb{N}$, ومن اجل كل $u\in C_0^{\infty}(I)$, اذن:

$$\begin{aligned}({}_{-\infty}^{R}D_t^{n+\frac{1}{2}}u(t),{}_{t}^{R}D_{\infty}^{n+\frac{1}{2}}u(t))_{L^2(\mathbb{R})}&=({}_{-\infty}^{R}D_t^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d^n}{dt^n}\,u(t)\right),{}_{t}^{R}D_{\infty}^{\frac{1}{2}}u(t)\left(\frac{d^n}{dt^n}\,u(t)\right))_{L^2(\mathbb{R})}\\&=(\frac{d}{dt}\left(\frac{d^n}{dt^n}\,u(t)\right),\left(\frac{d^n}{dt^n}\,u(t)\right))_{L^2(\mathbb{R})}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{d^n}{dt^n}\,u(t)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0\end{aligned}$$

خاصية 1.7: من اجل كل $\alpha\in\mathbb{R}_+$، و $v\in L^2(I)$، تطبيق خطي:

$${}_{a}^{R}D_t^{\alpha}u:C_0^{\infty}(I)\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$\varphi\longmapsto {}_{a}^{R}D_t^{\alpha}u(\varphi)=\int_a^b u\,{}_{a}^{R}D_t^{\alpha}\varphi(t)\ \mathrm{dt}\qquad(1.14)$$

ومستمرة على $C_0^\infty(I)$.

البرهان: ليكن $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(I)$ بحيث:

$$\left\|\varphi_i{}^{(m)}\right\|_\infty = \sup_{t\in I}\left|\varphi_i{}^{(m)}(t)\right| \underset{i\to\infty}{\to} 0 \ , \forall m \in \mathbb{Z};$$

من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ حيث $n-1 < \alpha < n$:

$$\left|{}_a^R D_t^\alpha u(\varphi_i)\right| = \left|\int_a^b u\, {}_t^R D_b^\alpha \varphi_i \, \mathrm{dt}\right| \le \|u\|_{L^2(R)} \|{}_t^R D_b^\alpha \varphi_i\|_{L^2(R)} = \|u\|_{L^2(R)} \|{}_t^c D_b^\alpha \varphi_i\|_{\mathrm{L}^2(R)}$$

$$= \|u\|_{L^2(R)} \left\| \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{\varphi_i{}^{(n)}\tau}{(\tau - t)^{\alpha-n+1}} d\tau \right\|_{L^2(R)}$$

$$\lesssim \|u\|_{L^2(R)} \left\|\varphi_i{}^{(n)}\right\|_\infty \left\| \int_t^b \frac{1}{(\tau - t)^{\alpha-n+1}} d\tau \right\|_{L^2(R)}$$

$$= \|u\|_{L^2(R)} \left\|\varphi_i{}^{(n)}\right\|_\infty \|(b-t)^{n-\alpha}\|_{\mathrm{L}^2(R)} \to 0, \quad i \to 0$$

قضية 1.1: التطبيق ${}_a^R D_t^\alpha u$ مستمر من $(C_0^\infty(I))'$ نحو $(C_0^\infty(I))'$.

توطئة 1.6: من أجل $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ، $1_{H^\alpha(I)}$ و $r_{H^\alpha(I)}$ الفضاءان تامان.

البرهان: ليكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية كوشي $1_{H^\alpha(I)}$ ادن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $({}_a^R D_t^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ هم متتالية كوشي في $L^2(I)$ ومنه يوجد $u.w \in L^2(I)$ بحيث:

$$u_n \xrightarrow[L^2(I)]{} u \tag{1.15}$$

$${}_a^R D_t^\alpha u_n \xrightarrow[L^2(I)]{} w \tag{1.16}$$

وفي الأخير نثبت ${}_a^R D_t^\alpha u_n = w$ من العلاقة (1.16) لدينا:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I): \int_a^b {}_a^R D_t^\alpha \, u_n \varphi \, \mathrm{dt} \to \int_a^b w\, \varphi \, \mathrm{dt}$$

حسب التوطئة 1.4 والعلاقة (1.15) نتحصل:

$$\int_a^b u\, {}_a^R D_t^\alpha \, u_n \varphi \, \mathrm{dt} = \int_a^b u_n \, {}_a^R D_t^\alpha \, (\varphi) \, \mathrm{dt} \to \int_a^b u\, {}_a^R D_t^\alpha \, (\varphi) \, \mathrm{dt}$$

حسب (1.13) لدينا:

$$\int_a^b {}_a^R D_t^\alpha \, u_n \varphi \, \mathrm{dt} \to {}_a^R D_t^\alpha u(\varphi)$$

من خلال وحدانية الحل نجد: $${}_a^R D_t^\alpha u = w$$

بنفس الطريقة نثبت أنه، $r_{H^\alpha(I)}$ انه تام.

توطئة 1.7: من أجل $0 < \alpha < 2 \ , \alpha \neq 1 \ , \ u \epsilon H_0^{\frac{1}{2}}(I)$ لدينا:

$${}_a^R D_t^\alpha u(t) = {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t)$$

بمعنى التوزيعات تعني:

$$\langle {}_a^R D_t^\alpha u(t), \varphi(t) \rangle = \langle {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t), \varphi(t) \rangle \ ; \ \forall \varphi \epsilon C_0^\infty(I)$$

أيضا: ${}_a^R D_t^\alpha u \in H^{-\frac{\alpha}{2}}(I)$.

البرهان: من خلال (1.1) من اجل كل $\varphi \in C_0^\infty(I)$ لدينا:

$$\langle {}_a^R D_t^\alpha u(t), \varphi(t) \rangle = \langle u(t), {}_t^R D_b^\alpha \varphi(t) \rangle_{L^2(I)}$$

$$\langle {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t), \varphi(t) \rangle = \langle {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t), {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(t) \rangle_{L^2(I)}$$

من خلال توطئة 4.1 نحصل على:

$$\langle u(t), {}_t^R D_b^\alpha \varphi(t) \rangle_{L^2(I)} = \langle u(t), {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(t) \rangle_{L^2(I)}$$

باستعمال كوشي شوارتز نجد:

$$|{}_a^R D_t^\alpha u(t), \varphi(t)| = \left| \langle {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t), {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(t) \rangle_{L^2(I)} \right|$$

$$\leq \left\| {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t) \right\| \left\| {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(t) \right\|_{L^2(I)} \ ; \ \forall \varphi \epsilon C_0^\infty(I)$$

لان $C_0^\infty(I)$ كثيف في $H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$ تصح المتراجحة المذكورة أعلاه لجميع $V \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$ بذلك

$${}_a^R D_t^\alpha u \in H^{-\frac{\alpha}{2}}(I)$$

ترميز: نستخدم العبارة $A \lesssim B$ ونقصد بها، $A \leq c \ B$ حيث c ثابت موجب مستقل على جميع الدوال.

ونستخدم العبارة $A \cong B$ ونقصد بها $A \lesssim B \lesssim A$.

توطئة 1.8: من اجل كل $\alpha \in \mathbb{R}_+$، حيث $\alpha \neq n + \frac{1}{2}$ أشباه النظيمات $|.|_{1_{H^{\alpha}(I)}}$، و$|.|_{c_{H^{\alpha}(I)}}$، و$|.|_{r_{H^{\alpha}(I),}}$، و$|.|_{H_0^{\alpha}(I)}$متكافئين، ونضع:

$$|.|_{1_{H^{\alpha}(I)}} \cong |.|_{r_{H^{\alpha}(I),}} \cong |.|_{c_{H^{\alpha}(I)}} \cong |.|_{H_0^{\alpha}(I)}$$

البرهان: من خلال توطئة 1.5 لدينا:

$$|u|_{c_{H^{\alpha}(I)}} = ({}_a^R D_t^{\alpha} u(t), {}_t^R D_b^{\alpha} u(t))_{L^2(\mathbb{R})})^{1/2} = \sqrt{\cos(\pi\alpha)}\, \|{}_a^R D_t^{\alpha} u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$
$$= \sqrt{\cos(\pi\alpha)}\, |u|_{1_{H^{\alpha}(I)}}$$

بما أن $\alpha \neq n + \frac{1}{2}, , \alpha \in \mathbb{R}_+$ لدينا:

$$0 < |\cos(\pi\alpha)| < 1$$

اذن:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \alpha \neq n + \frac{1}{2}\ , \exists \varepsilon > 0 \quad . \quad \varepsilon \leq |\cos(\pi\alpha)| \leq 1 \tag{1.17}$$

نتحصل على:

$$\varepsilon |u|_{1_{H^{\alpha}(I)}} \leq |u|_{c_{H^{\alpha}(I)}} \leq |u|_{1_{H^{\alpha}(I)}} \Leftrightarrow |u|_{1_{H^{\alpha}(I)}} \cong |u|_{c_{H^{\alpha}(I)}}$$

بنفس الطريقة نثبت أن:

$$|u|_{r_{H^{\alpha}(I),}} \cong |u|_{c_{H^{\alpha}(I)}}$$

أي:
$$|u|_{r_{H^{\alpha}(I),}} \cong |u|_{c_{H^{\alpha}(I)}} \cong |u|_{1_{H^{\alpha}(I)}} \tag{1.18}$$

وللتكافؤ بين $|.|_{c_{H^{\alpha}(I)}}$ و $|.|_{H_0^{\alpha}(I)}$ لدينا:

$$|u|_{H_0^{\alpha}(I)} = \frac{|u|_{c_{H^{\alpha}(I)}}}{\sqrt{\cos(\pi\alpha)}}$$

