REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

N° d'ordre : ...

Série : ...

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de magister

En : Mathématique

Intitulé

Identification d'une partie de la frontière inconnue d'une membrane

OPTION

Mathématique Appliquée

Présenté par REZZOUG IMAD

Soutenu le 14/ 07/ 2009

Devant la commission d'examen

Mr Merouani Boubakeur	Prof	Univ. Ferhat Abbas de Sétif	Président
Mr Ayadi Abdelhamid	Prof	Univ. Larbi.B.M'hidi O.E.B	Directeur
Mr Djebarni Merzouk	M.C	Univ. Larbi.B.M'hidi O.E.B	Examinateur
Mr Bouzit Mohamed	M.C	Univ. Larbi.B.M'hidi O.E.B	Examinateur
Mr Djezzar Salah	M.C	Univ. Mentouri Constantine	Examinateur

Table des matières

Remerciements

Au début et avant tous, je rends grâce à dieu
Tous puissant qui m'a aider à terminer ce travail

✓ Je tiens à souligner l'excellent remerciement à Mr Ayadi Abdelhamid professeur au Université de Larbi Ben M'hidi à Oum El Bouaghi pour l'honneur qu'il me fait en proposant ce thème. M'encourager et me diriger pour sa bonne réalisation, et en encadrant ce mémoire et pour toute l'aide et les conseils et encore plus pour tous le temps qu'il m'a consacré pour me suivre pendant la rédaction de ce travail, malgré ces nombreuses obligations.

✓ Je tiens aussi à exprimer mes profonds remerciements à Mr Merouani Boubakeur professeur au Université Ferhat Abbas de Sétif, pour accepter de présider le jury de soutenance de mon travail.

✓ Je tiens à remercier Monsieur Djezzar Salah et Monsieur Djebarni Merzouk et Monsieur Bouzit Mohamed, d'avoir examiner mon travail et d'être membre de mon jury sans oublier tous mes enseignants sans exception, et se sont intéressés à mon travail et ont bien montré leur pleine disponibilité.

Enfin, je remercie vivement toute personne qui a de prés ou de loin contribué à l'élaboration de ce travail.

✓ Je dédie ce travail à ceux qui ont été toujours là avec leur patiences et amour et qui sont mes symboles dans la vie.

Mes très chers parents. Mes très chers frères, en particulier SAMIR. Mes très chers soeurs, en particulier MOUNA.

A toute ma famille, toutes mes amies et mes collègues, en particulier : Salah, Azdin Athman, Samir, Karim, Katib, Tarek.

Introduction

Les systèmes distribués considérés dans ce mémoire sont ceux décrits par des équations aux dérivées partielles. Précisons un peu, la structure générale de l'équation aux dérivées partielles qui gouverne l'état du système étudié est supposée connue, soit, formellement $\frac{\partial y}{\partial t} + A\left(y\right) =$ source dans l'ouvert $\Omega \times \left]0, \check{T}\right[$.

L'état du système qu'on le notera y est une fonction scalaire solution d'une équation d'évolution.

Dans presque tous les problèmes de météorologie, ou océanographie les conditions initiales ne sont pas complètement connues (noter d'ailleurs que l'on a une grande variété de possibilités quant aux choix de l'état initiale).

Même chose pour des problèmes de pollution dans un lac, une rivière, un estuaire etc.$\square$

Les conditions aux limites peuvent aussi être inconnues, ou seulement partiellement connues, sur une partie de la frontière, qui peut, par exemple, être inaccessible aux mesures qu'il s'agisse de situations biomédicales on de situations correspondant à des accidents. Il en va de même pour les termes sources qui peuvent être d'accès difficile.$\square$

Lorsque la structure de Ω n'est pas entièrement connue, ou d'accès difficile (ou impossible), les coefficients de l'opérateur A peuvent aussi être imparfaitement connus. Une partie de la frontière de Ω peut aussi être imparfaitement connue, comme par exemple dans la gestion de puits de pétrole.$\square$

Naturellement les problèmes évoqués sont modélises par des équations d'évolution de type parabolique linéaire ou non linéaire à termes manquants.

Trouver des informations sur le terme de pollution indépendamment du terme manquant est un sujet qui préoccupe la communauté scientifique, l'idée habituelle est cette des moindres carrés où on considère les termes manquant et de pollution comme deux variables indépendants de contrôle et on cherche à minimiser l'écart entre l'état mesuré sur une partie du domaine et l'état calculé par la résolution du système considère (voir Lions

[13]).

Dans ce type de méthodes, les termes de pollution et les termes manquants jouent le même rôle, il y a possibilité de ne pas pouvoir nettement séparer les rôles des uns et des autres, sans bien sûr, négliger cette méthode fondamentale qui demeure de loin la plus importante pour ce type de problèmes. Il est utile de tenter une nouvelle méthode dite méthode de sentinelle, dont la construction se ramène à l'étude de divers problème de type contrôlabilité.

L'objectif de notre travail consiste à estimer le terme de pollution (fonction source) d'un système d'évolution parabolique indépendamment du terme manquant (la donnée initiale du système) en utilisant le concept de sentinelle.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notation préliminaires d'analyse fonctionnelle et topologie, les théorèmes et les propositions nécessaire et utiles pour aborder les autres chapitres, ainsi que, les espaces fonctionnelles dans lesquels l'existence locale des solution on a lieu. Et on rappelle quelques propriétés de la théorie des semi groupes et technique de résolution des problèmes d'évolution par semi groupe.

Au deuxième chapitre : ce chapitre est le coeur de notre travail.

Dans le deuxième chapitre et par le biais de la théorie des semi groupes on fait une analyse de la contrôlabilité exacte et faible des systèmes considérés et dans le troisième chapitre on va estimer le terme de pollution du système considéré, indépendamment du terme manquant en utilisant le concept de sentinelle. Le résultat obtenu est original.

Au quatrième chapitre on applique la méthode des sentinelles à l'identification d'une frontière inconnue pour l'a détection de perturbation au second membre d'équation de diffusion Réaction.

Chapitre 1

Rappels et notions préliminaires

Le but de ce chapitre est de rappeler certains notions et résultats d'analyse fonctionnelle est topologie utilises dans les chapitres ultérieurs. Pour cela, on a commencé par donner les notations et notion générales et les définitions de quelques espaces fonctionnels, puis, on a exposé un ensemble de notions fondamentales d'analyse fonctionnelle, ainsi que quelques résultats auxiliaires. Et on rappelle quelques propriétés de la théorie des semi groupes et technique de résolution des problèmes d'évolution par semi groupe.

On pourra consulter plusieurs références H.Brezis [20] [21], Y.Yosida [23], J.A.Smoller [25], A.PAZY [31].□

1.1 Notations et Notions Générales

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ à frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, et $x = (x_1\ , x_2\ , ..., x_n)$ vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On désigne par $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, ..., n)$ la dérivée au sens des distributions, pour tous multi indice $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^{*n}$, on posera

$$\begin{aligned} |\beta| &= \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n \\ x^\beta &= x_1^{\beta_1} \times x_2^{\beta_2} \times ... \times x_n^{\beta_n} \\ D^\beta &= \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} ... \partial x_n^{\beta_n}} \\ \beta! &= \beta_1! \beta_2! ... \beta_n! \end{aligned}$$

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$ désigne la dérivée suivant la normal de u extérieure á $\partial\Omega$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u.\overrightarrow{\eta}$$

Où η est le vecteur unitaire de la normal extérieure á $\partial\Omega$.

On définit le gradient de u par

$$\overrightarrow{\text{grad}}u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \tag{1.1}$$

Alors

$$|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$$

Et on définit la divergence de u par

$$\operatorname{div} u = \nabla.u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{1.2}$$

Et on définit le Laplacien de u noté Δ ou ∇^2 par

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{1.3}$$

1.1.1 Quelques espaces usuels

Introduisons l'espace fonctionnelle $\mathcal{L}(E, F)$ des opérateurs T linéaires continus (linéaires bornés) de E dans F, muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Tx\|_F \tag{1.4}$$

Pour tout $p \in \mathbb{R}$ vérifiant $1 \leq p < +\infty$, on définit les espaces $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable telle que} \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty\right\}$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.5}$$

Si $p = \infty$ on définit

$$L^{\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}, \exists c > 0 \text{ tq } |u| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

C'est un espace vectoriel normé complet pour la norme

$$\|u\|_{L^{\infty}} = \inf c > 0; |u| \leq c \text{ p.p sur } \Omega \tag{1.6}$$

Remarque 1.1

♦ Les espaces $L^p(\Omega)$ munis de la norme (1.5) sont des espaces de Banach. En particulier $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \tag{1.7}$$

♦ $C_c(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues á support compact dans Ω, muni de la norme

$$\|u\|_{C_c(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |u(x)| \tag{1.8}$$

♦ $C^k(\Omega)$ (k entier positif) ; désigne l'espace des fonctions f continues, ainsi que leurs dérivées $D^{\beta} f$; $|\beta| \leq k$ sur Ω, et on pose

$$C^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$$

♦ $D(\Omega)$ C'est l'espace des fonctions C^{∞} á support compact, (espace des fonctions test).

♦ Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par

si $m = 1$

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.9}$$

D'une façon générale, pour $m \in \mathbb{N}$, on définit

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; D^\beta u \in L^2(\Omega), \forall \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq m \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta| \leq m} \int_\Omega \left| D^\beta u \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\beta| \leq m} \left\| D^\beta u \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

Remarque 1.2

♦ On notera par

$$H^1_0(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) ; u_{|\partial\Omega} = 0 \right\}$$

♦ pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion suivante

$$H^m(\Omega) \subset H^{m-1}(\Omega) \subset .... \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

♦ Soit X un espace de Banach, $t \to u(t) : \left[0, \check{T}\right] \to X$.

Pour $1 \leq p < +\infty$ on a

$$L^p\left(0, \check{T}; X\right) = \left\{ u : [0, \check{T}] \to X \text{ mesurable telle que } \int_0^{\check{T}} \|u\|^p_X \, dt < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p\left(0,\check{T};X\right)} = \left(\int_0^{\check{T}} \|u\|^p_X \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.11}$$

Et pour $p = +\infty$ on a

$$L^\infty\left(0, \check{T}; X\right) = \left\{ u : [0, \check{T}] \to X \text{ mesurable telle que } \sup_{t \in [0,\check{T}]} ess \, \|u\|_X < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty\left(0,\check{T};X\right)} = \sup_{t \in [0,\check{T}]} ess \, \|u\|_X \tag{1.12}$$

1.2 Rappel sur la théorie des semi groupes

1.2.1 Préliminaire

Dans la suite, nous noterons par X un espace de Banach sur le corps de nombres complexes $\mathbb{C}$ et par $\mathcal{F}(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans X. Nous désignerons par I l'unité de $\mathcal{F}(X)$.

Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$ nous noterons par

$$\operatorname{Im} A = \{Ax; x \in D(A)\} \text{ l'image de } A$$

$$\ker A = \{x \in D(A), Ax = 0\} \text{ le noyau de } A$$

L'opérateur $A : D(A) \subset X \to \operatorname{Im} A$ est surjectif si $\ker A = \{0\}$, alors A est injectif. Pour un opérateur bijectif, on peut définir l'opérateur inverse $A^{-1} : D(A^{-1}) \to X$.

Par $A^{-1}y = x$ si $Ax = y$. Evidemment $D(A^{-1}) = \operatorname{Im} A$.

Définition 1.1

Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$ nous noterons par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ est inversible dans } \mathcal{F}(X)\}$$

L'ensemble résolvante de $A \in \mathcal{F}(X)$ telle que $\rho(A)$ est un ensemble ouvert. Et par

$$R(., A) : \rho(A) \to \mathcal{F}(X); R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

La résolvante de l'opérateur linéaire.

Définition 1.2

L'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ s'appelle le spectre de $A \in \mathcal{F}(X)$ telle que

◊ $\sigma(A) \neq \phi$.

◊ $\sigma(A)$ est un ensemble compacte.

1.2.2 Semi groupe et équation d'évolution

Définition 1.3

Soit X un espace de Banach, une famille d'opérateurs linéaires bornés. $T(t) : X \to X$ dépendantes du paramètre $t \geq 0$ forment un semi groupe si

$$\begin{cases} T(0) & = & I \\ T(t+s) & = & T(t)T(s); \forall t, s \geq 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Définition 1.4

Semi groupe $T(t)$ est dit fortement continues à lorogine (ou bien semi groupe de classe C_0) si

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0; \forall x \in X \tag{1.14}$$

Définition 1.5

Soit $T(t)$ un semi groupe sur X, le générateur infinitésimal de $T(t)$ est l'opérateur linéaire non borné A défini par

$$A : D(A) \subset X \to X$$

$$D(A) = \left\{ x \in X \text{ telle que } \lim_{t \to 0} \frac{T(t) - I}{t} x \text{ existe} \right\}$$

Où

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ pour } x \in D(A) \tag{1.15}$$

$D(A)$ est le domaine de A.

Lemme 1.1

Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe alors

$$\lim_{h \to 0} \int_t^{t+h} T(\sigma) x d\sigma = T(t)x$$

Proposition 1.1

$\forall x \in D(A); T(t)x \in D(A)$ et $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.

Démonstration.

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t)T(h)-T(t)}{h}x \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t)\left(T(h)-I\right)}{h}x \\
&= T(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}x = T(t)Ax
\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = AT(t)x; \forall t \geq 0.$$

D'autre parte

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t-h)x-T(t-h+h)x}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t-h)x-T(t-h)T(h)x}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+}T(t-h)\frac{I-T(h)}{-h}x = T(t)Ax
\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}T(t-h)x = AT(t)x\ .\square$$

Proposition 1.2

$D\left(A\right)$ est un sous espace vectorielle dense dans X $\left(\overline{D\left(A\right)} = X\right)$.

Démonstration.

$D\left(A\right)$ sous espace vectorielle vérifie facilement.

$\overline{D\left(A\right)} = X$?

Comme

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma = x\ ;\forall x \in X$$

Donc il suffit de démontrer que

$$\forall x \in X \quad \text{et} \quad \forall t > 0; \int_0^t T(\sigma)xd\sigma \in D\left(A\right)?$$

En effet

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma &= \frac{1}{h}\int_0^t \{T(h+\sigma)x - T(\sigma)x\}\,d\sigma \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(h+\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{h+t} T(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{0} T(\sigma)xd\sigma + \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^h T(\sigma)xd\sigma = T(t)x - x
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma = T(t)x - x$$

D'où

$$\int_0^t T(\sigma)xd\sigma \in D\left(A\right)$$

Ou a donc aussi $\frac{1}{t}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma \in D\left(A\right)$

Et comme $x = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma$. On en déduit que $\overline{D\left(A\right)} = X$

Et $A\int_0^t T(\sigma)xd\sigma = T(t)x - x$.

Et en plus $\int_0^t T(\sigma)Axd\sigma = T(t)x - x$.$\square$

Proposition 1.3

L'opérateur A est fermé.

Démonstration.

$\forall x_n \in D(A)$ telle que $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$

Est-ce que $x \in D\left(A\right)$ et $Ax = y$?

En effet, supposons que $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\left(x_n\right)_n \in D\left(A\right) \quad \text{et} \quad x_n \to x_0 \quad \text{et} \quad Ax_n \to y_0 \quad \text{dans } X$$

D'après la démonstration précédente

$$\int_0^t T(\sigma)y_0 d\sigma = T(t)x_0 - x_0$$

Donc

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x_0 - x_0}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(\sigma)y_0 d\sigma$$

On en déduit que $x_0 \in D(A)$ et $Ax_0 = y_0$. Ainsi l'opérateur A qui fermé.$\square$

1.2.3 Propriété de la croissance exponentielle de semi groupe

Lemme 1.2

Soit $T(t)$ un semi groupe fortement continue alors il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telle que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0 \tag{1.16}$$

Démonstration

Considérons le compact $[0,1]$

Comme $T(t)$ est fortement continue alors $\forall x \in X; t \to T(t)x$ est continue. Alors du compact $[0,1]$ par cette application est borné.

Alors

$$\exists\ M_x \ \text{ telle que } \|T(t)x\| \leq M_x\ ; \forall t \in [0,1]$$

D'après Banach-Steinhauss

$$\exists\ M \ \text{ telle que } \|T(t)\| \leq M\ ; \forall t \in [0,1]$$

Comme $T(0) = I \Rightarrow M \geq 1$.

Si $t \notin [0,1]$; on peut écrire t sous le forme

$t = n + \sigma$ ou $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in [0,1]$

$$\begin{aligned} T(t) &= T(n+\sigma) = T(n)T(\sigma) = \underbrace{T(1 + ... + 1)}_{n \text{ foix}} T(\sigma) \\ &= \{T(1)\}^n T(\sigma) \end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\|T(t)\| &= \|\{T(1)\}^n\| \, \|T(\sigma)\| \leq \|T(1)\|^n \, \|T(\sigma)\| \\
\|T(t)\| &\leq M^n M = Me^{n\log M} = Me^{n\omega} \\
\|T(t)\| &\leq Me^{t\omega} \quad \text{telle que } \omega = \log M.\square
\end{aligned}
$$

Proposition 1.4

Si $T(t)$ est un semi groupe fortement continue à l'origine est le majoration

$$
\|T\,(t)\| \leq Me^{\omega t}
$$

Alors $T\,(t)$ est fortement continue en un point $s > 0$.

Démonstration.

Soit $T\,(t)$ un semi groupe fortement continue à l'origine pour tout

$$
x \in X; \|T(t)x - x\| \underset{t\longmapsto 0^+}{\longrightarrow} 0
$$

Montrons la continuité forte en un point $s > 0$?

Montrons que

$$
\forall x \in X; \|T(t+s)x - T(s)x\| \underset{t\longmapsto 0^+}{\longrightarrow} 0
$$

Considérons sont d'abord le cas $t > 0$

$$
\|T(t+s)x - T(s)x\| = \|T(t)T(s)x - T(s)x\| = \|T(t)y - y\| \underset{t\longmapsto 0^+}{\longrightarrow} 0
$$

Grâce à la continuité forte à lorogine. La continuité à droite -1-

Le cas $t < 0$

$$
\begin{aligned}
\|T(t+s)x - T(s)x\| &= \|T(t+s)x - T(t-t+s)x\| \\
&= \|-T(t+s)\,(T(-t)x - x)\| \\
&\leq \|T(t+s)\| \, \|(T(-t)x - x)\| \\
&\leq Me^{\omega(t+s)} \, \|(T(-t)x - x)\|
\end{aligned}
$$

On a

$$\|T(-t)x - x\| \underset{t\longmapsto 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{car } t < 0 \text{ alors } -t > 0)$$

Donc la continuité à gauche -2-

D'après 1 et 2 alors $T(t)$ fortement continue.□

1.2.4 Type d'un semi-groupe

Définition 1.6

On appelle type d'un semi groupe $T(t)$ le nombre w_0 définie par

$$\omega_0 = \inf\left\{\omega \in \mathbb{R}; \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que } T(t) \leq Me^{\omega t} \text{ pour } t \geq 0\right\}$$

$$\omega_0 = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log\|T(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log\|T(t)\|}{t} \tag{1.17}$$

On a semi groupe important.

Si $\forall t \geq 0$ on a $\|T(t)\| \leq M$ le semi groupe $T(t)$ est dit borné.

Si $\forall t \geq 0$ on a $\|T(t)\| \leq 1$ le semi groupe $T(t)$ est dit contraction.

1.2.5 La transformée de Laplace d'un C_0-semi- groupe

Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par A_ω l'ensemble

$$A_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > \omega > \omega_0\}$$

Soit $\lambda \in A_\omega$ et $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ nous avons

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0.$$

Et on voit que

$$\left\|e^{-\lambda t}T(t)x\right\| \leq e^{-\operatorname{Re}\lambda . t}\|T(t)\|\,\|x\| \leq Me^{-(\operatorname{Re}\lambda-\omega)t}\|x\|; \forall x \in X$$

Définissons l'application $R_\lambda : X \to X$ Par

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus on a

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^\infty \left\|e^{-\lambda t}T(t)x\right\| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|x\| \,; \forall x \in X$$

D'ou il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

Définition 1.7

L'opérateur $R : A_\omega \to \mathcal{F}(X)$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt \tag{1.18}$$

S'appelle la transformée de Laplace du semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Théorème 1.1

Si λ est telle que

$$\operatorname{Re}\lambda > \omega_0 = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log \|T(t)\|}{t}$$

Alors $\lambda \in \rho(A)$ et l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt$ existe.

Et

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = R(\lambda, A)\, x$$

Démonstration.

Si $\omega_0 < \omega < \operatorname{Re}\lambda$ on a $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$

$$\begin{aligned} \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt\right\| &\leq \int_0^\infty \left\|e^{-\lambda t}T(t)\right\| dt = \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| \|T(t)\| \, dt \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}\lambda . t}e^{\omega t}dt = M \int_0^\infty e^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)t}dt \end{aligned}$$

Ainsi si $\omega_0 < \operatorname{Re}\lambda$ alors l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt$ existe.

Notons par $R(\lambda)$ l'opérateur définit pour chaque $x \in X$ par

$$R(\lambda)\, x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

Tout d'abord on va montrer que

$$\forall x \in X; R(\lambda)\, x \in D(A)?$$

En effet $\forall x \in X$ on a

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt = \frac{1}{h}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\left[T(t+h)x - T(t)x\right]dt$$

On pose $t+h=\sigma$ alors on a

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt &= \frac{1}{h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda(\sigma-h)}T(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\sigma}T(\sigma)xd\sigma \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\sigma}T(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda(\sigma-h)}T(\sigma)xd\sigma \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}R(\lambda)x - e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda\sigma}T(\sigma)xd\sigma
\end{aligned}$$

Si $h \to 0$; on obtient

$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \Rightarrow (\lambda - A)R(\lambda)x = x; \forall x \in X$

Alors $R(\lambda)$ est l'inverse à gauche de l'opérateur $(\lambda I - A)$.

L'inverse à droite ?

Pour montrer que c'est un inverse à droite de $(\lambda I - A)$ il suffit de montrer que

$$AR(\lambda) = R(\lambda)A$$

On a en effet. Si $x \in D(A)$; on a

$$\begin{aligned}
AR(\lambda)x &= A\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt = \lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{T(h)-I}{h}T(t)xdt = \lim_{h\longrightarrow 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)\frac{T(h)-I}{h}xdt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{T(h)-I}{h}xdt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)Axdt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)dtAx = R(\lambda)Ax.\square
\end{aligned}$$

Ainsi on a déduire que $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x$

D'où $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$. C'est-à-dire $R(\lambda) = R(\lambda, A).\square$

1.2.6 Etude de la croissance de la Résolvante

On a que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\operatorname{Re}\lambda > \omega > \omega_0$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt$ est convergente.

$$e^{-\operatorname{Re}\lambda.t}\left\|T(t)x\right\| \leq \left\|x\right\| M_\varepsilon e^{(-\operatorname{Re}\lambda+\omega_0+\varepsilon)t} \text{ où } \varepsilon > 0$$

De cette manière on peut définit l'opérateur borné

$R(\lambda) : X \longrightarrow X; R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt$ telle que $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0 + \varepsilon$.

Et que

$$\left\|R(\lambda)\right\| \leq \frac{M_\varepsilon}{\operatorname{Re}\lambda - \omega_0 - \varepsilon}$$

D'autre part on a $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \leq \omega_0\}$.

Et en générale $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > \omega_0\}$.

Et on a

$$R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)dt \quad \text{et} \quad \left\|R(\lambda, A)\right\| \leq \frac{M_0}{\operatorname{Re}\lambda - \omega_0}.$$

Proposition 1.5

$$(R(\lambda, A))^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}t^{n-1}T(t)dt \tag{1.19}$$

Démonstration.

Tout d'abord on remarque que

L'on a $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$ identité des résolvante de Hilbert (à démontrer facile).

$$\frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

$$\Longrightarrow \lim_{\lambda \longrightarrow \mu} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} = \lim_{\lambda \longrightarrow \mu}(-R(\lambda, A)R(\mu, A))$$

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A) = -(R(\lambda, A))^2$$

Pour riccurance on peut démontrer facilement que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A) = (-1)^n n!(R(\lambda, A))^{n+1}$$

Alors

$$\begin{aligned}(R(\lambda,A))^n &= \frac{1}{(-1)^{n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}R(\lambda,A)\\ (R(\lambda,A))^n &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}t^{n-1}T(t)dt\ ;\forall\lambda\in\rho(A)\end{aligned}$$

Donc

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re}\lambda-\omega)t}t^{n-1}dt$$

On obtient

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^n}.\square$$

1.2.7 L'approximation généralise de Yosida

Dans cette section nous avons utilisé les idées de Pazy pour obtenir une petit extension de l'approximation de Yosida

Lemme 1.3

Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes

♦ A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$.

♦ Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $A_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in A_\omega$; on a

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^n};\forall n\in\mathbb{N}^*$$

Alors pour tout $\lambda \in A_\omega$; nous avons

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda,A)x = x;\forall x\in X$$

De plus

$$\lambda AR(\lambda,A)\in\mathcal{F}(X)$$

Et

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty}\lambda AR(\lambda,A)x = Ax;\forall x\in D(A)$$

Remarque 1.3

On peut dire que les opérateurs bornés $\lambda AR(\lambda, A)$ sont des approximations pour l'opérateur non borné A. C'est le motif pour lequel on introduit le théorème suivant.

Théorème 1.2

La famille $\{A_\lambda\}_{\lambda\in A_\omega} \subset \mathcal{F}(X)$;où

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \tag{1.20}$$

S'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A.

Preuve

On a $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I \Longrightarrow (\lambda I - A) R(\lambda, A) = I$

$\Longrightarrow \lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A) = I \Longrightarrow \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda AR(\lambda, A) = \lambda I$

$\Longrightarrow \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I = \lambda AR(\lambda, A) = A_\lambda.\square$

1.2.8 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.3

Les conditions nécessaire et suffisant pour qu'un opérateur linéaire, fermé a domaine dense dans X.

Soit générateur infinitésimal d'un semi groupe $T(t)$ fortement continues et qu'il existe n'ombre réel M, ω telle que si λ sont réel $\{\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ on a

$$\left\|(\lambda I - A)^{-n}\right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}; \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{1.21}$$

Preuve.