من (1.17) نجد:

$$|u|_{c_{H^{\alpha}(I)}} \leq |u|_{H_0^{\alpha}(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |u|_{c_{H^{\alpha}(I)}} \Leftrightarrow |u|_{H_0^{\alpha}(I)} \cong |u|_{c_{H^{\alpha}(I)}} \tag{1.19}$$

من خلال (18.1) و (19.1) نستنتج:

$$|u|_{r_{H^{\alpha}(I),}} \cong |u|_{c_{H^{\alpha}(I)}} \cong |u|_{1_{H^{\alpha}(I)}} \cong |u|_{H_0^{\alpha}(I)}$$

توطئة 1.9: من اجل $0 < \alpha < 2 \ , \alpha \neq 1,$ $v, u \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$ لدينا:

$$\langle {}_a^R D_t^\alpha u(t), v(t)\rangle = ({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t), {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v(t))_{L^2(I)} \quad (1.20)$$

$$\langle {}_t^R D_b^\alpha u(t), v(t)\rangle = ({}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} u(t), {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v(t))_{L^2(I)} \quad (1.21)$$

البرهان: من خلال تعريف الفضاء $H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$, توجد متتالية $(v_i)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(I)$ بحيث:

$$\|v_n - v\|_{H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)} \overrightarrow{n\to} \infty \ 0$$

من اجل كل $v_i \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$ ومنه خلال التوطئة 1.8 لدينا:

$$\langle {}_a^R D_t^\alpha u(t), v_n(t)\rangle = \langle {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t), v_n(t)\rangle_{L^2(I)}$$

$$\langle {}_a^R D_t^\alpha u(t), v_n(t)\rangle = ({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t), {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v_n(t))_{L^2(I)} \quad (1.22)$$

ومن جهة أخرى:

$$|\langle {}_a^R D_t^\alpha u, v_n\rangle - \langle {}_a^R D_t^\alpha u, v\rangle| = |\langle {}_a^R D_t^\alpha u, v_n - v\rangle| \lesssim \|v_n - v\|_{H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)} \overrightarrow{n\to} \infty \ 0$$

من خلال طريقة كوشي شوارتز والتوطئة 1.9 نجد:

$$\left|({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v_n)_{L^2(I)} - ({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v)_{L^2(I)}\right| = \left|({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} (v_n - v))_{L^2(I)}\right|$$

$$\left|({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v_n)_{L^2(I)} - ({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v)_{L^2(I)}\right| \leq \left\|{}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u\right\|_{L^2(I)} \left\|{}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} (v_n - v)\right\|_{L^2(I)}$$

$$= \left\|{}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u\right\| |v_n - v|_{c\,H^{\frac{\alpha}{2}}(I)}$$

$$\lesssim \left\|{}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u\right\| |v_n - v|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(I)}$$

$$\left|({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v_n)_{L^2(I)} - ({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v)_{L^2(I)}\right| \lesssim \left\|{}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u\right\| \|v_n - v\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(I)}$$

من العلاقة (1.22) نجد:

$$\left|\langle {}_a^R D_t^\alpha u(t), v_n(t)\rangle - ({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v)_{L^2(I)}\right| \lesssim \left\|{}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u\right\| \|v_n - v\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(I)}$$

بالمرور إلى النهاية لما $n \to +\infty$ نجد

$$\left| \langle {}_a^R D_t^{\alpha} u(t), v(t) \rangle - ({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v)_{L^2(I)} \right| \lesssim 0$$

إذن نتحصل على

$$\left| \langle {}_a^R D_t^{\alpha} u(t), v(t) \rangle - ({}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v)_{L^2(I)} \right| = 0$$

وفي الأخير نجد العلاقة (1.20)، بطريقة مماثلة نتحصل على (1.21).

توطئة 1.10: من اجل كل دالة u مستمرة تماما على المجال $[a, b]$ لدينا:

$$u(t) {}_a^C D_t^{\alpha} u(t) \geq \frac{1}{2} {}_a^C D_t^{\alpha} u^2(t), \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{1.23}$$

البرهان:

من خلال المعادلة (1.4) يمكننا إعادة كتابة المتراجحة (1.23) على الشكل التالي:

$$u(t) {}_a^C D_t^{\alpha} u(t) - \frac{1}{2} {}_a^C D_t^{\alpha} u^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} u(t) \int_a^t \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau - \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{2u(\tau)u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{u(\tau)u'(\tau) - u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} \int_{\tau}^t u'(\varepsilon)\ d\varepsilon\, d\tau$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t u'(\varepsilon)\ d\varepsilon \int_0^{\varepsilon} \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau = \Lambda$$

للإثبات هذه التوطئة يكفي اثبات أن التكامل Λ موجب، يأخذ التكامل Λ قيمة موجبة حيث:

$$\Lambda = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\varepsilon)^{\alpha} \frac{u'(\varepsilon)}{(t-\varepsilon)^{\alpha}} d\varepsilon \int_0^{\varepsilon} \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\varepsilon)^{\alpha} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\int_0^{\varepsilon} \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \right)^2 d\varepsilon$$

$$\Lambda = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} (t-\varepsilon)^{\alpha} \left(\int_0^{\varepsilon} \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \right)^2 \Big|_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=t} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\varepsilon)^{\alpha-1} \left(\int_0^{\varepsilon} \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \right)^2 d\varepsilon$$

$$\Lambda = \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\varepsilon)^{\alpha-1} \left(\int_0^\varepsilon \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right)^2 d\varepsilon \geq 0$$

6.1 طريقة متراجحة الطاقة

طريقة متراجحة الطاقة هي تقنية فعالة لدراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية الجزئية، وتسمى كذلك طريقة التحليل الدالي أو طريقة التقديرات المسبقة، هذه الطريقة لها ميزة متفوقة، حيث يمكن أن نثبت وجود حل المسألة من خلال مترجحة الطاقة التي تعطينا تقديرا مسبقا للحل ونتيجة مباشرة لوحدانية، تكمن صعوبة هذه الطريقة في اختيار فضاءات الدوال E و F، وفي اختيار معامل الضرب Mu، يمكن تلخيص مخطط الطريقة على النحو التالي:

1. أولا نكتب المسألة على شكل معادلة المؤثر:

$$Lu = \mathcal{F} \ , \ \ u \in D(\mathrm{L}) \tag{1.24}$$

حيث المؤثر L من الفضاء بناخ E الى الفضاء الهيلبرتي F الذي يتم اختيارهم بشكل مناسب.

2. ثم نضع تقدير أولي للحل u.
3. ثم نثبت كثافة مجموعة قيم صورة المؤثر L في الفضاء F.

بتعبير أدق، نتبع في هذا العمل المخطط التالي:

أولا نثبت متراجحة الطاقة من النوع:

$$\|u\|_E \leq k\|Lu\|_F \tag{1.25}$$

يتم الحصول على هذا النوع من التقدير المسبق المتمثل في المتراجحة السابقة بضرب معادلة المسألة في معامل ضرب Mu والذي يعتبر مؤثر تكاملي تفاضلي Mu (يحتوي على الدالة u أو مشتقاتها) المحددة في مجال Q_T:

اختيار معامل الضرب Mu هو أمر أساسي، تمليه المعادلة وشروط الحدود.

بعد ذلك، نوضح أن المؤثر L من E الى F يقبل الإغلاق $\overline{L}$، وبالتالي فإن حل المعادلة:

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \ \ u \in D(\overline{L}) \tag{1.26}$$

يسمى الحل القوي المعمم للمسألة المدروسة.

بالمرور إلى النهاية، سيتم تمديد التقدير (1.25) إلى $\overline{L}$، أي:

$$\|u\|_E \leq k\left\|\overline{\mathrm{L}}u\right\|_F$$

وبالتالي، فإننا نستنتج وحدانية حل المعادلة (1.27).

نظرًا لأن صورة المؤثر $\overline{L}$ مغلقة في F، و$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$، فإن تحديد كثافة المجموعة $R(L)$ في F يضمن وجود حل قوي للمسألة (1.26).

2 الفصل الثاني: وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تكافئية جزئية كسرية مع شروط نيومان

1.2 مقدمة

يهدف هذا الفصل لإثبات وجود الحل ووحدانيته لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية ذات قطع مكافئ مع شروط حدية من نوع نيومان باستخدام طريقة متراجحة الطاقة.

2.2 مسألة

ليكن $\Omega = (0,1)$ والميدان $Q_T = \Omega \times (0,T)$ حيث: $T < +\infty$، و$0 < \boldsymbol{\alpha} < 1$، $a, b >$ 0. لندرس حل مسألة نيومان التالية:

$$(P) \quad \begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha} u - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu = \tilde{f} & \forall (x,t)\, \epsilon\, Q_T \\ u(x,0) = \varphi(x) & \forall x\, \epsilon\, (0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}(1,t) = 0 & \forall t \epsilon (0,T) \end{cases}$$

نعتبر المعادلة التفاضلية الجزئية الكسرية التالية من النوع قطع مكافئ

$$\mathcal{L}u = {}_0^C D_t^{\alpha} u - a\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \mathrm{x}} + bu = \tilde{f}$$

مع الشرط الابتدائية

$$\ell u = u(x,0) = \varphi(x) \quad , x\, \epsilon\, (0,1)$$

وشرط نيومان

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}(1,t) = 0 \qquad \forall t \epsilon (0,T)$$

حيث تكون a وb **أعداد معطاة**، و $\tilde{f}$ وφ دوال معروفة، والدالة φ تحقق شروط التوافق:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1) = 0$$

نقوم بعملية تبديل المتغير كالتالي:

$$v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x) \Longrightarrow u(x,t) = \varphi(x) + v(x,t)$$

إذن نتحصل على:

$$(P_1)\quad \begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha v - a\dfrac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + bv = \tilde{f} & \forall (x,t)\ \epsilon\ Q_T \\ v(x,0) = 0 & \forall x\ \epsilon\ (0,1) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0 & \forall t \epsilon (0,T) \end{cases}$$

بحيث:

$$\mathcal{L}v = {}_0^C D_t^\alpha v(x,t) - a\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial^2 \mathrm{x}} + bv(x,t) = f(x,t) \qquad (2.1)$$

مع الشرط الابتدائية:

$$\ell u = v(x,0) = 0; \quad \forall\ x\ \epsilon\ (0,1) \qquad (2.2)$$

وشرط نيومان:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0; \quad \forall t\ \epsilon\ (0,T) \qquad (2.3)$$

حيث:

$$f(x,t) = \tilde{f}(x,t) + a\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial^2 \mathrm{x}} - b\varphi(x,t)$$

3.2 التقدير المسبق للحل

لتكن الكتابة المجردة للمسألة كالتالي:

$$Lv = \mathcal{F} \qquad (2.4)$$

حيث $L = (\mathcal{L}, \ell)$ مع مجال التعريف $D(L)$، ويتكون من دالة $v\ \epsilon L^2(Q_T)$ التي تحقق $\frac{\partial v}{\partial x}\epsilon L^2(Q_T)$ ، و$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 \mathrm{x}}\epsilon L^2(Q_T)$ و${}_0^C D_t^\alpha v \epsilon L^2(Q_T)$ وتحقق الشروط الحدية للمسألة المعطاة.