On pose $A_\lambda x = \lambda AR(\lambda, A)(x)$. Pour démontrer ce théorème on a besoin des deux lemmes suivants

Lemme 1.4

On a

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda x = Ax\ ; \forall x \in D(A).\square$$

Lemme 1.5

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés telle que

$A \subset B$ et $\rho(A) \cap \rho(B) = \phi$.

Alors $A = B.\square$

1.2.9 C_0-semi-groupe analytique

Par la suite nous étudions la possibilité d'étendre l'intervalle $]0, \infty)$ à une région du plan complexe, sans bondonner les propriétés de C_0-semi-groupe.

Nous désignerons par Δ l'ensemble

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0 \text{ et } \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\} \tag{1.22}$$

Définition 1.8

On appelle C_0-semi-groupe analytique une famille $\{T(z)\}_{z\in\Delta} \subset \mathcal{F}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes

- $T(0) = I$
- $T(z_1 + z_2) = T(z_1)\, T(z_2); \forall z_1, z_2 \in \Delta$
- $\lim_{z\to 0} T(z)x = x; \forall x \in X, z \in \Delta$
- L'application $\Delta \ni z \to T(z) \in \mathcal{F}(X)$ est analytique dans le secteur Δ.

Remarque 1.4

♦ un semi-groupe est dit analytique, s'il est analytique sur un certain $\Delta \subset \mathbb{C}$ contenant le demi axe réel positif.

♦ Il est clair que la restriction d'un semi groupe analytique à l'axe réel est un semi groupe continu.

1.3 Fonctions Abstraites

Lorsque on travaille avec une fonction $u : (x,t) \to u(x,t)$ d'une variable espace x et d'une variable de temps t ; il est convenable de séparer les variables et de considérer u en tant que fonction $t \to u(t)$ du temps uniquement, ainsi pour chaque t, $u(t)$ est une application $x \to u(x,t)$.

La fonction $t \to u(t)$ est dite fonction abstraite (fonction vectorielle)

Remarque 1.5

On a

$$L^p\left(0, \check{T}; L^p(\Omega)\right) = L^p\left(\Omega \times \left(0, \check{T}\right)\right) \tag{1.23}$$

1.4 Formule de Green

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ á frontière C^1 par morceaux, alors

Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i d\sigma; 1 \leq i \leq n \tag{1.24}$$

Où η_i est le $i^{éme}$ cosinus directeur de la normal η à $\partial\Omega$ d'érigée vers l'extérieur de Ω. On écrit $\eta_i = (\overrightarrow{\eta_i}.\overrightarrow{e_i})$, $d\sigma$ est la mesure de surface sur Ω.

Preuve

Si u (resp. v) appartient à $H^1(\Omega)$, il existe une suite (u_m) de fonctions, (resp. (v_p)) de $D\left(\overline{\Omega}\right)$ qui converge vers u dans $H^1(\Omega)$,(resp. vers v dans $H^1(\Omega)$)

($D\left(\overline{\Omega}\right)$ dense dans $H^1(\Omega)$). On a pour les fonctions u_m, v_p de $D\left(\overline{\Omega}\right)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_p dx = -\int_{\Omega} u_m \frac{\partial v_p}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u_m v_p \eta_i d\sigma; 1 \leq i \leq n \tag{1.25}$$

On obtient (1.24) par le passage à la limite dans la formule de Green (1.25).□

Corollaire 1.1

Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma \tag{1.26}$$

Preuve

$u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, par application de (1.24) avec

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

On obtient

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx$$

Alors

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega} (\Delta u)\, v dx &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \eta_i d\sigma \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma \right\} \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma . \square
\end{aligned}
$$

Remarque 1.8

♦ On peut écrire la formule de Green sous la forme

$$
\int_{\Omega} \nabla u . v dx = \int_{\partial\Omega} u v d\sigma - \int_{\Omega} u . \nabla v dx
$$

♦ On a

$$
\nabla (u.v) = \nabla u.v + u.\nabla v \text{ et } \nabla . (\nabla u) = \Delta u \tag{1.27}
$$

1.5 Problème d'évolution

1.5.1 Données

Soient V et E deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$.

On désigne par $|.|$ (resp. $\|.\|$) la norme dans E(resp. V)et par $(.,.)$ (resp. $\langle .,. \rangle$) les produits scalaires correspondants.

On suppose que

$$
\left| \begin{array}{l} V \subset E, \text{ l'injection de V dans E est continue.} \\ \text{et } V \text{ est dense dans } E. \end{array} \right.
$$

On identifie E à son dual alors

$$
V \subset E \simeq E^* \subset V^*
$$

C'est-à-dire chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue.

On considère la forme bilinéaire

$$
\varphi, \psi \rightarrow a(\varphi, \psi) \quad \text{définie sur } V \times V
$$

Tel que

$$\left| \begin{array}{l} \exists c > 0, \forall \varphi, \psi \in V ; |a(\varphi, \psi)| < c \|\varphi\|_V \|\psi\|_V \\ \exists \alpha > 0, \forall \varphi \in V ; |a(\varphi, \varphi)| < \alpha \|\varphi\|_V^2 \end{array} \right. \tag{1.28}$$

Où c, α sont des constantes positives.

D'après le théorème de représentation de Riesz, on peut écrire

$$a(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi)_{V \times V^*} ; A \in \mathcal{L}(V, V^*)$$

Exemple 1.1

On considère maintenant le problème d'évolution parabolique

Trouver $y \in W\left(0, \check{T}\right)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t} y + Ay & = & f & \text{dans } \left]0, \check{T}\right[\\ y(0) & = & y_0 & y_0 \in E \end{array} \right. \tag{1.29}$$

Où f est donnée dans $L\left(0, \check{T}; V^*\right)$.

Théorème 1.4

Si l'on suppose que (1.28) est vérifiée, alors le problème (1.29) admet une solution unique dans $W\left(0, \check{T}\right)$. En plus l'application

$$(f, y_0) \longrightarrow y$$

Est continue de $L^2\left(0, \check{T}; V^*\right) \times E$ dans $W\left(0, \check{T}\right)$.

Lemme 1.6

Toute fonction $y \in W\left(0, \check{T}\right)$ est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $\left[0, \check{T}\right]$ dans E, de plus on a $W\left(0, \check{T}\right) \subset C^0\left(\left[0, \check{T}\right]; E\right)$ où $C^0\left(\left[0, \check{T}\right]; E\right)$ est l'espace des fonctions continues de $\left[0, \check{T}\right]$ dans E.

1.5.2 Régularité de la solution de problème d'évolution parabolique

Théorème 1.5

On suppose que (1.28) est vérifiée et que $f \in L^2\left(0, \check{T}; E\right) ; y_0 \in D(A)$, alors la solution du problème (1.29) donnée par théorème (1.4) vérifie en plus

$$y \in C^0\left(0, \check{T}; D(A)\right)$$
$$y' \in L^2\left(0, \check{T}; V\right) \cap C^0\left(0, \check{T}; E\right)$$

Théorème 1.6

Sous les hypothèses du théorème (1.4) , on suppose en autre que

✓ la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique.

✓ l'injection canonique de V dans E est compacte.

✓ $f \in L^2\left(0,\check{T};E\right), y_0 \in V.$

Alors la solution du problème (1.29) donnée par la théorème (1.4) vérifiée aussi

$$\begin{aligned} & y \in L^2\left(0,\check{T};D(A)\right) \cap C^0\left(0,\check{T};V\right) \\ & y' \in L^2\left(0,\check{T};E\right) \end{aligned}$$

Remarque 1.6

1- Comme $W\left(0,\check{T}\right) \subset C^0\left(\left[0,\check{T}\right];E\right)$, alors la condition y_0 a un sens. Pour y_0 donnée dans E. le problème (1.29) admet une solution faible unique donnée par

$$y(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Où $(T(t))_{t\geq 0}$ est le semi groupe engendré par l'opérateur A défini sur E.

2- Soit A^* l'adjoint de A. Alors le problème

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } p \in W\left(0,\check{T}\right) \text{ telle que} \\ \left\{\begin{array}{l} -\frac{d}{dt}p + A^*p = f \\ p(T) \in E, f \in L^2\left(0,\check{T};V^*\right) \end{array}\right. \quad \text{dans } \left[0,\check{T}\right] \end{array}\right.$$

a une solution unique.

3- L'adjoint A^* de A engendre le semi groupe $(T^*(t))_{t\geq 0}$ l'adjoint de $(T(t))_{t\geq 0}$ qui est également fortement continu sur le dual E^* de E et si $D(A)$ est dense dans E alors $D(A^*)$ est dense dans E^*.

4- Sous les hypothèses (1) (3) du théorème (1.6), alors il existe un système orthonormé de vecteurs propres (φ_n) de A associés aux valeurs propres λ_n, et le semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ engendré par A s'exprime, pour tout y_0 de E, par

$$T(t)y_0 = \sum_n e^{-\lambda_n t}\left(y_0, \varphi_n\right)\varphi_n$$

Si y est une solution du problème (1.29), elle est donnée par

$$y(t)=\sum_{n\geq 1}\left\{(y_0,\varphi_n)\exp(-\lambda_n t)+\int_0^t (f(s),\varphi_n)\exp(-\lambda_n(t-s))\,ds\right\}\varphi_n$$

Application 1.1

Soit Ω un ouvert borner dans $\mathbb{R}^n$ et Γ la frontière de Ω assez régulière.

On pose

$$Q=\Omega\times\left]0,\check{T}\right[\,;\Sigma=\Gamma\times\left]0,\check{T}\right[$$

On prend

$$\left|\begin{array}{l} V \text{ un sous espace fermé de } H^1(\Omega) \text{ avec } H_0^1(\Omega)\subseteq E\subseteq H^{-1}(\Omega) \\ E=L^2(\Omega) \end{array}\right.$$

On se donne ensuite des fonctions $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)\,,\forall i,j=1,...,n$; $a_0\in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\left|\begin{array}{l} a_{ij}=a_{ji}\ ;\forall i,j=\overline{1,n} \\ \exists\alpha>0,\forall e_i\in\mathbb{R}^n;\sum_{i,j=1}^n a_{ij}e_ie_j>\alpha\left|e\right|^2 \text{ p.p dans } \Omega \end{array}\right. \tag{1.30}$$

Et on pose

$$\left|\begin{array}{l} \forall\varphi,\psi\in V \\ a(\varphi,\psi)=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}dx+\int_\Omega a_0(x)\varphi\psi dx \end{array}\right.$$

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue d'après Cauchy-Schawartz et la définition de la norme de $H^1(\Omega)$, et d'aprés l'hypothèse (3) $a(.,.)$ est symétrique et coercivité, alors étant donnée des fonctions

$$y_0\in L^2(\Omega)\ \text{ et } f\in L^2\left(0,\check{T};L^2(\Omega)\right)$$

Il existe une fonction

$$y\in L^2\left(0,\check{T};V\right)\cap C^0\left(0,\check{T};L^2(\Omega)\right)$$

Unique solution de

$$\left|\begin{array}{rcll} \forall v\in V:\frac{d}{dt}(y(t),v)+a(y(t),v) &=& (f(t),v) & \text{dans } Q \\ y(0) &=& y_0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{1.31}$$

Où

$$\left| \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t}y + Ay & = & f \quad \text{dans } Q \\ y(0) & = & y_0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \tag{1.32}$$

Où A est l'opérateur différentiel elliptique du second ordre donnée par

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + a_0$$

En effet, si $v \in V$ on déduit de (1.31) et (1.32)

$$\frac{d}{dt}(y(t), v) - a(y(t), v) = \int_\Omega \left(\frac{dy(t)}{dt} - Ay(t)\right) v dx$$

Donc $\forall v \in V$

$$a(y(t), v) = \int_\Omega Ay(t)\, v dx$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Gamma \frac{\partial y(t)}{\partial \eta} v d\sigma = 0 \quad \text{Où} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Et $d\sigma$ la mesure superficielle sur Γ, alors le problème (1.31) équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t}y + Ay & = & f \quad \text{dans } Q \\ y(0) & = & y_0 \quad \text{dans } \Omega \\ y & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

Considérons trois choix classiques d'espace V.