المؤثر L من E إلى F، حيث E فضاء بناخ المتكون من دالة $v\ \epsilon D(L)$ المزود بالنظيم:

$$\|v\|_E^2 = \left\| {}_0^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2(Q_T)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|v\|_{L^2(Q_T)}^2$$

F فضاء هيلبرت الذي يتكون من جميع العناصر $\mathcal{F} = (f, 0)$ المزود بالنظيم:

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \|f\|_{L^2(Q_T)}^2$$

نظرية 2.1: من اجل كل دالة $v\ \epsilon\ D(L)$ لدينا المتراجحة التالية:

$$\|v\|_E \le k\|Lv\|_F \qquad (2.5)$$

حيث k ثابت موجب مستقل عن v.

البرهان: نضرب المعادلة (2.1) في الدالة:

$$Mv = v$$

ونكامل على المجال $Q_\tau = (0,1)\times(0,\tau)$ مع $\tau \in (0,T)$ نحصل على:

$$\int_{Q_\tau} \mathcal{L}v(x,t).Mv(x,t)dxdt = \int_{Q_\tau} [{}_0^C D_t^\alpha v(x,t) - a\partial_{xx}v(x,t) + bv(x,t)].v(x,t)dxdt$$

$$= \int_{Q_\tau} {}_0^C D_t^\alpha v(x,t).v(x,t)dxdt - \int_{Q_\tau} a\partial_{xx}v(x,t).v(x,t)dxdt$$

$$+ \int_{Q_\tau} bv(x,t).v(x,t)dxdt$$

$$= \int_{Q_\tau} f(x,t).v(x,t)dxdt$$

لدينا: بما أن $v(x,0) = 0$ فإن ${}_0^C D_t^\alpha u = {}_0^R D_t^\alpha u$، ومنه من خلال اعتماد على مشتقات ريمان ليوفيل في دراسة الحل، وعليه نتحصل على:

$$\int_{Q_\tau} {}_0^R D_t^\alpha v(x,t).v(x,t)dxdt = \langle {}_0^R D_t^\alpha v(x,t).v(x,t)\rangle_{L^2(Q\tau)}$$

من خلال توطئة 1.7 نجد

$$\int_{Q_\tau} {}_0^R D_t^\alpha v(x,t).v(x,t)dxdt = \langle {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t).v(x,t)\rangle_{L^2(Q\tau)}$$

لنستعمل توطئة 1.3

$$\int_{Q_\tau} {}_0^R D_t^\alpha v(x,t).v(x,t)dxdt = \langle {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t).\, {}_t^R D_b^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t)\rangle_{L^2(Q\tau)}$$

حسب التعريف 1.18

$$\int_{Q_\tau} {}_0^R D_t^\alpha v(x,t).v(x,t)dxdt = |v|_{c_{H^{\alpha_{(I)}}}}$$

حسب التوطئة 1.8 نجد

$$\int_{Q_\tau} {}_0^R D_t^{\alpha} v(x,t).v(x,t)dxdt = \left\| {}_a^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\| \cong |v|_{\iota_{H^{\alpha}(I)}} \tag{2.6}$$

ولدينا

$$-\int_{Q_\tau} a\partial_{xx} v(x,t).v(x,t)dxdt = -\int_0^{\tau}\int_0^1 a\partial_{xx} v(x,t).v(x,t)dxdt$$

باستعمال التكامل بالتجزئة بالنسبة للمتغير على x المجال $[0,1]$ نتحصل على:

$$-\int_{Q_\tau} a\partial_{xx} v(x,t).v(x,t)dxdt$$
$$= -\int_0^{\tau} [av(x,t)\partial_x v(x,t)]_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^1\int_0^{\tau} a(\partial_x v(x,t))^2 dxdt$$

من الشروط الحدية (2.2) و(2.3)

$$-\int_{Q_\tau} a\partial_{xx} v(x,t).v(x,t)dxdt = \int_{Q_\tau} a(\partial_x v(x,t))^2 dxdt \tag{2.7}$$

من (2.6) و(2.7) نجد:

$$\left\| {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 + \int_{Q_\tau} a(\partial_x v(x,t))^2 dxdt + \int_{Q_\tau} bv^2(x,t)dxdt$$
$$\cong \int_{Q_\tau} \left({}_0^R D_t^{\alpha} v(x,t) - a\partial_{xx} v(x,t) + bv(x,t) \right).v(x,t)dxdt$$
$$= \int_{Q_\tau} f(x,t).v(x,t)dxdt$$

باستعمال متراجحة كوشي شوارتز لـ $\mathcal{E}$ نجد:

$$\int_{Q_\tau} f(x,t).v(x,t)dxdt \leq \frac{1}{2\mathcal{E}}\int_{Q_\tau} |f(x,t)|^2 dxdt + \frac{\mathcal{E}}{2}\int_{Q_\tau} |v(x,t)|^2 dxdt$$

إذن نجد:

$$\left\| {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 + \int_{Q_\tau} a(\partial_x v(x,t))^2 dxdt + \int_{Q_\tau} bv^2(x,t)dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2\mathcal{E}} \int_{Q_\tau} |f(x,t)|^2 dxdt + \frac{\mathcal{E}}{2} \int_{Q_\tau} |v(x,t)|^2 dxdt$$

نتحصل:

$$\left\| {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 + \int_{Q_\tau} a(\partial_x v(x,t))^2 dxdt + \left(b - \frac{\mathcal{E}}{2}\right) \int_{Q_\tau} v^2(x,t)dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2\mathcal{E}} \int_{Q_\tau} |f(x,t)|^2 dxdt$$

إذن كل الحدود موجبة، لدينا:

$$\left\| {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \leq \frac{1}{2\mathcal{E}} \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \qquad (2.8)$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$\int_{Q_\tau} a(\partial_x v(x,t))^2 dxdt \leq \frac{1}{2\mathcal{E}} \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2$$

ومنه:

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \leq \frac{1}{2\mathcal{E}a} \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \qquad (2.9)$$

ولدينا

$$\|v\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \leq \frac{1}{2\mathcal{E}(b - \frac{\mathcal{E}}{2})} \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \qquad (2.10)$$

من (2.8) و(2.9) و(2.10) نجد:

$$\left\| {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2(Q_\tau)}^2 + \|v\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \leq \frac{1}{2\mathcal{E}} \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{(b - \frac{\mathcal{E}}{2})}\right) \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2$$

نتحصل على:

$$\left\| {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 + \|v\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \leq K \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \leq K \|f\|_{L^2(Q_T)}^2$$

حيث: $K = \frac{1}{2\varepsilon}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{(b-\frac{\varepsilon}{2})}\right)$

بما أن الطرف الأيمن من المتراجحة مستقل عن τ، نستطيع أن نمر إلى النهاية $t \to T$ في الطرف الأيسر من المتراجحة فنتحصل:

$$\left\| {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|^2_{L^2(Q_T)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|^2_{L^2(Q_T)} + \|v\|^2_{L^2(Q_T)} \leq K \|f\|^2_{L^2(Q_T)}$$

وفي الأخير نجد:

$$\|v\|_E \leq k \|\mathcal{F}\|_F$$

بحيث $k = \sqrt{K}$

4.2 اثبات وحدانية الحل

نتيجة 2.1: المتراجحة $\|v\|_E \leq k\|\mathcal{F}\|_F$ تعطي وحدانية الحل.

البرهان: وذلك كما يلي:

لنفترض أن v_1 و v_2 حلين للمعادلة إذن:

$$\begin{cases} Lv_1 = \mathcal{F} \\ Lv_2 = \mathcal{F} \end{cases} \Longrightarrow L(v_1 - v_2) = 0$$

ومنه

$$\|v_1 - v_2\|_E^2 \leq c\|0\|_F^2 = 0 \Longrightarrow \|v_1 - v_2\|_E^2 \leq 0 \Longrightarrow v_1 = v_2$$

مما يعطي وحدانية الحل.

الآن لنبرهن وجود الحل في E.

قضية 2.1: المؤثر L **من** E **إلى** F **قابل** للغلق.

البرهان: لتكن $\{v_n\} \subset D(L)$ متتالية بحيث:

$$v_n \xrightarrow[E]{} 0 \qquad (2.11)$$

$$Lv_n \xrightarrow[F]{} (f, 0) \qquad (2.12)$$

لنثبت أن:

$$f \equiv 0$$

تقارب v_n نحو 0 في F يستلزم أن:

$$v_n \xrightarrow[(C_0^\infty(Q_T))']{} 0 \qquad (2.13)$$

من استمرارية الاشتقاق الكسري (حسب قضية 1.1)، والمشتقة من الدرجة الأولى (حالة خاصة للمشتقة الكسرية) من $(C_0^\infty(Q_T))'$ في $(C_0^\infty(Q_T))'$ إذن (2.12) تستلزم:

$$\mathcal{L}v_n \xrightarrow[(C_0^\infty(Q_T))']{} 0 \qquad (2.14)$$

بالإضافة إلى ذلك، فأن تقارب Lv_n نحو f في $L^2(Q_T)$ تستلزم:

$$\mathcal{L}v_n \xrightarrow[(C_0^\infty(Q_T))']{} f \qquad (2.15)$$

بفضل وحدانية النهاية في $(C_0^\infty(Q_T))'$ نستنتج من (2.14) و(2.15) أن:

$$f \equiv 0$$

إذن المؤثر L قابل للغلق.

تعريف 2.1: ليكن $\overline{\mathrm{L}}$ قابل للغلق في L المعرف على أصغر مجموعة$\mathrm{D}(\overline{\mathrm{L}})$ ممكنة، ومنه لدينا حل المعادلة:

$$\overline{L}v = \mathcal{F}$$

نقول أنه حل قوي للمسألة (2.1)-(2.3).

متراجحة الطاقة تعطي النتائج التالية:

نتيجة 2.2: الحل القوي للمسألة (2.1)-(2.3) أي أنه مرتبط باستمرار بـ $\mathcal{F} \in F$.

نتيجة 2.3: $R(\overline{\mathrm{L}}) = \overline{R(L)}$.

البرهان:

- **الاحتواء الأول**: $\overline{R(L)} \subset R(\overline{\mathrm{L}})$.

ليكن $\mathcal{Z} \in \overline{R(L)}$ إذن يوجد سلسلة كوشي$\{\mathcal{Z}_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ من F تتكون من مجموع عناصر $R(L)$ بحيث:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}$$

إذن يوجد تسلسل مطابقة على الشكل $v_n \in D(\mathrm{L})$ بحيث:

$$Lv_n = \mathcal{Z}_n$$

من المتراجحة (5.3) نتحصل على:

$$\|v_p - v_q\|_E \leq k\|Lv_p - Lv_q\|_F \longrightarrow 0 \qquad \text{لما} \qquad p, q \to +\infty$$

عندما تؤول p وq إلى اللانهاية، يمكن استنتاج أن $\{v_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$، هو متتالية كوشي في E، وبالتالي يوجد $v \in E$ بحيث: $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$ في E، (حسب التعريف $\overline{\mathrm{L}}$) إذا كان:

$$\lim_{n\to+\infty} Lv_n = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}$$

و $\lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{L}}v_n = \mathcal{Z}$ و$\overline{\mathrm{L}}$ مغلق، إذن $\overline{\mathrm{L}}v = \mathcal{Z}$.

الدالة تحقق أن:

$$v \in D(\overline{\mathrm{L}}) \ ; \ \overline{\mathrm{L}}v = \mathcal{Z}$$

بذلك $\mathcal{Z} \in R(\overline{\mathrm{L}})$ إذن:

$$\overline{R(L)} \subset R(\overline{\mathrm{L}})$$

في هذه الحالة نستنتج أن $R(\overline{\mathrm{L}})$ مغلق لأنه فضاء تام (أي فضاء جزئي تام من الفضاء المتري (ليس بالضرورة تام) مغلق).

- **الاحتواء الثاني:** $R(\overline{\mathrm{L}}) \subset \overline{R(L)}$.

ليكن $\mathcal{Z} \in R(\overline{\mathrm{L}})$ إذن يوجد تسلسل كوشي $\{\mathcal{Z}_n\}_n$ في F تتكون من عناصر المجموعة $R(\overline{\mathrm{L}})$ بحيث:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}$$

أو $\mathcal{Z} \in R(\overline{L})$ لأن $R(\overline{\mathrm{L}})$ هو مجموع جزئي مغلق من الفضاء التام F إذن $R(\overline{\mathrm{L}})$ تام.

إذن يوجد متتالية مطابقة $(v_n)_n \in R(\overline{\mathrm{L}})$ بحيث:

$$\overline{L}v_n = \mathcal{Z}_n$$

من المتراجحة (5.3) نتحصل على:

$$\|v_p - v_q\|_E \leq k\|Lv_p - Lv_q\|_F \longrightarrow 0 \qquad \text{لما} \qquad p, q \to +\infty$$

عندما تؤول p وq إلى اللانهاية، يمكن استنتاج أن $\{v_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$، هو متتالية كوشي في E، وبالتالي يوجد $v \in E$ بحيث: $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$ في E، (حسب التعريف $\overline{\mathrm{L}}$) إذا كان:

مرة أخرى توجد متتالية مطابقة $\{(v_n)\}_n \in R(L)$ بحيث:

$$Lv_n = \overline{L}v_n \quad \text{على } R(L); \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

لذا: $$\lim_{n\to+\infty} Lv_n = \mathcal{Z}$$

بالتالي: $\mathcal{Z} \in \overline{R(L)}$ إذن نستنتج:

$$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$$

5.2 وجود الحل

لإظهار وجود الحلول، علينا اثبات أن $R(L)$ كثيف في F، أي إثبات أن معامد صورة المؤثر يساوي الصفر، ومن أجل ذلك نحتاج للنظرية التالية:

نظرية 2.2: إذا تحققت شروط نظرية 1.3 إذن من أجل $\omega \in L^2(Q_T)$ ومن أجل كل $v \in D(L)$ لدينا:

$$\int_{Q_T} \mathcal{L}v.\,\omega\, dx\, dt = 0 \tag{2.16}$$

إذن $\omega = 0$.

اثبات الجداء السلمي لـ F معرف كما يلي:

$$(Lv, W)_F = \int_{Q_T} \mathcal{L}v.\,\omega\, dx\, dt\,, \qquad W = (\omega.0) \epsilon\, D(L)$$

يمكن كتابة المتراجحة المساواة السابق على النحو التالي:

$$\int_{Q_T} [{}_0^R D_t^\alpha v(x,t) - a\partial_{xx} v(x,t) + bv(x,t)].\omega dx dt = 0 \tag{2.17}$$

حيث الدالة $v \epsilon L^2(Q_T)$ و $\frac{\partial v}{\partial x} \epsilon L^2(Q_T)$ و $\frac{\partial^2 v}{\partial^2 \mathrm{x}} \epsilon L^2(Q_T)$ و ${}_0^C D_t^\alpha v \epsilon L^2(QT)$ ويحقق الشروط الحدية للمسألة المعطاة، ومن (2.17) نتحصل على المتراجحة التالية:

$$\int_{Q_T} \big({}_0^R D_t^\alpha v(x,t).\omega(x,t) - a\partial_{xx} v(x,t).\omega(x,t) + bv(x,t).\omega(x,t)\big) dx dt = 0 \tag{2.18}$$

ومن المتراجحة (2.18) نعطي الدالة ω بدلالة v كما يلي:

$$\omega = v \tag{2.19}$$

إذن $\omega \in L^2(Q_T)$ وبتعويض (2.18) في (2.19) وباستعمال التكامل بالتجزئة نتحصل على:

$$\int_{Q_T} \left({}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t) \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} bv^2(x,t)dxdt = -\int_{Q_T} a(\partial_x v(x,t))^2 dxdt$$

$$\leq -\int_{Q_T} (\partial_x v(x,t))^2 dxdt \leq 0$$

اذن: $\int_{Q_T} \left({}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t) \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} bv^2(x,t)dxdt \leq 0$

معناه: $\int_{Q_T} \left({}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t) \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} v^2(x,t)dxdt \leq 0$

$$\left\| {}_0^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|^2_{L^2(Q_T)} + \|v\|^2_{L^2(Q_T)} \leq 0$$

$$\|v\|^2_{L^2(Q_T)} = 0$$

إذن $Z = 0$ في Q_T مما يعطي $\omega = 0$ في Q_T وهذا يثبت نظرية 2.2.

3 الفصل الثالث: وجود ووحدانية حل ضعيف لمسألة معادلة تكافئية غير خطية كسرية مع شرط تكامل من النوع الثاني

1.3 مقدمة:

يهدف هذا الفصل لإثبات وجود حل ضعيف ووحدانيته لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية غير خطية مع شرط دريكلي وشرط تكامل من الصنف الثاني باستخدام طريقة تكرارية، معتمدا على نتائج.

2.3 عرض المسألة

ليكن الميدان $Q = (0,1) \times (0,T)$ حيث: $T < \infty$، و$0 < \boldsymbol{\alpha} < 1$، $a, b > 0$. لتكن المسألة غير الخطية التالية:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha} u - a u_{xx} + bu = f(x,t,u,u_x), & \forall (x,t) \in \mathrm{Q}, \\ u(x,0) = \varphi(x), & \forall x \in (0,1), \\ u(0,t) = 0, & \forall t \in (0,T), \\ u_x(1,t) = \int_0^1 u(x,t)dx, & \forall t \in (0,T). \end{cases} \tag{3.1}$$

نفرض أن $f \in L^2(Q)$ لبشيزية، أي: يوجد $k > 0$ ثابت بحيث:

$$\begin{aligned} &\|f(x,t,u,u_x) - f(x,t,v,v_x)\|_{L^2(Q)} \\ &\leq k\left(\|u - v\|_{L^2(Q)} + \|u_x - v_x\|_{L^2(Q)}\right) \\ &, \forall u, u_x, v, v_x \in L^2(Q). \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.3 دراسة المسألة الخطية المرافقة

من أجل ليكن الميدان $Q = (0,1) \times (0,T)$ مع $T < \infty$.