♦ **Problème de Cauchy-Dirichlet**

On choisit $V = H_0^1(\Omega)$, donc il existe une fonction unique

$$y \in L^2\left(0, \check{T}; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^0\left(0, \check{T}; L^2(\Omega)\right)$$

Telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y + Ay &= f \quad \text{dans } Q \\ y &= 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ y(0) &= y_0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

♦ **Problème de Cauchy-Newmann**

On choisit $V = H^1(\Omega)$, donc il existe une fonction unique

$$y \in L^2\left(0, \check{T}; H^1(\Omega)\right) \cap C^0\left(0, \check{T}; L^2(\Omega)\right)$$

Telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y + Ay &= f \quad \text{dans } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ y(0) &= y_0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Et comme $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ compacte, alors pour

$$y_0 \in H^1(\Omega), f \in L^2\left(0, \check{T}; L^2(\Omega)\right)$$

On a d'après le théorème (1.6)

$$y \in L^2\left(0, \check{T}; D(A)\right) \cap C^0\left(0, \check{T}; H^1(\Omega)\right)$$

♦ **Problème de Cauchy-Newmann-Dirichlet**

Soit Γ_0, Γ_1 une partition de Γ avec mesure $\Gamma_0 > 0$

On choisit

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v\,|_{\Gamma_0} = 0\right\}$$

Donc il existe une fonction unique

$$y \in L^2\left(0, \check{T}; H^1(\Omega)\right) \cap C^0\left(0, \check{T}; L^2(\Omega)\right)$$

Telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y + Ay &= f \quad \text{dans } Q \\ y &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \left]0, \check{T}\right[\\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \left]0, \check{T}\right[\\ y(.,0) &= y_0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Où

$$\Sigma_0 = \Gamma_0 \times \left]0, \check{T}\right[\ , \Sigma_1 = \Gamma_1 \times \left]0, \check{T}\right[$$

1.6 Relèvement harmonique

Définition 1.9

On appelle relèvement harmonique toute application

$$R : \left| \begin{array}{ccc} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) & \longrightarrow & H^1(\Omega) \\ g & \longmapsto & Rg \end{array} \right. \tag{1.33}$$

Où Rg est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta y &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ y &= g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{1.34}$$

Théorème 1.7

■ L'application de trace d'ordre zéro γ_0 définie sur $D\left(\overline{\Omega}\right)$ à valeur dans $D(\Gamma)$. Se prolonge de manière unique en une application linéaire continue (resp. linéaire continue surjective) de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\Gamma)$ (resp. sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$).

■ Il existe un relèvement R linéaire continue de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$\gamma_0 \circ R = Id_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

■ $H_0^1(\Omega)$ est identique à $ker\gamma_0$ dans $H^1(\Omega)$.

Preuve. Pour la démonstration voir [3]

Remarque 1.7

Si $y \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$; il existe une seul fonction $R_g \subset H^1(\Omega)$ solution du problème (1.34).

Chapitre 2

Contrôlabilité en dimension infinie

2.1 Contrôlabilité des systèmes évolutifs

2.1.1 Position du problème

Dans ce chapitre nous donnons les principes généraux qui concernent l'analyse des systèmes distribués, plus précisément nous introduisons les notions de contrôlabilité exacte et faible, en plus nous introduisons la contrôlabilité régionale des systèmes distribués.□

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ représentant le domaine géométrique du système (2.1) (n=1,2,3 pour les applications) et soit $\check{T} > 0$, on suppose que la frontière Γ est assez régulière. On considère les systèmes décrits par l'équation différentielle opérationnelle.

Trouver $y(t)$ tel que

$$\left| \begin{array}{rcll} y'(t) & = & Ay(t) + Bu(t) & \text{dans} \quad Q = \Omega \times \left]0, \check{T}\right[\\ y(0) & = & y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Où

♦ $A \in \mathcal{L}(E, E^*)$

♦ $B \in \mathcal{L}(U, E^*)$

♦ $u \in L^2\left(0, \check{T}; U\right)$ la fonction de contrôle.

♦ y l'état du système.

♦ y_0 l'état initiale.

Telle que E, U sont des espaces de Hilbert séparables désignant respectivement l'espace d'état, de contrôle.

A est auto adjoint à résolvante compacte et engendre un semi groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur E.$\square$

Théorème 2.1

Sous les hypothèses ci-dessus (2.1) admet une solution faible unique fortement continue sur $[0, \check{T}]$ donnée par

$$y(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds \tag{2.2}$$

Preuve. Pour la démonstration voir [29]

On considère l'opérateur $L_{\check{T}} : L^2\left(0, \check{T}; U\right) \longrightarrow E$ défini par

$$L_{\check{T}}u = \int_0^{\check{T}} T(\check{T}-s)Bu(s)ds \tag{2.3}$$

L désigne l'opérateur $L_{\check{T}}$. L sera utilisé par la suite, pour diverses définitions et propriétés.$\square$

Remarque 2.1

♦ $L_{\check{T}}$ peut aussi être défini comme $L_{\check{T}}\ u = y\left(\check{T}; 0, u\right)$ c'est-à-dire comme la solution à l'instant $\check{T}$, du problème correspondant à la donnée initiale 0 et au second membre (contrôle) Bu.

♦ L'hypothèse de continuité faible sur B est forte, elle sera modifiée dans les cas frontière et ponctuel (voir [29]).$\square$

2.2 Contrôlabilité

Dans le cas des systèmes à paramètres répartis (2.1) de dimension infini l'état du système ne peut pas être atteint en général. C'est le cas, par exemple, où l'opérateur A n'est pas borné et que $D(A)$ peut être différent de E, mais les élément qui ne sont pas atteints peuvent être approchée; ceci nous amène à introduire divers degrés de contrôlabilité.

2.2.1 Contrôlabilité Exacte

Le système considéré est (2.1) et E désigne l'espace d'état $\check{T} > 0$

Définition 2.1

Le système (2.1) est dit exactement contrôlable dans E sur $[0, \check{T}]$ si

$$\forall y_d \in E; \exists u \in L^2\left(0, \check{T}; U\right) \quad \text{tel que } y_u\left(\check{T}\right) = y_d \tag{2.4}$$

Remarque 2.2

L'opérateur L étant défini en (2.3). La définition précédente équivaut à $\operatorname{Im}(L) = E$.

Définition 2.2

Soit E_1 un sous espace vectoriel de E, le système (2.1) est dit exactement contrôlable dans E_1 si

$$\forall y_d \in E_1; \exists u \in L^2\left(0, \check{T}; U\right) \quad \text{tel que } y_u\left(\check{T}\right) = y_d \tag{2.5}$$

Remarque 2.3

La définition précédente équivaut à $E_1 \subset \operatorname{Im} L$, L étant toujours défini par (2.3).

Caractérisation

De la définition (2.1) résulte les propriétés de caractérisation suivantes

Proposition 2.1

Le système (2.1) est exactement contrôlable sur $\left[0, \check{T}\right]$ si et seulement si

$$\exists \eta > 0 \text{ telle que } \|y^*\|_{E^*} \leq \eta \|B^* T^*(.)\, y^*\|_{L^2\left(0,\check{T};U\right)} \tag{2.6}$$

Pour tout y^* dans E^* où $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ est le semi groupe adjoint de semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Preuve. Voir [29]

Lemme 2.1

Soient E, F et G des espaces de Banach réflexifs et $f \in \mathcal{L}(E, G)\,; g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes

♦ $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$

♦ $\exists c > 0$ tel que $\|f^* y^*\|_{E^*} \leq c \|g^* y^*\|_{F^*}\,; \forall y^* \in G^*$.

la propriété de caractérisation donnée ci-dessus est intéressants dans la mesure où on ramène l'exacte contrôlabilité a une inégalité assez facile à expliciter pour un système (2.1) donnée.

Il y a des cas où certaines hypothèses sur les paramètres du système permettent directement de savoir si le système est exactement contrôlable ou non, ainsi nous avons

Proposition 2.2

Soit $L_t : L^2(0, t; U) \longrightarrow E$ l'opérateur défini par

$$L_t u = \int_0^t T(t-s) Bu(s)\, ds \tag{2.7}$$

Si pour tout $t \geq 0$, L_t est compacte alors le système (2.1) n'est pas exactement contrôlable.

Preuve. Voir [29]

Corollaire 2.1

Si $\{T(t)\}_{t>0}$ est compacte pour tout $t > 0$, alors le système (2.1) n'est pas exactement contrôlable.

Donc le système (2.1), n'est pas être exactement contrôlable, au sens de la définition (2.1), si B ou $\{T(t)\}_{t>0}$ sont compacte.

Preuve. Voir [29]

Exemple 2.1

$$\begin{cases} y'(t) &= \Delta y(t) + u(t) \quad \text{sur } \left[0, \check{T}\right] \\ y(0) &= y_0 \qquad\qquad\quad y_0 \in D(A) \end{cases} \tag{2.8}$$

Ce système dynamique n'est pas exactement contrôlable dans $L^2(\Omega)$ sur $\left[0, \check{T}\right]$. Cet exemple explique pourquoi, dans la pratique, la plupart des systèmes dynamiques définis dans les espaces de dimension infinies ne sont pas exactement contrôlable, c'est pourquoi nous sommes conduit à donner d'autres définitions de la contrôlabilité.□

2.2.2 Contrôlabilité Faible

Définition 2.3

Le système (2.1) est dit faiblement contrôlable dans E sur $\left[0, \check{T}\right]$ si pour tout y_d dans E on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2\left(0, \check{T}; U\right) \text{ tel que } \left\|y_u\left(\check{T}\right) - y_d\right\|_E \leq \varepsilon \tag{2.9}$$

Remarque 2.4

Dans la définition (2.3) le choix de y_d dans E est important nous restreignons à un sous espace vectoriel E_1 de E pour obtenir l'exacte contrôlabilité sur E_1.

Caractérisation

Pour les systèmes distribués, la notion de faible contrôlabilité est beaucoup plus adaptée.

Nous pouvons la caractériser par la

Proposition 2.3

Il y a équivalence entre

1$-$ Le système (2.1) est faiblement contrôlable sur $\left[0, \check{T}\right]$

2$-$ $\overline{\operatorname{Im}(L)} = E$

3$-$ $\ker(L^*) = \ker(L^* L) = \{0\}$

4$-$ $\left\{\langle y, T(s)Bu\rangle_E = 0, \forall s \in \left[0, \check{T}\right] \text{ et } \forall u \in U\right\} \Rightarrow y = 0$

5$-$Si le semi-groupe $\{T(t)\}_{t>0}$ est analytique, alors on a

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Im}(A^n T(s)\, B)} = E, \forall s \in \left]0, \check{T}\right]$$

Preuve.

$\underline{(1 \Rightarrow 2)?}$

(2.1) faiblement contrôlable sur $\left[0, \check{T}\right] \Leftrightarrow$

$$\forall y_d \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2\left(0, \check{T}; U\right) \text{ tel que } \left\|y_u\left(\check{T}\right) - y_d\right\| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \overline{\operatorname{Im}(L)} = E. \square$$

$\underline{(2 \Rightarrow 3)?}$

On a

$\overline{\operatorname{Im}(L)} = E \Rightarrow \left(\overline{\operatorname{Im}(L)}\right)^{\perp} = (E)^{\perp} \Rightarrow \left(\overline{\operatorname{Im}(L)}\right)^{\perp} = \{0\}$

Et comme $\left(\overline{\operatorname{Im}(L)}\right)^{\perp} = \ker L^*$ alors $\ker(L^*) = \{0\}$

On calcule $\ker(L^* L)$, on suppose que

$$\exists x \in E \text{ tel que } \langle (L^* L)\, x, y\rangle = 0; \forall y \in E$$

$$\Rightarrow \exists x \in E \text{ tel que } \langle L^* x, L^* y\rangle = 0; \forall y \in E$$

Pour $x = y$ on a

$$\exists x \in E \text{ tel que } \langle L^* x, L^* x\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \exists x \in E \text{ tel que } \|L^*x\| = 0$$

Et comme $\ker(L^*) = \{0\} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker(L^*L) = \{0\}$

D'où $\ker(L^*) = \ker(L^*L) = \{0\} .\square$

<u>$(3 \Rightarrow 4)$?</u>

On a $\ker(L^*) = \ker(L^*L) = \{0\}$

C'est-à-dire $\left\{\langle y, T(s)Bu\rangle_E = 0, \forall s \in \left[0, \check{T}\right] \text{ et } \forall u \in U\right\} \Rightarrow y = 0$

On a $\left\{\langle y, T(s)Bu\rangle_E = 0, \forall s \in \left[0, \check{T}\right] \text{ et } \forall u \in U\right\}$

$$\Rightarrow (B^*T^*(s)\, y, u) = 0, \forall s \in \left[0, \check{T}\right] \text{ et } \forall u \in U \Rightarrow L^*y = 0 \Rightarrow y = 0.\square$$

<u>$(4 \Rightarrow 5)$?</u>

On suppose que $\exists s \in \left]0, \check{T}\right[, \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Im}(A^nT(s)\, B)} \neq E$

$$\Rightarrow \exists s \in \left]0, \check{T}\right[, \exists y \neq 0 \text{ tel que } \langle y, A^nT(s)Bu\rangle = 0; \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in U$$

Or

$$\langle y, A^nT(s)Bu\rangle = \frac{\partial}{\partial^n s}\langle y, T(s)Bu\rangle\, ; \forall n$$

Et par l'analyticité on en déduit que

$$\langle y, T(s)Bu\rangle = 0, \forall u \in U \text{ et } t \text{ voisin de } s.$$

$\{\langle y, BT(s)u\rangle = 0, \forall u \in U \text{ et } t \text{ voisin de } s\}$ c'est-à-dire non (4).$\square$

<u>$(5 \Rightarrow 1)$?</u>

$$\exists y \neq 0 \text{ tel que } \langle y, T(s)Bu\rangle = 0; \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in U$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in U : \frac{\partial}{\partial^n s}\langle y, T(s)Bu\rangle = 0; \forall s \in \left]0, \check{T}\right]$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in U : \langle y, A^nT(s)Bu\rangle = 0; \forall s \in \left]0, \check{T}\right]$$

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Im}\left(A^n T(s) B\right)} \neq E, \forall s \in \left]0, \check{T}\right].\square$$

C'est-à-dire non (5).