لتكن المسألة الخطية المرافقة للمسألة (3.1) الآتية:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha} u - a u_{xx} + bu = f(x,t), & \forall (x,t) \in \mathrm{Q}, \\ u(x,0) = \varphi(x), & \forall x \in (0,1), \\ u(0,t) = 0, & \forall t \in (0,T), \\ u_x(1,t) = \int_0^1 u(x,t)dx, & \forall t \in (0,T). \end{cases} \tag{3.3}$$

حيث يمكن كتابة المعادلة الخطية (3.3) على شكل التالي:

$$\mathcal{L}u = {}_0^C D_t^{\alpha} u - a u_{xx} + bu = f. \tag{3.4}$$

مع الشرط الابتدائية

$$\ell u(x,0) = u(x,0) = \varphi(x), \forall x \in (0,1). \tag{3.5}$$

والشرط الحدي من نوع دريكلي

$$u(0,t) = 0, \forall t\epsilon(0,T). \tag{3.6}$$

والشرط الحدي من نوع تكامل من الصنف الثاني

$$u_x(1,t) = \int_0^1 u(x,t)dx, \forall t\epsilon(0,T). \tag{3.7}$$

4.3 حل المسألة (3.3) باستعمال طريقة فصل المتغيرات

لتكن المسألة الخطية المتجانسة المرفقة التالية:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u - a u_{xx} + bu = 0, & \forall (x,t) \in \mathrm{Q}, \\ u(x,0) = \varphi(x), & \forall x \in (0,1), \\ u(0,t) = 0, & \forall t \in (0,T), \\ u_x(1,t) = \int_0^1 u(x,t)dx, & \forall t \in (0,T). \end{cases} \tag{3.8}$$

يمكننا تأكيد أن المسألة (3.8) تقبل حلا من الشكل:

$$u(x,t) = X(x)Y(t) \tag{3.9}$$

بتعويض العلاقة (3.9) في المسألة (3.8) نجد ما يلي:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha Y.X - a\, X''.\mathrm{Y} + b\, X.Y = 0, \\ X(x)Y(0) = \varphi(x), & \forall x \in (0,1), \\ X(0)Y(t) = 0, & \forall t \in (0,T), \\ X'(1)Y(t) = \int_0^1 X(x)Y(t)dx, & \forall t\epsilon(0,T). \end{cases} \tag{3.10}$$

ومنه من أجل $\lambda > 0$ نجد أن:

$$\frac{{}_0^C D_t^\alpha Y}{Y} = a\frac{X''}{X} - b = -\lambda, \tag{3.11}$$

نبدأ بإثبات أن مسألة ستيرن ليوفيل:

$$\begin{cases} X''(x) + \dfrac{\mu}{a}X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(1) = \displaystyle\int_0^1 X(x)dx. \end{cases} \tag{3.12}$$

مع $\mu = b - \lambda$ تقبل الحل التالي:

$$X(x) = A\ \cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{a}}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{a}}x\right) \tag{3.13}$$

حيث أن A و B عددين حقيقيين كيفيين.

باستعمال شرط ديريكلي $X(0) = 0$ نجد أن:

$$A\ = 0. \tag{3.14}$$

ومنه ينتج

$$X(x) = B\sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{a}}x\right) \tag{3.15}$$

وباستعمال الشرط التكامل $X'(1) = \int_0^1 X(x)dx$ نجد:

$$X'(x) = B\sqrt{\frac{\mu}{a}}\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{a}}x\right) \Longrightarrow X'(1) = B\sqrt{\frac{\mu}{a}}\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{a}}\right)$$

$$\int_0^1 X(x)dx = B\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left[-\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{a}}x\right)\right]_{x=0}^{x=1} = B\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{a}}\right)\right)$$

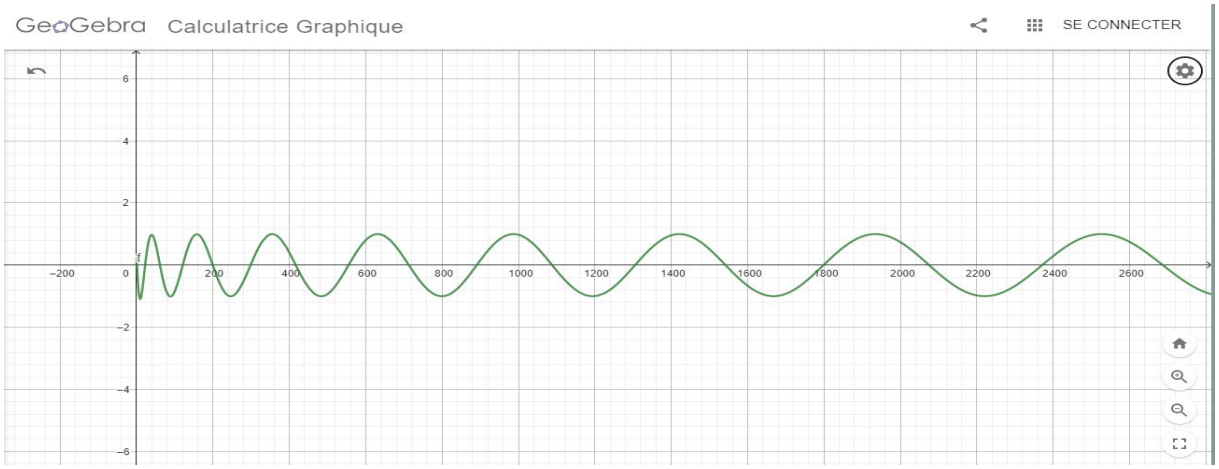
ومنه

$$B\sqrt{\frac{\mu}{a}}\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{a}}\right) = B\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{a}}\right)\right) \tag{3.16}$$

منه يمكننا تأكيد أن القيمة الذاتية للمسألة السابقة تعطى بالشكل التالي:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{a}}\right) = \frac{a}{\mu + a} \tag{3.17}$$

باستعانة بالموقع (Calculatrice Graphique - GeoGebra) تم رسم الدالة $f(x) = cos(\sqrt{x}) - \frac{1}{x+1}$ حيث $x = \frac{\mu}{a}$ نتحصل على المنحنى التالي، ومنه نستنتج أن المعادلة (3.17) تقبل عدد غير منتهي من الحلول.



هدفنا التالي هو إيجاد الصيغة الصريحة لـ $Y(t)$.

حسب فوريه، نضع: $u(x,t) = \sum_{n\geq 1} X_n(x)Y_n(t)$ (3.18)

بتعويض العلاقة (3.18) في المسألة (3.3) نجد أن:

$$\sum_{n\geq 1} X_n(x)\ {}_0^C D_t^\alpha Y_n(t) - a\sum_{n\geq 1}\frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial^2 x}Y_n(t) + b\sum_{n\geq 1} X_n(x)Y_n(t) = \sum_{n\geq 1} X_n(x)f_n(t)$$

$$\sum_{n\geq 1}[{}_0^C D_t^\alpha Y_n(t) + (b+\mu_n)Y_n(t)]\sin\left(\sqrt{\frac{\mu_n}{a}}x\right) = \sum_{n\geq 1}\sin\left(\sqrt{\frac{\mu_n}{a}}x\right)f_n(t) \quad (3.19)$$

والتي تستلزم العلاقة التالية:

$${}_0^C D_t^\alpha Y_n(t) + (b+\mu_n)Y_n(t) = f_n(t) \quad (3.20)$$

وبأخذ $u(x,0) = \varphi(x)$

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 1}\sin\left(\sqrt{\frac{\mu_n}{a}}x\right)Y_n(0) = \varphi(x) = \sum_{n\geq 1}\sin\left(\sqrt{\frac{\mu_n}{a}}x\right).\varphi_n \quad (3.21)$$

نجد أن: $\varphi_n = \int_0^1 \varphi(x)\sin\left(\sqrt{\frac{\mu_n}{a}}x\right)dx$ (3.22)

ومنه $Y_n(0) = \varphi_n$ (3.23)

وعليه يمكننا حل مسألة المعادلة التفاضلية الكسرية (3.20)-(3.23) بطريقة بسيطة باستخدام تحويلات لابلاس، ينتج أن: $F(s) = L\big(Y_n(t)\big)$

$$L({}_0^C D_t^\alpha Y_n(t)) = \frac{sF(s) - Y_n(0)}{s^{1-\alpha}} \quad (3.24)$$

ومنه $\frac{sF(s)-Y_n(0)}{s^{1-\alpha}} + (b-\mu_n)F(s) = L\big(f_n(t)\big)$

$$\frac{-\varphi_n}{s^{1-\alpha}} + (s^\alpha + b - \mu_n)F(s) = L\big(f_n(t)\big) \quad (3.25)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^\alpha + b - \mu_n}\left[s^{\alpha-1}\varphi_n + L\big(f_n(t)\big)\right] \quad (3.26)$$

وينتج منه أيضا

$$Y_n(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha + b - \mu_n}\left[s^{\alpha-1}\varphi_n + L\big(f_n(t)\big)\right]\right] \quad (3.27)$$

في الأخير نجد

وعليه نتحصل على حل المسألة (3.3) بالصيغة الصريحة التالية:

$$u(x,t)=\sum_{n\geq 1}\left(B_n\sin\left(\sqrt{\frac{\mu_n}{a}}x\right)\right).\left(L^{-1}\left[\frac{1}{s^{\alpha}+b-\mu_n}\left[s^{\alpha-1}\varphi_n+L\left(f_n(t)\right)\right]\right]\right) \quad (3.28)$$

5.3 قابلية الحل الضعيف للمسألة غير الخطية (3.1)

النقطة الأساسية التي يجب مناقشتها في هذه الفقرة هي دراسة وجود ووحدانية الحل الضعيف للمسألة (3.1).