2.3 Contrôlabilité Régionale

Les concepts d'état de système sont attachés un certain nombre qui jouent un rôle fondamentale dans la théorie de la commande.

Il s'agit en général, d'amener l'état du système à des valeurs désirées sur une partie de Ω.

2.3.1 Définition de la contrôlabilité régionale et caractérisation

Soit $y_d \in L^2(\omega)$ un état désiré donnée, le problème de la contrôlabilité régionale consiste à savoir si l'on peut trouver un contrôle $u \in U$ permettant d'amener l'état du système (2.1) de y_0 à y_d sur la région ω.

Définition 2.4

$\Diamond$ Le système (2.1) est dit exactement régionalement contrôlable sur ω si pour tout $y_d \in E$, il existe un contrôle $u \in U$ tel que

$$y_u\left(\check{T}\right)|_{\omega} = y_d \tag{2.10}$$

$\Diamond$ Le système (2.1) est dit faiblement régionalement contrôlable sur ω si $\forall \varepsilon \geq 0$, il existe un contrôle $u \in U$ tel que

$$\left\| y_u\left(\check{T}\right)|_{\omega} - y_d \right\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon \tag{2.11}$$

Le système (2.1) sera aussi dit ω-exactement (resp. faiblement) contrôlable où $y_u(.)$ est donnée par (2.2) et $y|_{\omega}$désigne la restriction de y à ω.

Remarque 2.5

Les définitions ci-dessus signifient que l'on ne s'intéresse qu'à l'état atteint sur la région ω.

Le contrôle u dépend de la variable du temps mais implicitement, il dépend aussi du sous-domaine ω.

Plusieurs difficultés sont sous-jacentes à ces définitions.

Notons, en partie que l'opérateur B est liée au mode d'excitation du système. Si le système excite par une action ponctuelle où frontière, l'opérateur B n'est plus borné donc il faut revoir le choix des espaces. Cependant l'étude peut être faite de la même manière.

On pose $L : L^2\left(0, \check{T}; U\right) \longrightarrow E$ et $\chi_\omega : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\omega)$ défini par

$$Lu = \int_0^{\check{T}} T\left(\check{T} - s\right) Bu(s)ds \text{ et } \chi_\omega y = y \mid_\omega \tag{2.12}$$

L'adjoint de χ_ω est $\chi_\omega^* : L^2(\omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ défini par

$$\left(\chi_\omega^* y\right) x = \begin{cases} y(x) & x \in \omega \\ 0 & x \in \Omega \backslash \omega \end{cases} \tag{2.13}$$

L'opérateur L étant défini, les définitions précédentes sont équivalentes à

- $\operatorname{Im} \chi_\omega L = L^2(\omega)$ dans le cas de la contrôlabilité régionale exacte.
- $\overline{\operatorname{Im} \chi_\omega L} = L^2(\omega)$ pour le cas de la contrôlabilité régionale faible.

La contrôlabilité régionale exacte peut être caractérisée par

Proposition 2.4

Si $u \in L^2\left(0, \check{T}; U\right)$, alors le système (2.1) est exactement régionalement contrôlable si et seulement si pour tout $y^* \in L^2(\omega)$ il existe $\eta > 0$, tel que

$$\|y^*\|_{L^2(\omega)} \leq \eta \|B^* T^*(.)\, y^*\|_{L^2\left(0, \check{T}; U\right)} \tag{2.14}$$

Proposition 2.5

a- Le système (2.1) est exactement régionalement contrôlable si et seulement si

$$\ker \chi_\omega + \operatorname{Im} L = L^2(\Omega) \tag{2.15}$$

b- Le système (2.1) est faiblement régionalement contrôlable si et seulement si

$$\ker \chi_\omega + \overline{\operatorname{Im} L} = L^2(\Omega) \tag{2.16}$$

Preuve.

a- Soit $y \in L^2(\Omega)$. On a $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 = 0$ sur ω et $y_2 = 0$ sur $\Omega \backslash \omega$. le système (2.1) étant exactement régionalement contrôlable donc

$y_2 \in \operatorname{Im} \chi_\omega L$, autrement dit il existe $u \in U$ tel que $y_2 = Lu$.

$y_1 = 0$ sur ω donc $y_1 \in \ker \chi_\omega$ alors

$$y \in \ker \chi_\omega + \operatorname{Im} L \Rightarrow \ker \chi_\omega + \operatorname{Im} L = L^2(\Omega)$$

Maintenant, soit $y \in L^2(\omega)$ alors

$$\chi_\omega^* y \in L^2(\Omega) \Rightarrow \exists y_1 \in \ker \chi_\omega, \exists y_2 \in \operatorname{Im} L$$

Tel que

$$\chi_\omega^* y = y_1 + y_2 \Rightarrow \exists y_1 \in \ker \chi_\omega, \exists y_2 \in \operatorname{Im} L$$

Tel que

$$\chi_\omega \chi_\omega^* y = \chi_\omega y_1 + \chi_\omega y_2 \Rightarrow \exists y_1 \in \ker \chi_\omega, \exists y_2 \in \operatorname{Im} L$$

Tel que

$$y = \chi_\omega y_2 \Rightarrow y \in \operatorname{Im}(\chi_\omega L) \quad \text{donc} \quad \operatorname{Im}(\chi_\omega L) = L^2(\omega)$$

Alors le système (2.1) est exactement régionalement contrôlable.□

b- Si le système (2.1) est faiblement régionalement contrôlable alors
$y_2 \in \overline{\operatorname{Im} \chi_\omega L}$ ou encore $\forall \eta > 0$ il existe $u \in U$ tel que

$$\|y_2 - \chi_\omega L_u\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon$$

Il vient $\|y_2 - L_u\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $y_2 \in \overline{\operatorname{Im} L}$ alors

$$y_2 \in \ker \chi_\omega + \overline{\operatorname{Im} L} \quad \text{donc} \quad \ker \chi_\omega + \overline{\operatorname{Im} L} = L^2(\Omega) .\square$$

Remarque 2.6

Le système (2.1) est faiblement régionalement contrôlable sur ω si et seulement si

$$\ker L^* \cap \operatorname{Im} \chi_\omega^* = \{0\} . \tag{2.17}$$

Corollaire 2.2

Le système (2.1) est faiblement régionalement contrôlable dans $L^2(\omega)$ sur $\left[0,\check{T}\right]$ si et seulement si l'une des propriétés suivante est satisfaite.

♦ $(\chi_\omega L)^*(\chi_\omega L)$ est inversible.

♦ $\overline{\mathrm{Im}(\chi_\omega L)} = L^2(\omega)$.

♦ $\ker(\chi_\omega L)^* = \ker(\chi_\omega L)^*(\chi_\omega L) = \{0\}$.

♦ $(B^*T^*(s)\chi_\omega^*)\, y = 0; \forall s \in \left[0,\check{T}\right] \Longrightarrow y = 0$.

♦ Si le semi-groupe est analytique tel que

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\mathrm{Im}(\chi_\omega A^n T(s)B)]} = L^2(\omega)\,; \forall s \in \left]0,\check{T}\right]$$

Remarque 2.7

Il est clair que

◊ Un système qui est exactement (resp. faiblement) contrôlable est exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable.

◊ Un système qui est exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable sur $\omega_1$et exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable sur ω_2 pour tout $\omega_2 \subset \omega_1$.

◊ La définition (2.4) est général et englobe le cas de la contrôlabilité classique (cas $\omega = \Omega$).

◊ Si

$$J(u) = \int_0^{\check{T}} \|u(t)\|^2\, dt \tag{2.18}$$

Désigne le coût de transfert, alors pour tout $\omega \subset \Omega$, le coût de transfert régional sur ω est inférieur à celui sur tout Ω.

En effet

$$W_\Omega = \left\{u \in L^2\left(0,\check{T};U\right) \quad \text{tel que} \quad y_u\left(\check{T}\right) = y_d \quad \text{sur } \Omega\right\}$$

$$W_\omega = \left\{u \in L^2\left(0,\check{T};U\right) \quad \text{tel que} \quad y_u\left(\check{T}\right) = y_d \quad \text{sur } \omega\right\}$$

Alors $W_\omega \subset W_\Omega$ et donc

$$\min_{W_\omega} J(u) \leq \min_{W_\Omega} J(u) \tag{2.19}$$

$\Diamond$ On peut trouver des systèmes qui sont régionalement contrôlable mais qui ne sont pas contrôlable sur tout le domaine. Ceci est illustré par l'exemple suivant

Contre-exemple 2.2

Considérons le système décrit par l'équation parabolique

$$\left| \begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t}y(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) & = & \chi_{[a,b]}u(t) & \text{dans } Q =]0,1[\times]0,\check{T}[\\ y(x,0) & = & 0 & \text{dans }]0,1[\\ y(0,t) = y(1,t) & = & 0 & \text{dans }]0,\check{T}[\end{array} \right. \tag{2.20}$$

Avec a et b tels que $(b-a) \in Q$ et $[a,b] \subset]0,1[$. Alors on a le résultat suivant

Le système (2.20) n'est pas contrôlable sur $]0,1[$, (voir [29]).

Mais il peut être contrôlable sur une région $[\alpha, \beta]$, pour α et β convenablement choisis (voir [29] [30]).$\square$

Dans la suite on suppose que A admet un système complet de fonction propres $(\varphi_i)_{i\geq 1}$ associées aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i\geq 1}$. Sans perte de généralité, supposées simples.

Le semi-groupe engendré par A est donnée par

$$T(t)y = \sum_{i\geq 1} \exp(\lambda_i t) \langle \varphi_i, y \rangle_E \varphi_i$$

Et la solution de (2.1) s'exprime pour $y_0 = 0$

$$y_u(t) = \sum_{i\geq 1} \int_0^t \exp(\lambda_i (t-s)) \langle B^* \varphi_i, u(s) \rangle_{U^* \times U} \varphi_i ds$$

On note par

$$\digamma = \{i \geq 1 / B^* \varphi_i = 0\} \quad \text{et} \quad J = \digamma^c$$

On a (2.1) est faiblement contrôlable si et seulement si

$$\digamma = \phi \quad \text{(ensemble vide)}$$

Dans le cas de la contrôlabilité régionale nous avons le résultat

Théorème 2.2

On suppose que (2.1) est non contrôlable ($\digamma \neq \phi$). alors nous avons l'équivalence entre

1► Le système (2.1) est régionalement faiblement contrôlable sur ω.

2► La famille $\{\chi_\omega \varphi_i\}_{i\in J}$ est totale dans $L^2(\omega)$.

3► Si $y \in L^2(\Omega)$ vérifiant $\int_\omega y(x)\varphi_i(x)\,dx = 0$ pour tout $i \in J$ alors $y = 0$.

4► Si $\sum_{i\in F} \alpha_i\varphi_i = 0$ sur $\Omega\backslash\omega \Rightarrow \alpha_i = 0$ $(\forall i \in F)$

Preuve

$(1 \Leftrightarrow 2)$ et $(2 \Leftrightarrow 3)$

Résultent du faite que

$$\overline{\operatorname{Im}\chi_\omega L} = L^2(\omega) \Leftrightarrow \ker L^*\chi_\omega^* = \{0\}\,.\square$$

$(3 \Rightarrow 4)$?

Considérons $(\alpha_i)_{i\in F}$ tel que $\sum_{i\in F} \alpha_i\varphi_i = 0$ sur $\Omega\backslash\omega$

Soit

$$y = \chi_\omega \sum_{i\in F} \alpha_i\varphi_i \subset L^2(\Omega)$$

On a $\int_\omega y(x)\varphi_i(x)\,dx = 0$ pour tout $i \in J \Rightarrow y = 0$ par conséquent $\alpha_i = 0, \forall i \in F.\square$

$(4 \Rightarrow 3)$?

Soit $y \in L^2(\Omega)$ tel que$\int_\omega y(x)\varphi_i(x)\,dx = 0, \forall i \in J$

$$\chi_\omega^* y = \sum_{i\geq 1} \alpha_i\varphi_i$$

Où

$$\alpha_i = \int_\Omega \chi_\omega^* y(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \int_\omega y(x)\,\varphi_i(x)\,dx \Rightarrow \alpha_i = 0.\square$$

Conclusion 2.1

♦ Si F^c est fini alors (2.1) n'est pas contrôlable sur aucun $\omega \subset \Omega$.

♦ Si F est fini alors (2.1) est contrôlable sur tout $\omega \subset \Omega$.

Chapitre 3

Les Sentinelles

3.1 Orientation. Position des premiers problèmes modèles

3.1.1 L'équation d'état

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3$ dans les applications, borné ou non, de frontière $\partial\Omega = \Gamma$.

On suppose généralement que Γ est "assez-régulière", mais les hypothèses là dessus peuvent être considérablement relaxées.

On considère un système évolutif dans Ω. L'état de ce système est désigne par y. Nous considérons d'abord le cas scalaire. Donc y est fonction de $x \in \Omega$, $t \in \left(0, \check{T}\right)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'état y dépend également d'un certain nombre d'autres paramètres ou fonctions connues ou inconnues.