ومفتاح ذلك هو استعمال طريقة تكرارية تعطينا متتالية متقاربة نحو الحل الضعيف، حيث يعتمد إنشاء هذه الطريقة على النتائج المتحصل عليها في دراسة المسالة الخطية.

وعليه نعرف المسألة المتجانسة التالية:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha} v - a v_{xx} + bv = 0, & \forall (x,t)\in \mathrm{Q}, \\ v(x,0)=\varphi(x), & \forall x\in(0,1), \\ v(0,t)=0, & \forall t\in(0,T), \\ v_x(1,t)=\int_0^1 y(x,t)dx, & \forall t\epsilon(0,T). \end{cases} \quad (3.29)$$

إذا كان u حل للمسألة (3.1) و v حل للمسالة (3.29) فإن $y=u-v$ تحقق ما يلي:

$$\mathscr{L}y = {}_0^C D_t^{\alpha} y(x,t) - a y_{xx}(x,t) + by(x,t) = G(x,t,y,y_x), \forall (x,t)\in \mathrm{Q}, \quad (3.30)$$

$$y(x,0)=0, \forall x\in(0,1), \quad (3.31)$$

$$y(0,t)=0, \forall t\in(0,T), \quad (3.32)$$

$$y_x(1,t)=0, \forall t\epsilon(0,T). \quad (3.33)$$

حيث أن:

$$G(x,t,y,y_x)=f(x,t,y+v,y_x+v_x)$$

من الآن فصاعدا نضع الفرضيات التالية: الدالة G تحقق شرط ليبشيتز، أي يوجد $k>0$ ثابت بحيث:

$$\begin{aligned} &\|G(x,t,y_1,(y_1)_x)-G(x,t,y_2,(y_2)_x)\|_{L^2(Q)} \leq \\ &k\left(\|y_1-y_2\|_{L^2(Q)}+\|(y_1)_x-(y_2)_x\|_{L^2(Q)}\right), \\ &\forall y_1,(y_1)_x,y_2,(y_2)_x\in L^2(Q). \end{aligned} \quad (3.34)$$

من أجل الحصول على النتائج المرجوة، من الضروري اقتراح مفهوم الحل المدروس.

لتكن $\vartheta=\vartheta(x,t)$ دالة كيفية معرفة على الفضاء V حيث:

$$V=\{\vartheta\in C^1(Q), \vartheta(0,t)=\vartheta_x(1,t)=0, t\in[0,T]\} \quad (3.35)$$

بضرب المعادلة (3.30) في ϑ و بالمكاملة على Q نجد:

$$\int_Q {}_0^C D_t^\alpha y(x,t).\vartheta(x,t)dxdt - \int_Q a y_{xx}(x,t).\vartheta(x,t)dxdt + \int_Q by(x,t).\vartheta(x,t)dxdt = \int_Q G(x,t,y,y_x).\vartheta(x,t)dxdt. \quad (3.36)$$

باستخدام المكاملة بالتجزئة مع الشروط المفروضة على y و ϑ نجد:

$$\int_Q {}_0^C D_t^\alpha y(x,t).\vartheta(x,t)dxdt - \int_Q a y_x(x,t).\vartheta_x(x,t)dxdt + \int_Q by(x,t).\vartheta(x,t)dxdt = \int_Q G(x,t,y,y_x).\vartheta(x,t)dxdt. \quad (3.37)$$

ومن المعادلة (3.37) نعرف العبارة التالية:

$$A(y,t) = \int_Q G(x,t,y,y_x).\vartheta(x,t)dxdt \quad (3.38)$$

$$A(y,t) = \int_Q {}_0^R D_t^\alpha y(x,t).\vartheta(x,t)dxdt - \int_Q a y_x(x,t).\vartheta_x(x,t)dxdt + \int_Q by(x,t).\vartheta(x,t)dxdt. \quad (3.39)$$

تعريف3.1: نسمي الحل الضعيف للمسألة (3.30)-(3.33) كل دالة $y = L^2\big(0,T;H^1(0,1)\big)$ تحقق الشروط (3.38) و(3.32) و(3.33).

الآن، نقوم ببناء متتالية تراجعية ومعرفة على النحو التالي: من $y^{(n-1)}$ يمكننا تعريف $y^{(n)}$، حيث العنصر الأول يعطى بواسطة $y^{(0)} = 0$؛ ثم من أجل $n = 1, 2, 3, \cdots$ نقوم بحل المسألة التالية:

$$\begin{cases} {}_0^R D_t^\alpha y^{(n)}(x,t) - a y_{xx}^{(n)}(x,t) + by^{(n)}(x,t) = G\left(x,t,y^{(n-1)},y_x^{(n-1)}\right), & \forall (x,t)\in Q, \\ y^{(n)}(x,0) = 0, & \forall x\in(0,1), \\ y^{(n)}(0,t) = 0, & \forall t\in(0,T), \\ y_x^{(n)}(1,t) = 0, & \forall t\in(0,T). \end{cases} \quad (3.40)$$

من أجل n ثابت، وباستخدام نتائج المحصل عليها حول حلول المسألة (3.3) المتحصل عليها بشكل صريح باستخدام طريقة فصل المتغيرات، نستنتج أن المسألة (3.40) تقبل الحل الوحيد $y^{(n)}(x,t)$.

الآن نضع $z^{(n)}(x,t) = y^{(n+1)}(x,t) - y^{(n)}(x,t)$ لنحصل على مسألة خطية جديدة:

(3.41)
$$\begin{cases} {}_0^R D_t^{\alpha} z^{(n)}(x,t) - a z_{xx}^{(n)}(x,t) + b z^{(n)}(x,t) = p^{(n-1)}(x,t), \forall (x,t) \in \mathrm{Q}, \\ z^{(n)}(x,0) = 0, & \forall x \in (0,1), \\ z^{(n)}(0,t) = 0, & \forall t \in (0,T), \\ z_x^{(n)}(1,t) = 0, & \forall t \epsilon (0,T). \end{cases}$$

حيث

(3.42)
$$p^{(n-1)}(x,t) = G\left(x,t,y^{(n)},y_x^{(n)}\right) - G\left(x,t,y^{(n-1)},y_x^{(n-1)}\right)$$

توطئة 3.1: نفترض أن (3.34) محققة، إذا نجد أن حل المسألة (3.41) يحقق التقدير المسبق التالي:

(3.43)
$$\left\|z^{(n)}\right\|_{L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)} \leq c\left\|z^{(n-1)}\right\|_{L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)}$$

حيث

(3.44)
$$c = \sqrt{\frac{k^2}{2\varepsilon \min\left(a, b - (\varepsilon/2)\right)}}$$

البرهان:

نضرب في $z^{(n)}$ المعادلة الأتية:

(3.45)
$${}_0^R D_t^{\alpha} z^{(n)}(x,t) - a z_{xx}^{(n)}(x,t) + b z^{(n)}(x,t) = p^{(n-1)}(x,t), \forall (x,t) \in \mathrm{Q}.$$

ثم نقوم بالمكاملة على Q فنجد

(3.46)
$$\int_Q {}_0^R D_t^{\alpha} z^{(n)}(x,t).z^{(n)}(x,t)dxdt - \int_Q a z_{xx}^{(n)}(x,t).z^{(n)}(x,t)dxdt + \int_Q b\left(z^{(n)}(x,t)\right)^2 dxdt = \int_Q p^{(n-1)}(x,t).z^{(n)}(x,t)dxdt.$$

عند إجراء التكامل بالتجزئة واستخدام التوطئات 2 و 3 و 4 و 5 بالطريقة نفسها في المقالات [15-24]، نحصل على

(3.47)
$$\int_0^1 \left({}_0^R D_t^{\alpha/2} z^{(n)}(x,t)\right)^2 dx + \int_Q a\left(z_{xx}^{(n)}(x,t)\right)^2 dxdt + \int_Q b\left(z^{(n)}(x,t)\right)^2 dxdt = \int_Q p^{(n-1)}(x,t).z^{(n)}(x,t)dxdt.$$

باستخدام متراجحة كوشي شوارتز نجد:

$$\int_0^1 \left({}_0^R D_t^{\alpha/2} z^{(n)}(x,t)\right)^2 dx + \int_Q a\left(z_x^{(n)}(x,t)\right)^2 dxdt$$

$$+ \int_Q b\left(z^{(n)}(x,t)\right)^2 dxdt \tag{3.48}$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\int_Q \left(p^{(n-1)}(x,t)\right)^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2}\int_Q \left(z^{(n)}(x,t)\right)^2 dxdt.$$

باستخدام المعادلة المعروفة التالية:

$$\left|p^{(n-1)}(x,t)\right|^2 = \left|G\left(x,t,y^{(n)},y_x^{(n)}\right) - G\left(x,t,y^{(n-1)},y_x^{(n-1)}\right)\right|^2 \tag{3.49}$$

نستنتج باستعمال (3.34) أن

$$\int_Q \left|p^{(n-1)}(x,t)\right|^2 dxdt \le k^2\left(\int_Q \left|y^{(n)} - y^{(n-1)}\right|^2 + \left|y_x^{(n)} - y_x^{(n-1)}\right|^2 dxdt\right)$$

$$\le k^2\left(\int_Q \left|z^{(n-1)}\right|^2 + \left|z_x^{(n-1)}\right|^2 dxdt\right)$$

$$\int_Q \left|p^{(n-1)}(x,t)\right|^2 dxdt \le k^2\left\|z^{(n-1)}\right\|_{L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)} \tag{3.50}$$

بحذف الحد الأول للمعادلة (3.47) نجد:

$$\int_Q a\left(z_{xx}^{(n)}(x,t)\right)^2 dxdt + \int_Q \left(b - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(z^{(n)}(x,t)\right)^2 dxdt$$

$$\le \int_0^1 \left({}_0^R D_t^{\alpha/2} z^{(n)}(x,t)\right)^2 dx + \int_Q a\left(z_{xx}^{(n)}(x,t)\right)^2 dxdt \tag{3.51}$$

$$+ \int_Q b\left(z^{(n)}(x,t)\right)^2 dxdt \le \frac{1}{2\varepsilon}\int_Q \left(p^{(n-1)}(x,t)\right)^2 dxdt.$$

الذي يسمح لنا باستنتاج

$$\left\|z^{(n)}(x,t)\right\|^2_{L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)}$$

$$\le \frac{k^2}{2\varepsilon \min\left(a, b - (\varepsilon/2)\right)}\left\|z^{(n-1)}(x,t)\right\|^2_{L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)} \tag{3.52}$$

سيكون هدفنا التالي هو دراسة تقارب المتتالية $\left(y^{(n)}\right)_n$ ، ومن أجل ذلك ندرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z^{(n)}$.

لهذا نستخدم معيار تقارب السلاسل الذي يعطينا

$$\sqrt{\frac{k^2}{2\varepsilon \min\left(a, b-(\varepsilon/2)\right)}} < 1 \tag{3.53}$$

ومنه

$$k < \sqrt{2\varepsilon \min\left(a, b-(\varepsilon/2)\right)} \tag{3.54}$$

حيث $z^{(n)}(x,t) = y^{(n+1)}(x,t) - y^{(n)}(x,t)$ و $y^{(0)}(x,t) = 0$،

لدينا

$$\sum_{i=0}^{n-1} z^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(y^{(i+1)} - y^{(i)}\right) = y^{(1)} - y^{(0)} + y^{(2)} - y^{(1)} + \cdots + y^{(n)} - y^{(n-1)} = y^{(n)} \tag{3.55}$$

لاحظ أننا بالفعل أثبتنا أن السلسلة المعرفة بـ:

$$y^{(n)}(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} z^{(i)}(x,t) \tag{3.56}$$

متقاربة نحو الدالة $y \in L^2\left(0,T; H^1(0,1)\right)$.

بعد إتمام هذه الخطوة الأولية، مهمتنا الآن هي إثبات أن $\lim_{n\to\infty} y^{(n)}(x,t) = y(x,t)$ ، هي حل للمسألة التالية (3.30) - (3.33).

من أجل الحصول على هذه النتيجة، سيكون من الضروري التأكد من أن y تحقق:

$$A(y,\vartheta) = \int_{Q_\tau} G(x,t,y,y_x).\vartheta(x,t)dxdt \tag{3.57}$$

باستخدام (3.40) نجد:

$$A\left(y^{(n)},\vartheta\right) = \int_Q {}_0^R D_t^\alpha y^{(n)}(x,t).\vartheta(x,t)dxdt + \int_Q a y_x^{(n)}(x,t).\vartheta_x(x,t)dxdt + \int_Q b y^{(n)}(x,t)\vartheta(x,t)dxdt \tag{3.58}$$

وبما أن A خطي نجد:

$$A\left(y^{(n)},\vartheta\right)=A\left(y^{(n)}-y,\vartheta\right)+A(y,\vartheta)$$
$$=\int_Q {}_0^R D_t^\alpha\left(y^{(n)}-y\right)(x,t).\vartheta(x,t)dxdt$$
$$+\int_Q a\left(y^{(n)}-y\right)_x(x,t).\vartheta_x(x,t)dxdt \quad (3.59)$$
$$+\int_Q b\left(y^{(n)}-y\right)\vartheta(x,t)dxdt+\int_Q {}_0^R D_t^\alpha y(x,t).\vartheta(x,t)dxdt$$
$$+\int_Q a y_x(x,t).\vartheta_x(x,t)dxdt+\int_Q by(x,t)\vartheta(x,t)dxdt$$

باستخدام متراجحة كوشي شوارتز من أجل $A\left(y^{(n)}-y,\vartheta\right)$ نجد:

$$A\left(y^{(n)}-y,\vartheta\right)$$
$$=\int_Q {}_0^R D_t^\alpha\left(y^{(n)}-y\right)(x,t).\vartheta(x,t)dxdt$$
$$+\int_Q a\left(y^{(n)}-y\right)_x(x,t).\vartheta_x(x,t)dxdt \quad (3.60)$$
$$+\int_Q b\left(y^{(n)}-y\right)\vartheta(x,t)dxdt$$
$$\leq max(1.a\gamma.b)\left\|\vartheta_x\right\|_{L^2(Q)}.\left[\left\|{}_0^R D_t^\alpha\left(y^{(n)}-y\right)\right\|_{L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)}\right.$$
$$\left.+\left\|\left(y^{(n)}-y\right)_x\right\|_{L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)}\right]$$

حيث γ هو ثابت متراجحة بوان كاري، في المقابل نجد:

$$y^{(n)}\longrightarrow y \text{ في } L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right) \quad (3.61)$$

ومنه

$$y^{(n)}\longrightarrow y \text{ في } L^2(Q) \quad (3.62)$$
$$y_x^{(n)}\longrightarrow y_x \text{ في } L^2(Q)$$

الآن من أجل $n\longrightarrow+\infty$ نجد:

$$\lim_{n\to+\infty} A\left(y^{(n)}-y,\vartheta\right)=0 \quad (3.63)$$

من خلال (3.63) وبالمرور إلى النهاية في (3.59) نحصل على

$$\lim_{n\to+\infty} A\left(y^{(n)},\vartheta\right)=A(y,\vartheta) \quad (3.64)$$

نظرية 3.1: إذا كان الشرط (3.34) محقق مع المتراجحة (3.34)

$$k < \sqrt{2\varepsilon \min\left(a, b - (\varepsilon/2)\right)}$$

المسائل (3.30)-(3.33) تقبل حل ضعيف ينتمي الى $L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)$.

يبقى إثبات أن المسائل (3.30)-(3.33) تقبل حلا وحيدا.

نظرية 3.2: إذا كان الشرط (3.34) محقق، المسألة (3.30)-(3.33) تقبل حل وحيد.

البرهان:

نفرض أن y_1 و y_2 تنتمي الى $L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)$ حلين للمسائل (3.30)-(3.33) لنضع $Z = y_1 - y_2$ ومنه Z كذلك ينتمي $L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)$.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}Z = {}_0^C D_t^\alpha Z(x,t) - aZ_{xx}(x,t) + bZ(x,t) = \psi(x,t), \forall (x,t)\, \epsilon\, \mathrm{Q}, \\ Z(x,0) = 0, \forall x\, \epsilon\, (0,1), \\ Z(0,t) = 0, \forall t\, \epsilon\, (0,T), \\ Z_x(1,t) = 0, \forall t \epsilon (0,T). \end{aligned} \tag{3.65}$$

حيث
$$\psi(x,t) = G(x,t,y_1,(y_1)_x) - G(x,t,y_2,(y_2)_x) \tag{3.66}$$

تحليل مشابه لذلك في برهان التوطئة 3.1، إنه يظهر أن:

$$\|Z\|_{L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)} \leq c\|Z\|_{L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)}. \tag{3.67}$$

أين c هو نفس ثابت التوطئة 3.1، وبما أن $c < 1$، لذلك وفقًا لـ (3.67)، نجد أن:

$$(1-c)\|Z\|_{L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)} \leq 0 \tag{3.68}$$

وفي الأخير نجد أن $y_1 = y_2$ في $L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)$ وهي النتيجة المطلوبة.

4 خاتمــة

في هذا العمل، قمنا بمعالجة مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية المكافئة غير الخطية بشروط حدية كلاسيكية وشروط حدية من نوع تكامل.

أولاً، من خلال تطبيق وتطوير طريقة متراجحة الطاقة لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية خطية مع شرط حدي من نوع نيومان الكلاسيكي تحصلنا على وجود ووحدانية الحل القوي.

ثم وأخيرًا، لدراسة وجود ووحدانية حل ضعيف لمسألة معادلة كسرية غير خطية مع وجود شرط حدي من نوع تكامل من الصنف الثاني أين تمت إضافة الحد غير الخطي $f(x,t,u,u_x)$ إلى الجانب الأيمن من المعادلة المدروسة استطعنا تطبيق طريقة تكرارية تعتمد على نتائج المسالة الخطية للحصول على مخطط متقارب ينتج متتالية متقاربة نحو الحل ضعيف.

من المهم أن نشير أنه لا توجد حتى الآن، بالنسبة للمسائل غير المحلية، نظرية أو طريقة عامة مماثلة لتلك الخاصة بالمسائل الكلاسيكية في الدراسة بشكل عام.

ويرجع ذلك إلى الحداثة لهذا الموضوع من ناحية، والتعقيد الذي ينتج عن وجود التكامل في الشروط الحدية. ومن ناحية أخرى، حيث تتطلب كل مسألة معالجة خاصة ودراسة استثنائية، مما يؤكد على أهمية الموضوع الذي يتم تناوله في هذه الأطروحة.

يشار إلى أن العديد من المسائل المثيرة للاهتمام تظل مفتوحة لإثراء هذه الدراسة بشكل أوسع، وننقل هنا بعضًا منها:

* إن دراسة حلول مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية ذات الشروط الحدية غير الكلاسيكية خاصة من نوع التكامل، صعبة ومعقدة بشكل واضح، والتي تتطلب بالتأكيد تطويرًا عميقًا للغاية للطرق والتقنيات الكلاسيكية في إثبات وجود الحلول ووحدانيتها. يبدو هذا السؤال حساسًا ومهمًا للغاية، ويستحق الدراسة.