Plus précisément, l'état satisfait à l'équation aux dérivées partielles (l'équation d'état).

$$\tfrac{\partial}{\partial t} y(t) + Ay(t) = f(t) + \lambda \widehat{f}(t) \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times \left(0, \check{T}\right) \tag{3.1}$$

Dans (3.1) l'opérateur A est un opérateur différentiel elliptique du $2^{ème}$ ordre

$$Ay = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)$$

Où on adopte. Ici et dans la suite - la convention de sommation des indices répétés. On suppose que

$$a_{ij} \in L^\infty\left(\Omega \times \left(0, \check{T}\right)\right)$$

(Mais on aura plus loin besoin d'hypothèses de régularité sur les a_{ij} de façon à pouvoir appliquer des théorèmes d'unicité). On suppose que A est elliptique, donc

$$\left| \begin{array}{l} a_{ij}(x,t)\zeta_i\zeta_j \geq \alpha\zeta_i\zeta_i, \forall \zeta_i \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \\ \text{p.p. dans } \Omega \times \left(0, \check{T}\right) \end{array} \right.$$

Remarque 3.1

On pourra aussi considérer le cas vectoriel, au l'état y est un vecteur. On pourra aussi considérer le cas des équations de Navier-Stokes.□

Dans la $2^{\text{ème}}$ membre de (3.1), f est connue, dans un espace de Hilbert ou de Banach $\equiv$, de norme notée $\|.\|_\equiv$

Le terme $\lambda\widehat{f}$ n'est pas connu. On sait seulement que

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\equiv \leq 1.$$

Autrement dit

$$\left| \begin{array}{l} \lambda\widehat{f} \in \text{ boule de centre l'origine et de rayon } \lambda \text{ dans } \equiv \\ \text{et on suppose en outre que } \lambda \text{ est "petit".}\square \end{array} \right.$$

Remarque 3.2

Le terme $\lambda\widehat{f}$ est un terme de pollution.

Les méthodes que l'on va étudier ont pour objet d'obtenir des informations sur ce terme de pollution, à partir d'observation comme indiqué ci - après, mais le système étant soumis à d'autres aléas, comme on indique maintenant.□

3.1.2 Les conditions initiales

On désignera par $y\,(0)$ la fonction $x \to y(x,0)$.

Les conditions initiales sont incomplètes. Il suppose que

$$y(0) = y_0 + \tau\widehat{y}_0 \tag{3.2}$$

Où y_0 est donnée dans un espace de Hilbert ou de Banach convenable, disons $y_0 \in H$.

Et où

$$\left| \begin{array}{l} \|\widehat{y}_0\|_H \leq 1 \\ \tau \text{ est “petit”} \end{array} \right.$$

Donc $\tau\widehat{y}_0$ demeure dans la boule de H de centre 0 et de rayon τ.

Le terme $\tau\widehat{y}_0$ est “manquant”.

Dans la méthode des sentinelles, on va essayer d'estimer $\lambda\widehat{f}$ sans chercher à connaître ou estimer le terme $\tau\widehat{y}_0$ manquant.

On cherche à estimer la pollution. On ne cherche pas les termes manquants..

Remarque 3.3

On gardera toujours la notion $\lambda, \lambda_0, ..., \lambda_i, ...$pour des termes de pollutions et la notation $\tau, \tau_0, ..., \tau_i, ...$ pour des termes manquantes.$\square$

3.1.3 Les conditions aux limites

Pour fixer les idées, on suppose que

$$y = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times \left]0, \check{T}\right[\tag{3.3}$$

Plusieurs remarques s'imposent ici.

Remarque 3.4

Ce point est essentiel. On peut avoir également des termes de pollution et des termes manquants dans les conditions aux limites. Par exemple

$$\left| \begin{array}{l} y = g_0 + \lambda_0\widehat{g}_0 \;\text{ sur }\; \Sigma_0 = \Gamma_0 \times \left(0, \check{T}\right) \\ y = g_1 + \tau_1\widehat{g}_1 \;\text{ sur }\; \Sigma_1 = \Gamma_1 \times \left(0, \check{T}\right) \\ y = 0 \;\text{ sur }\; \Sigma\backslash\Sigma_0 \cup\; \Sigma_1 \end{array} \right.$$

Où $\widehat{g}_0, \widehat{g}_1$ sont dans la boule unité d'espaces de Hilbert ou de Banach convenables et où λ_0(resp.τ_1) est un terme (petit) de pollution (resp. manquant).

En résumé, l'équation d'état est donnée par (3.1) (3.2) (3.3) .

On fait l'hypothèse (qu'il faut bien entendu préciser dans chaque cas particulier).

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } \lambda \text{ et } \tau \text{ donnés, ainsi que } \widehat{f} \text{ et } \widehat{y}_0, \\ \text{l'équation d'état (3.1) (3.2) (3.3) admet une solution} \\ \text{unique que l'on note } y\left(x, t; \lambda, \tau\right) \end{array} \right.$$

Remarque 3.5

On pourra considérer, par la méthode que l'on va introduire, les situations où l'on dispose d'informations supplémentaires sur la pollution et sur les termes manquants.

Par exemple

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t}y + Ay & = & f + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \widehat{f}_i \\ y(0) & = & y_0 + \sum_{i=1}^{s} \tau_i \widehat{y}_i^0 \\ y & = & 0 \text{ sur } \Sigma \text{ (identique à (3.3))} \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Où les fonctions $\widehat{f}_i, \widehat{y}_i^0$ sont connues. Toujours avec le même type de notations, les λ_i sont des termes de pollution, les τ_i des termes manquants. On cherche à obtenir les λ_i, on ne cherche pas à obtenir les τ_i.□

3.1.4 Observation

Soit $O \subset \Omega$. l'ouvert O est l'observation on doit considérer que O est "petit".

Remarque 3.6

On verra que, pour les systèmes dissipatifs, l'ouvert O peut, au moins théoriquement être arbitrairement petit.□

Remarque 3.7

L'ouvert O peut consister en plusieurs composantes.□

Remarque 3.8

On peut considérer aussi un observation O qui dépend du temps

$$O = O\left(t\right)$$

(c'est par exemple le cas d'un bateau observatoire, Ω étant alors un océan ou un lac etc...).□

On observe y (l'état du système), sur O, pendant l'intervalle de temps $\check{T}$.

Donc, théoriquement, on va disposer de

$$y(x,t;\lambda,\tau) = y_{obs} \text{ sur } O \times \left(0, \check{T}\right)$$

En fait, la situation est plus compliquée, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, y_{obs} est entaché de bruit. Donc

$$y_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^{s} \beta_i m_i. \tag{3.5}$$

Où les fonctions $m_0, m_1, ..., m_s$ sont connues mais où les β_i ne sont pas connus. On sait seulement que les β_i sont "petits".

Les coefficients β_i sont les termes de bruit. On tenter d'obtenir des informations sur λ qui soient indépendantes de τ et de $\beta \in \{\beta_i\}$.□

3.1.5 Les problèmes modèles

Problème 3.1

On suppose que l'état est donné par (3.1) (3.2) (3.3). On suppose que l'observation est donnée "sans bruits".

$$y_{obs} = m_0$$

On cherche à obtenir des informations sur $\lambda\widehat{f}$, sans chercher des précisions sur les données manquantes $\tau\widehat{y_0}$.

Problème 3.2

On se place dans les mêmes conditions qu'au problème (3.1) mais cette fois avec des "bruits" comme dans (3.5) on cherche à obtenir des informations sur $\lambda\widehat{f}$, sans chercher des précisions sur $\tau\widehat{y_0}$, et de manière insensible aux bruits.□

3.2 Exemples

Dans presque tous les problèmes de météorologie, ou d'océanographie, les conditions initiales ne sont pas complètement connues.(Noter d'ailleurs que l'on a une grande variété de possibilités quant au choix de l'instant initiale).

Même chose pour des problèmes de pollution dans un lac, une rivière, un estuaire etc.□

Les conditions aux limites peuvent aussi être inconnues, au seulement partiellement connues, sur une partie de la frontière. Qui peut, par exemple, être inaccessible aux mesures qu'il s'agisse de situations biomédicales ou de situations correspondant à des accidents - Il en va de même pour les termes sources qui peuvent être d'accès difficile.□

Lorsque la structure de Ω n'est pas entièrement connue, ou d'accès difficile (ou impossible), les coefficients de l'opérateur A peuvent aussi être imparfaitement connus, une partie de la frontière de Ω peut aussi être imparfaitement connue, comme par exemple dans la gestion de puits de pétrole.□

Naturellement les problèmes évoqués brièvement sont classique et ont donnée lieu à beaucoup de développements.

L'idée la plus habituelle est celle des moindres carrés.□

3.3 Moindres Carrés

Soit le système évolutif suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t}y(t)+Ay(t) & = & f(t)+\lambda\widehat{f}(t) & \text{dans } Q \\ y(x,0) & = & y_0+\tau\widehat{y_0} & \text{dans } \Omega \\ y\left(t\right) & = & 0 & \text{Sur } \ \Sigma \end{array}\right. \tag{3.6}$$

On considère les inconnues $\left\{\lambda\widehat{f},\tau\widehat{y_0}\right\}=\left\{v,w\right\}$, où $\lambda\widehat{f}$ est une pollution et $\tau\widehat{y_0}$ est un terme manquant, comme des variables de contrôle de l'état $y(x,t;v,w)$ du système et on veut que cet état soit "aussi proche que possible" de l'état mesuré y_m.

On pose

$$J\left(v,w\right)=\text{distance de } y(x,t;v,w) \text{ sur } O\times\left(0,\check{T}\right) \text{ à } y_m.$$

(la distance étant prise dans une norme convenable) et l'on cherche

$$\inf J\left(v,w\right)$$

Où v,w sont quelconques ou assujettis à des contraintes qui correspondant aux informations on dispose.

Du point de vue technique, cela conduit à des problèmes de contrôle optimal pour des systèmes distribue.

Entrent dans ce cadre les problèmes dits "d'identification" et les méthodes dites "inverses".

Naturellement, la formulation précédente est complètement générale, et s'applique en principe, à toutes les situations évoquées précédemment. Dans ce type de méthode, les termes de pollution et les termes manquants jouent le même rôle.

On cherche à déterminer les uns et les autres. Il y a possibilité de ne pas pouvoir nettement séparer les rôles des uns et des autres.

Pour les problèmes non linéaires, il n'y a pas unicité de la solution numérique autour de la solution correspondante à $\lambda = 0$ et $\tau = 0$.

Les problèmes correspondants peuvent être mal posé. Il faut alors introduire dans le système (3.6) correspondant à $\lambda = 0$ et $\tau = 0$ des termes régularisant ou stabilisation qui induisent des erreurs d'approximation supplémentaires.

Bien sûr cette méthode reste toujours la plus importante pour ce type de problème mais il peut être utile de tenter "autre chose" ."la notion de la sentinelle".

3.4 Sentinelles

3.4.1 Définitions

Soit h_0 une fonction donnée avec

$$h_0 \in L^2\left(O \times \left(0, \check{T}\right)\right)$$

Soit par ailleurs une fonction u à déterminer avec

$$u \in L^2\left(O \times \left(0, \check{T}\right)\right)$$

On considère la fonctionnelle

$$\int\int_{O\times\left(0,\check{T}\right)} \left(h_0 + u\right) y(x,t;\lambda,\tau)dxdt = S\left(\lambda,\tau\right)$$

Remarque 3.9

On se place ici dans le cadre du problème (3.1) l'observation n'est pas bruitée.□

Si u est connue, on a accès à

$$\begin{aligned} S_{obs}\left(\lambda,\tau\right) &= \int\int_{O\times\left(0,\check{T}\right)} \left(h_0 + u\right) y_{obs}(x,t;\lambda,\tau)dxdt \\ &= \int\int_{O\times\left(0,\check{T}\right)} \left(h_0 + u\right) m_0(x,t)dxdt \end{aligned}$$

On dira que la fonctionnelle $S\left(\lambda,\tau\right)$ est une sentinelle définie par h_0 si les conditions suivantes ont lieu

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau) \mid_{\lambda=0, \tau=0} = 0, \forall \widehat{y}_0 \tag{3.7}$$

Et

$$\|u\|_{L^2\left(O\times\left(0,\check{T}\right)\right)} = \min \|\varphi\|_{L^2\left(O\times\left(0,\check{T}\right)\right)} \text{ vérifiant } (3.7) \tag{3.8}$$

Remarque 3.10

En fait, h_0 étant donnée, les conditions (3.7) (3.8) définissent u de manière unique. On dira alors que S est la sentinelle définie par h_0.□

Remarque 3.11

La condition (3.7) est naturelle. Elle exprime que la sentinelle n'est pas affectée (au premier ordre !) par l'absence d'informations sur les termes manquants.□

Remarque 3.12

Si la fonction h_0 vérifie

$$\left| \begin{array}{l} h_0 \geq 0 \\ \int\int_{O\times\left(0,\check{T}\right)} h_0 dxdt = 1 \end{array} \right.$$

Alors

$$\int\int_{O\times\left(0,\check{T}\right)} h_0 y(x,t;\lambda,\tau) dxdt$$

Est une moyenne. La condition (3.8) exprime que la sentinelle est aussi proche que possible d'une moyenne.

Plus généralement, h_0 est à notre disposition. La condition (3.8) exprime que l'on "s'éloigne le moins possible" (au sens L^2) de h_0.□

Remarque 3.13

La remarque présentée est formelle mais fondamentale.

Désignons par y_0 la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t} y_0(t) + A y_0(t) & = & f(t) & \text{dans } Q \\ y_0(0) & = & y_0 & \text{dans } \Omega \\ y_0 & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \tag{3.9}$$

On suppose que l'on peut calculer cette solution y_0, alors (si u est calculée)

$$S(0,0) = \int_0^{\check{T}} \int_O (h_0 + u)\, y_0(x,t) dx dt$$

est connu.

On a

$$S(\lambda, \tau) \approx S(0,0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) + \tau \frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0)$$

Et

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) \approx \int_0^{\check{T}} \int_O (h_0 + u)\, y_\lambda(x,t) dx dt$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) \approx \int_0^{\check{T}} \int_O (h_0 + u)\, y_\tau(x,t) dx dt$$

Et $y_\lambda(x,t)$ est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t} y_\lambda(t) + A y_\lambda(t) & = & \widehat{f}(t) & \text{dans } Q \\ y_\lambda(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ y_\lambda(t) & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Et $y_\tau(x,t)$ est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t} y_\tau(t) + A y_\tau(t) & = & 0 & \text{dans } Q \\ y_\tau(0) & = & \widehat{y}_0 & \text{dans } \Omega \\ y_\tau(t) & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \tag{3.11}$$

Pour définir la sentinelle, on doit déterminer u qui assure les condition (3.7) (3.8).

3.4.2 Orientation

On va maintenant montrer comment, h_0 donnée, on peut construire l'unique fonction u telle que l'on ait (3.7) (3.8).

3.5 Etat Adjoint

3.5.1 La condition d'insensibilité

On suppose que l'on peut calculer $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ pour $\lambda = 0, \tau = 0$.

Sous réserve de vérification qui d'erra être faite dans chaque cas particulier, $\frac{\partial y}{\partial \tau} = y_\tau$ est donnée par (3.11).

Alors

$$\int_0^{\check{T}} \int_O (h_0 + u)\, y_\tau(x,t)dxdt \approx \frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0 \tag{3.12}$$

D'après (3.7).

Condition qui doit avoir lieu pour tout $\widehat{y}_0$ dans la boule unité de l'espace des conditions initiales.

On va désormais supposer que

$$y_0, \widehat{y}_0 \in L^2(\Omega)$$

On transforme maintenant (3.12) par introduire (classique) de l'état adjoint.$\square$

3.5.2 L'état adjoint

Soit A^* l'opérateur adjoint de A (obtenue donc en remplaçant a_{ij} par a_{ji}).

On définit $q = q(x,t)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\frac{\partial}{\partial t}q(t) + A^* q(t) & = & \chi_O (h_0 + u)(t) & \text{dans } Q \\ q(T) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ q(t) & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{array}\right. \tag{3.13}$$

Dans $(3.13)\,, \chi_O =$ fonction caractéristique de O défini par

$$\chi_O(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in O \\ 0 & \text{si } x \notin O \end{array}\right.$$

Nous reviendrons là dessus. Cette fonction q dépend de u qui est déterminé.

Si maintenant on multiplie (3.13) par y_τ, on obtient après intégrations par parties

$$\int_0^{\check{T}} \int_O (h_0 + u)\, y_\tau(x,t)dxdt = (q(0), \widehat{y}_0)$$

Où

$$(q(0), \widehat{y}_0) = \int_\Omega q(x,0) y_\tau(x,0)\, dx$$

Par conséquent, la condition (3.7) (ou (3.12)) équivaut à

$$q(0) = 0 \tag{3.14}$$

Le problème donc maintenant de trouver u dans

$$U = L^2\left(O \times \left(0, \check{T}\right)\right)$$

Telle que l'on ait (3.14) et (3.7).

Cela est un problème de type contrôlabilité.

3.6 Construction de la sentinelle

3.6.1 Equivalence à un problème de contrôlabilité

On cherche donc u tel que si $q = q\,(x,t;u)$ est la solution de (3.13) on ait

$$\left| \begin{array}{l} q(0,u) = 0 \\ \|u\|_{L^2} = \min \end{array} \right.$$

(Où on a écrit L^2 pour $L^2\left(O \times \left(0, \check{T}\right)\right)$.

Remarque 3.14

♦ Il faudra vérifier ensuite que la solution n'est pas donnée par $h_0 + u \equiv 0$ sinon la sentinelle est nulle et ne saurait donner aucune information ...

♦ Pour que les conditions (3.7) et (3.8) soient satisfaites il suffit qu'il existe une fonction $u \in U$ telle que

$$(q(0), \widehat{y}_0) = 0$$

Pour cela on décompose le système (3.13) en deux systèmes

$$\left| \begin{array}{rcll} -\frac{\partial}{\partial t} q_0\,(t) + A^* q_0(t) & = & \chi_O h_0(t) & \text{dans } Q \\ q_0\left(\check{T}\right) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ q_0\,(t) & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \tag{3.15}$$

Et

$$\left| \begin{array}{rcll} -\frac{\partial}{\partial t} z\,(t) + A^* z(t) & = & \chi_O u(t) & \text{dans } Q \\ z\left(\check{T}\right) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ z\,(t) & = & 0 & \text{sur } \ \Sigma \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Donc $q = q\,(h_0) = q_0 + z$ telle que q_0 est donc donnée.

Alors on cherche u de façon que $z = z\,(u)$ qui vérifie

$$\left| \begin{array}{l} z\,(0, u) = -q_0\,(0) \\ \|u\|_{L^2} = \min \end{array} \right. \tag{3.17}$$

Si l'on considère ici que

$$\left| \begin{array}{ll} u = & \text{fonction de contrôle.} \\ z = z(u) = & \text{état d'un (nouveau) système.} \end{array} \right.$$

Alors (3.17) est un problème de contrôlabilité, on cherche u qui conduise l'état de 0 (à l'instant initial $t = \check{T}$) jusqu'à $-q_0\,(0)$ (à l'instant final $t = 0$) et ceci avec une "dépense" minimum pour u, au sens

$$\|u\|_{L^2} = \min$$

♦ Déterminer la sentinelle régionale revient à étudier la contrôlabilité régionale du système (3.15).

3.6.2 Utilisation de la contrôlabilité régionale

Soit $q_0\,(0) \in L^2\,(\Omega)$ l'état désiré. Donnée par la résolution du système (3.15).

Le problème de la contrôlabilité régionale consiste à trouver un contrôle u de l'espace de contrôle $U = L^2\left(O \times \left(0, \check{T}\right)\right)$ permettant de ramener en un temps fini, l'état $z\,(t)$ du système (3.16) d'un état initial $z\left(\check{T}\right) = 0$, à un état final désiré $-q_0\,(0)$ sur $\omega = \Omega \backslash O$.

Théorème 3.1

Si le système (3.16) est régionalement contrôlable. Alors il existe une fonction $u \in U$ qui vérifie (3.7) et (3.8).

Preuve

Si le système (3.16) est régionalement contrôlable sur ω alors pour $q_0\,(0)$ est donné dans $L^2\,(\omega)$, il existe $u \in U$ de la norme minimal tel que

$$\int_{\Omega} q(x,0)\widehat{y_0}dx = 0$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) &= \int_0^{\check{T}} \int_O (h_0 + u)\, y_\tau(x,t)dxdt \\
&= (q(0), \widehat{y_0}) = 0
\end{aligned}$$

Ce qui preuve (3.7) (3.8).□

Dans ce qui suit nous appliquons le résultat précédent pour estimer le terme de pollution du système (3.10).

3.6.3 Estimation du terme de pollution

Théorème 3.2

Puisque le système (3.16) est régionalement contrôlable dans $L^2(\omega)$ alors on a

$$\lambda \int_0^{\check{T}} \int_O q\widehat{f}dxdt = \int_0^{\check{T}} \int_O (h_0 + u)\left(y_m(x,t) - y_0(x,t)\right) dxdt$$

Où $y_0(x,t)$ est la solution de (3.9) et $y_m(x,t)$ est l'état observé sur O pendant l'intervalle du temps $\left(0, \check{T}\right)$.

Preuve

Soit $S(\lambda, \tau)$ la sentinelle définie par h_0 de les équations (3.10) et (3.13), on déduit

$$\begin{aligned}
\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) &= \lambda \int_0^{\check{T}} \int_O (h_0 + u)\, y_\lambda(x,t)dxdt \\
&= S(\lambda, \tau) - S(0,0) - \tau \frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0)
\end{aligned}$$

Et sur l'observatoire O on pose $y = y_m$ alors on a

$$S(\lambda, \tau) = S_m(\lambda, \tau)$$

D'une part on a

$$\lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0)=\int_0^{\check{T}}\int_O(h_0+u)(m_0-y_0)\,dxdt$$

Mais

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0)=\int_0^{\check{T}}\int_O(h_0+u)\,y_\lambda(x,t)dxdt$$

Où $y_\lambda(x,t)$ est la solution de (3.10), on multiplie (3.13) par y_λ, on obtient alors

$$\begin{aligned}\lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) &= \int_0^{\check{T}}\int_O q\lambda\widehat{f}dxdt=\left\langle q,\lambda\widehat{f}\right\rangle\\ &= \lambda\int_0^{\check{T}}\int_O(h_0+u)\,y_\lambda(x,t)dxdt\end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^{\check{T}}\int_O(h_0+u)\,y_\lambda(x,t)dxdt=\int_0^{\check{T}}\int_O q\widehat{f}dxdt$$

Et d'autre part on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial\tau}(0,0) &= \int_0^{\check{T}}\int_O(h_0+u)\,y_\tau(x,t)dxdt\\ &= (q(0),\widehat{y}_0)=0\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned}\lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) &= S(\lambda,\tau)-S(0,0)\\ &= \int_0^{\check{T}}\int_O(h_0+u)\left(y_m(x,t)-y_0(x,t)\right)dxdt\\ &= \int_0^{\check{T}}\int_O q\lambda\widehat{f}dxdt\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\left\langle q(h_0),\lambda\widehat{f}\right\rangle=\int_0^{\check{T}}\int_O(h_0+u)(m_0-y_0)\,dxdt$$

D'où le résultat du théorème.□

Chapitre 4

Identification d'une partie de la frontière inconnue d'une membrane

4.1 Introduction

Nous appliquons la méthode de sentinelle à l'identification d'une frontière inconnue comme elle est présentée par O. Bodart (voir [4]). La méthode des sentinelles fournit une implantation facile de la méthode des moindres carrés à laquelle elle est équivalente.

Elle fut introduite par J.L.Lions pour la détection de perturbations au second membre d'équations de diffusion-rèaction.

Dans ce travail, nous intéressons au cas où l'on observe partiellement la solution d'une équation parabolique définie dans un domaine dont une partie de la frontière est inconnue.

La technique des sentinelles étant locale, nous introduisons des sentinelles non linéaires pour les adapter à notre problème, et nous appliquons la méthode à l'identification de la frontière.

Cette méthode est constructive :

Nous fabriquons une suite de frontières approchées dont nous démontrons qu'elle converge localement vers la frontière à identifier.

Le but de la méthode présentée ici est d'estimer la forme d'une partie inconnue de la frontière d'un domaine. L'interprétation physique peut être la suivante, le domaine peut représenter un corps physique dans $\mathbb{R}^2$. La forme d'un côté de ce corps est connue et réglée à une température donnée, mais la forme de l'autre côté doit être estimée en mesurant la température distribuée au milieu du corps.

Un champ relatif intéressant de recherche traite "des problèmes libres de frontière" par exemple le problème de l'identification d'une frontière se déplaçant à chaque étape de temps (frontière mobile).

Résultats peuvent être prolongés à l'identification d'une partie de la frontière en mesurant un flux de la chaleur dans une autre partie le domaine. Ceci peut être une manière de résoudre le "problème de Stefan" (voir [6]).

En conclusion, des problèmes traitant l'identification de frontière est liée avec l'optimisation de forme. Le but industriel peut être l'optimisation de la forme d'un côté d'un objet tels que cet objet atteint une température distribuée donnée dans l'intérieur, alors que la température est placée sur l'autre côté.

Un tel problème peut être résolu avec la méthode que nous allons présenté.□

4.2 Nouvelle méthode de la sentinelle

4.2.1 Définitions

Nous définissons maintenant la méthode de sentinelle comme elle est présentée par J.L.Lions (voir [13]).

On Considère un système physique dépendant une certain vecteur de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Et pour fixer les idées, considérons l'observatoire $O \subset \Omega$.

Soit $y\left(x,t;\alpha\right) = y\left(\alpha\right)$ l'état correspondant à une vecteur de paramètre α. On écrit cela formellement $y\left(\alpha\right)$ pour simplifier l'écriture.