*كذلك، في جانب التحليل العددي، أين يمكن أن نواصل العمل الذي تم القيام به في هذه الأطروحة، وخاصة في جانب تطوير أساليب والطرق العددية الكلاسيكية المعروفة، من أجل أن تكون فعالة ومتوافقة مع الشروط غير المحلية.

* يبقى دراسة السلوك الديناميكي لحلول المسائل المعادلات التفاضلية الكسرية سواء العادية أو الجزئية مجالا واسعا حيث توجد أعمال قليلة جدا تناولت هذا الموضوع في حالات خاصة. ويعتبر من مواضيع الساعة.

5 المراجع

[1] R. A. Adams, «Sobolev Spaces, Academic Press,» New York, 1975.

[2] A. A. Alikhanov, «A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractionalorder,» vol. 46, n° %1001, p. 658–664, (2010).

[3] W. Allegretto and Y. Lin and A. Zhou, «Abox schememe for coupled systems resulting frommicrosensor thermistor problems,» Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems, pp. 573-578., (1999).

[4] I. A. Belavin and S. P. Kapitsa and S. P. Kurdyumov,, «A mathematical model ofglobal demographic processes with regard for aspace distribution,» Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz, vol. 38, n° %16, p. 885–902, (1998).

[5] B. Cahlon and D. M. Kulkarni and P. Shi,, «Stepwise stability for the heat equation with non local,» SIAM J. Numer. Anal, vol. 32, n° %12, pp. 571-593, (1995).

[6] B. Cahlon and D. M. Kulkarni and P. Shi, «Stepwise stability for the heat équation with non local constraint,» SIAM J. Numer. Anal., vol. 32, n° %12, pp. 571-593., (1995).

[7] P. Cannarasa and V. Vespri, «On Maximal Lp-regularity for abstract Cauchy problem,» Boll. Unione, vol. 97, pp. 165-175, (1986).

[08] J.R. Cannon and Y. Lin and S. Wang, «Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation,» Journal of the Australian Mathematical Society, vol. 33, p. 149–163., Series B1991.,.

[9] J.R. Cannon and Y. Lin and S.Wang,, «Determination of source parameter in a parabolic equations,,» Meccanica, vol. 27, n° %12, p. 85–94., (1992).

[10] Y.S. Choi and K.Y. Chan, «A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry,» Nonlinear Anal, vol. 18, p. 317–331, (1992).

[11] V. J. Ervin and J. P. Roop, «Variational solution of fractional advection dispersion equations on bounded domains in Rd,» pp. 1-28.

[12] V. J. Ervin and J. P.Roop, «Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation,» Numer. Meth. P. D. E, vol. 22 (3), p. 558–576, (2006).

[13] V. J. Ervin and J. P. Roop, «Variational solution of fractional advection dispersion equations on bounded domains in Rd,» Numer. Meth Part. D. E, vol. 23 (2), p. (2007), 256 –281.

[14] R.E. Ewing and T. Lin, «A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media,» Adv. Water Ressources, vol. 14, p. 89, (1991).

[15] A.G. Fatullayev and N. Gasilov and I. Yusubov, «Simultaneous determination of unknown coefficients,» Appl. Anal, vol. 87, n° %11, p. 1167–1177, (2008).

[16] D. G. Gordeziani And G. A. Avalishvili, «Solutions of nonlocal problems forone-dimensional oscillations,» Mat. Model, vol. 12, n° %11, pp. 94-103, (2000).

[17] v. Grafiychuk and B.Datsko and S.V. Meleshko,, «Mathematical modeling of pattern formationin sub- and superdiffusive reactiondiffusion systems,» arxiv, (2006) arxiv :nlin.AO/06110005 v3..

[18] B.I. Henry and S.L. Wearne,, «Fractional reaction-diffusion,» Physica A 276, p. 448–455., (2000).

[19] N. I. Ionkin, «A problem for the Heat-condition equation with a tow-point boundary condition,» Differentsial'nye Uravnenya, vol. 15, n° %17, pp. 1284-1295, (1979).

[20] N. I. Ionkin, «Stability of a problem in Heat-condition,,» Differentsial'nye Uravnenya, vol. 13, n° %12, pp. 294-304, (1977).

[21] M.I. Ismailov and F. Kanca, «An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions,» Math. Meth. Appl. Sci, vol. 34, n° %16, p. 692–702, (2011).

[22] M.I. Ivanchov and N.V. Pabyrivska, «Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions,» Ukrainian Mathematical Journal, vol. 53, n° %15, p. 674–684., (2001).

[23] M. Ivanchov, «Inverse Problems for Equations of Parabolic Type,» VNTL, Lviv (2003).

[24] M. Ivanchov, «Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary condition,» Ukrain. Math. J, vol. 45, n° %18, p. 1186–1192, (1993).

[25] N. I. Kamynin, «A boundary value problem in the theory of the heat condition with non classical boundary conditions,» Th. Vychist. Mat. Fiz, vol. 43, n° %16, pp. 1006-1024, (1964) .

[26] N.B. Kerimov and M.I. Ismailov, «An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions,» J. Math. Anal. Appl, p. 396, (2012).

[27] X. J. Li and C. J. Xu, «Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractionaldiffusion equation and a spectral method approximation,» Communications in Computational Physics, vol. 8, n° %15, p. 1016–1051, (2010).

[28] X. J. Li and C. J. Xu,, «A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation,» SIAM. J. Numer. Anal, vol. 47 (3), p. 2108–2131, (2009).

[29] Y. Lin and A.W. Allegretto,, «Zhou, Abox schememe for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems,» Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems, vol. 5, pp. 573-578, (1999).

[30] H. P. M ¨uller and R. Kimmich and J. Weis, «NMR flow velocity mapping in random percolation model objects evidence for a power-law dependence of the volume-averaged velocity on the probe-volume radius,» Phys. Rev. E, vol. 54, p. 5278–5285, (1996).

[31] F. Mainardi, «Fractional diffusive waves in viscoelastic solids,» Nonlinear Waves in Solids, p. 93–97, 1995,.

[32] S. Mesloub and I. Bachar, «On a singular time-fractional order wave equation with Bessel operator and Caputo derivative,» vol. 10, p. 60–70, (2017),.

[33] L.A. Muravei and A.V. Filinovskii, «On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation,» Mathematics of the USSR-Sbornik, vol. 74, n° %11, pp. 219-249, (1993).

[34] L. A. Muravei and A.V. Philinovskii, «On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation,» Mat. Zametki, vol. 54, p. 98–116, (1993).

[35] A. Nakhushev, «On a certain approximate method for boundary-value problems for differential,» Differ. Uravn, vol. 18, p. 72–81, (1982).

[36] A. M. Nakhushev, «On one approximate method for the solution of boundary-value problems,» Differents. Uravn, vol. 18, p. 72–81., (1982).

[37] A. M. Nakhushev, «On one approximate method for the solution of boundary-value problems,» Differents. Uravn, vol. 18, n° %11, p. 72–81., (1982).

[38] A. M. Nakhushev, «The equations of the mathematical biology (Moscow : Vysshaya Shkola,» (1995).

[39] T-E. Oussaeif and A. Bouziani, «A priori estimates for weak solution for a time-fractional nonlinear reaction-diffusion equations with an integral condition,» vol. 103, p. 79–89, (2017).

[40] T-E. Oussaeif and A. Bouziani, «Existence and uniqueness of solutions to parabolic fractional differential equations with integral conditions,» vol. 2014, n° %1179, pp. 1-10., (2014).

[41] J. P. Roop, «Computational aspects of fem approximation of fractional advection dispersion equations on bounded domains in R2,,» J. Comp. Appl. Math, vol. 193, pp. 243-268., (2006).

[42] A. A. Samarskii, «Some problems in differential equations theory, Differents,» Differents. Uravn, vol. 16, pp. 1925-1935, (1980).

[43] S.G. Samko and A.A. Kilbas and O.I. Marichev, «Fractional Integrals and Derivatives - Theory and,» Gordon and Breach, (1993).

[44] R.K. Saxena and A.M. Mathai and H.J. Haubold , «Reaction-diffusion systems and nonlinear waves,» Astrophysics and Space Science, vol. 305, p. 297–303., (2006).

[45] H. Scher and E.Montroll, «Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids,» Phys. Rev., vol. 12, p. 2455–2477, (1975).

[46] H. Scher and M.Lax, , «Stochastic transport in a disordered solid,» Phys. Rev. B, vol. 7, p. 4491– 4502, (1973).

[47] P. Shi and M. Shillor, «On design of contact patterns in one-dimensional thermoelasticity, Theoretical Aspects of Industrial Design (Wright-Patterson Air Force Base, OH,1990),» SIAM, Pennsylvania, pp. 76–82., 546–554., (1992).

[48] P. Shi, «Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint,» SIAM. J. Math., vol. 24, pp. 46-58., (1993).

[49] V.A. Vodakhova, «A boundary-value problem with Nakhushev nonlocal condition for a certain pseudoparabolic water transfer equation,» Differ. Uravn, vol. 18, p. 280–285, (1982).

[50] J. Zhao and J. Xiao and Y. Xu, «Stability and convergence of an effective finite element method for multiterm fractional partial differential equations,,» vol. 2013, pp. 1-10, (2013).

[51] V.Grafiychuk and B. Datsko and S.V. Meleshko,, «Nonlinear oscillations and stability domainsin fractional reaction-diffusion systems,» arXiv, (2007) arXiv :nlin.PS/0702013 v1.