On suppose que y_{obs} l'état observé sur $O \times \left(0, \check{T}\right)$, et on a donc

$$y_{obs} = y\left(\alpha\right) \quad \text{sur} \quad O \times \left(0, \check{T}\right)$$

C'est-à-dire il n'y a aucun bruit (l'observation est donnée sans bruits)

J.L.Lions appelle la "sentinelle", c'est un fonctionnel noté par $S\left(.\right)$ qui est le produit scalaire de l'état observé y_{obs} par la fonction de contrôle u. il est construit pour obtenir des informations sur les valeurs des paramètres $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

La fonction $y(x,t;\alpha)$ est différentiable au point α_i (voir [15]). Et on note par

$$y_{\alpha_i} = \frac{\partial y(\alpha)}{\partial \alpha_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., n$$

Il satisfait la relation linéaire

$$y(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{\alpha_i}$$

Dans la méthode des sentinelles, on va essayer d'estimer le paramètre $i_0^{ème}$ du système. Alors

$$S(\alpha) = (u, y(\alpha)) = \alpha_{i_0}$$

C'est-à-dire

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (u, y_{\alpha_i}) = \alpha_{i_0}$$

Ce but sera réalise

$$\begin{cases} (u, y_{\alpha_i}) & = & 0 \quad \forall i \neq i_0 \\ \left(u, y_{\alpha_{i_0}}\right) & = & 1 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

• Ceci signifie que la sentinelle doit être peu sensible à tous les paramètres mais à un. Etant donné que la norme de u est minimum, telle que La fonction de contrôle u est unique (s'il existe).

• Par conséquent si les valeurs de tous les composants du vecteur α sont voulues, une fonction u pour chaque composant de devoir être établi. Soient u_j et S_j être respectivement la fonction de contrôle et la sentinelle associées au paramètre α_j ; alors nous avons besoin de cela :

$$(u_j, y_{\alpha_i}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ \text{ si } i = j \\ 0 \ \text{ si } i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Soit $S(.)$ la sentinelle définie par la fonction de contrôle u_j

$$S(\alpha) = (u_j, y(\alpha))_{j=1,\ldots,n}$$

En utilisant (4.1) on obtient que

$$
\begin{aligned}
S(\alpha) &= (u_j, y(\alpha))_{j=1,\dots,n} \\
&= \left(u_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{\alpha_i}\right)_{j=1,\dots,n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (u_j, y_{\alpha_i})_{j=1,\dots,n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} \; ; \forall j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

Alors

$$D_\alpha S = Id \tag{4.2}$$

Où Id est la matrice identité (unité). Et $D_\alpha S$ le déffférentiel de S en ce qui concerne son paramètre.

4.2.2 Orientation

Pour le reste du travail, nous prolongerons la notion des sentinelles au cas de l'identification non linéaire d'un paramètre appartenant à $l^2(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathbb{R}^n$. Et la sentinelle $S(.)$ définie par u_j donnée avec

$$S(\widetilde{\alpha}, \alpha) = (u_j(\widetilde{\alpha}), y(\alpha))_{j=1,\dots,\infty}$$

Nous avons maintenant rempli l'introduction aux sentinelles non linéaires, et exposition ensuite comment elle est utilisée dans la configuration de notre problème.

4.3 Configuration du problème

4.3.1 Déformation du domaine

Dans cette section nous définissons la déformation d'un domaine d'après J.Simon [19] [9] [18] et O.Pironneau [15].

Soit $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert avec la frontière suffisamment régulier $\partial\Omega_0 = \Gamma^* \cup \Gamma_0$, avec $\Gamma^* \cap \Gamma_0 = \phi$.

Nous définissons une déformation Ω_α du domaine Ω_0 par

$$\Omega_\alpha = \{x + \alpha(x) w(x) \ ; x \in \Omega_0\}$$

Où w est un zone transversal connu de vecteur de classe C^∞, et $\alpha(x)$ est une fonction de classe C^2 tels que Γ^* restes invariables par la déformation αw.

Ainsi la frontière de l'ensemble ouvert Ω_α, c'est-à-dire $\partial\Omega_\alpha = \Gamma^* \cup \Gamma_\alpha$ est de classe C^2 et $\Gamma^* \cap \Gamma_\alpha = \phi$.

Par conséquent Γ_α est une déformation de Γ_0 tels que

$$\Gamma_\alpha = \{x + \alpha(x) w(x) \ ; x \in \Gamma_0\}$$

4.3.2 Problème d'évolution

Soit $y = y(x, t; \alpha)$ la solution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t} y + Cy & = & 0 \quad \text{dans } Q_\alpha = \Omega_\alpha \times \left]0, \check{T}\right[\\ y & = & f \quad \text{sur } \Sigma^* = \Gamma^* \times \left]0, \check{T}\right[\\ y & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma_\alpha = \Gamma_\alpha \times \left]0, \check{T}\right[\\ y(.,0) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_\alpha \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Où $f \in L^2\left(\left]0, \check{T}\right[, H^{\frac{3}{2}}(\Gamma^*)\right)$.(voir [14]).

$$y \in L^2\left(\left]0, \check{T}\right[, H^2(\Omega_\alpha)\right) \text{ et } \frac{\partial y}{\partial \eta}\,|_\Gamma \in L^2\left(\left]0, \check{T}\right[, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right).$$

Dans (4.3), l'opérateur C donnée par

$$Cy = Ay + a_0 y$$

Telle que l'opérateur A est un opérateur différentiel elliptique du $2^{\text{ème}}$ ordre

$$Ay = -\sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(a_{nm}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_m}\right)$$

Où on adopte - ici et dans la suite la convention de sommation des indices répétés. On suppose que

$$a_0, a_{nm} \in L^\infty\left(\Omega \times \left(0, \check{T}\right)\right); a_{nm} = a_{mn}\ \forall n, m$$

(Mais on aura plus loin besoin d'hypothèses de régularité sur les a_{nm} de façon à pouvoir appliquer des théorèmes d'unicité). On suppose que A est elliptique, donc

$$\left| \begin{array}{l} a_{nm}(x,t)\,\zeta_n\zeta_m \geq \gamma\zeta_n\zeta_n; \forall\zeta_n \in \mathbb{R}, \gamma > 0 \\ \text{p.p dans } \Omega \times \left(0, \check{T}\right) \end{array} \right.$$

On considérons maintenant un sous-ensemble ouvert $O \subset \Omega_\alpha$; pour tout α et $\omega = O \times \left]0, \check{T}\right[$.

La solution y de (4.3) on suppose qui observée dans O pendant l'intervalle de temps $\left]0, \check{T}\right[$; nous appellerons cette observation y_{obs}.

Hypothèse 4.1

Pour la simplicité, on suppose qu'il existe $\overline{\alpha}$ telle que

$$y\left(x, t; \overline{\alpha}\right) = y_{obs} \quad ; \forall\left(x, t\right) \in \omega$$

Où $y\left(x, t; \overline{\alpha}\right)$ est la solution de (4.3) dans ce domaine $\Omega_{\overline{\alpha}}$.

Hypothèse 4.2

Pour estimer la forme d'une partie inconnue de la frontière d'un domaine nous fabriquons une suite $\left(\alpha^k\right)_{k=0,\ldots,\infty}$ convergent localement vers $\overline{\alpha}$ dans un certain sens, à partir d'une première conjecture α^0. Que ceci donnera une approximation de la forme de $\Gamma_{\overline{\alpha}}$. Le calcul α^{k+1} de α^k sera fait par la méthode de sentinelle [7] [13] [11].

4.4 Présentation de la méthode

Considérons la paramétrisation suivante de Γ_α :

$$\Gamma_\alpha = \left\{x(s) + \alpha(s)\, w(s); s \in [0,1], x(s) \in \Gamma_0\right\} \tag{4.4}$$

Where α is C^2 function over $[0,1]$ thus it belongs $L^2\left(\left]0,1\right[\right)$. Decomposing α over a basis of function $\left(b_j\right)_{j=1,\ldots,\infty}$ in $C^2(0,1)$, we will still denote by $\alpha \in l^2(\mathbb{R})$ the (infinite) coordinate vector of the function α in this basis.

Alors on peut écrire la formule (4.4) sous la forme

$$\Gamma_\alpha = \left\{ x(s) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j b_j(s) w(s) \quad ; s \in [0,1] \ , x(s) \in \Gamma_0 \right\} \tag{4.5}$$

Alors si $\overline{\alpha} \in l^2(\mathbb{R})$ est la paramétrisation de $\Gamma_{\overline{\alpha}}$; nous établirons un ordre $\left(\alpha^k\right)_{k=0,\dots,\infty}$ convergent à $\overline{\alpha}$ dans $l^2(\mathbb{R})$.

4.5 Construction de la sentinelle

4.5.1 Équivalence à un problème de contrôlabilité

Proposition 4.1 (définition, existence et unicité de la sentinelle).

On considère la fonctionnelle $S(\widetilde{\alpha}, \alpha)$ défini par

$$S : \left| \begin{array}{rcl} l^2(\mathbb{R}) \times l^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{R}) \\ (\widetilde{\alpha}, \alpha) & \longmapsto & S(\widetilde{\alpha}, \alpha) = \left(\int_\omega u_i(\widetilde{\alpha})\, y(\alpha) dx dt \right)_{i=1,\dots,\infty} \end{array} \right. \tag{4.6}$$

Où $y(\alpha) = y(x, t; \alpha)$ est la solution de (4.3).

On dira que la fonctionnelle $S(\widetilde{\alpha}, \alpha)$ est une sentinelle définie par $u_i(\widetilde{\alpha})$ si les conditions suivantes ont lieu

$$\left\| u_i(\widetilde{\alpha}) \right\|_{L^2(\omega)} = \min \left\| \varphi \right\|_{L^2(\omega)} ; i = 1, \dots, \infty \tag{4.7}$$

$$D_\alpha S(\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}) = Id + M \quad \forall \widehat{\alpha} \in l^2(\mathbb{R}) \tag{4.8}$$

Où Id est la matrice identité (unité) et $M \in \mathcal{L}\left(l^2(\mathbb{R})\right)$ telle que

$$\left\| (M_i) \right\|_{l^2(\mathbb{R})} = \tfrac{\varepsilon}{i} \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, \infty \tag{4.9}$$

Telle que $D_\alpha S(\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha})$ le différentiel de S en ce qui concerne son deuxième paramètre calculé au point $(\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha})$ .Et (M_i) être $i^{ème}$ la ligne du M.

Alors $S(\widetilde{\alpha}, \alpha)$ définie par (4.6) (4.7) (4.8) (4.9) existe et unique. (Cela signifie l'existence et l'unicité de la famille des fonctions $u_i(\widetilde{\alpha})_{i=1,\dots,\infty}$).

Preuve de la proposition 4.1

Il prendra trois étapes

1 ▶ les conditions (4.7) (4.8) seront récrites dans un problème de contrôle.

2 ▶ un résultat de contrôlabilité approximative sera prouvé.

3 ▶ par un processus convexe de dualité une contrôle remplissant les conditions (4.7) (4.8) est montrée.

Première étape

La fonction $y(x,t;\widetilde{\alpha})$ est différentiable au point α_j (voir [15]), et nous noterons

$$y_{\alpha_j} = \frac{\partial y(\widetilde{\alpha})}{\partial \alpha_j} \quad \text{pour} \quad j = 1, ..., \infty$$

Désignons par y_{α_j} la solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t} y_{\alpha_j} + C y_{\alpha_j} & = & 0 & \text{dans } Q_{\widetilde{\alpha}} = \Omega_{\widetilde{\alpha}} \times \left]0, \check{T}\right[\\ y_{\alpha_j} & = & 0 & \text{sur } \Sigma^* = \Gamma^* \times \left]0, \check{T}\right[\\ y_{\alpha_j} & = & -b_j \left(\nabla y\left(\widetilde{\alpha}\right).w\right) & \text{sur } \Sigma_{\widetilde{\alpha}} = \Gamma_{\widetilde{\alpha}} \times \left]0, \check{T}\right[\\ y_{\alpha_j}(.,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_{\widetilde{\alpha}} \end{array}\right. \tag{4.10}$$

Où $y\left(\widetilde{\alpha}\right) = y(x,t;\widetilde{\alpha})$ est la solution de (4.3).

L'élément général de la matrice infinie $D_\alpha S\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}\right)$ donnée par

$$\left(D_\alpha S\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}\right)\right)_{ij} = \int_\omega u_i\left(\widetilde{\alpha}\right) y_{\alpha_j} dxdt \tag{4.11}$$

D'après la condition (4.8) et pour "i" fixé on a

$$\int_\omega u_i\left(\widetilde{\alpha}\right) y_{\alpha_j} dxdt = \delta_{ij} + (M)_{ij} \quad j = 1, ..., \infty \tag{4.12}$$

Où la matrice M est définie comme (4.9).

Soit $q_i \in L^2\left(\left]0, \check{T}\right[; H_0^1\left(\Omega_{\widetilde{\alpha}}\right) \cap H^2\left(\Omega_{\widetilde{\alpha}}\right)\right)$ est la solution du problème adjoint suivant

$$\left|\begin{array}{rcll} \frac{-\partial}{\partial t} q_i + C q_i & = & u_i\left(\widetilde{\alpha}\right)|_\omega & \text{dans } Q_{\widetilde{\alpha}} \\ q_i & = & 0 & \text{sur } \Sigma_{\widetilde{\alpha}} \\ q_i\left(., \check{T}\right) & = & 0 & \text{dans } \Omega_{\widetilde{\alpha}} \end{array}\right. \tag{4.13}$$

En multipliant l'équation (4.13) par y_{α_j} et en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\omega} u_i(\widetilde{\alpha})\, y_{\alpha_j} dxdt = \int_{\Sigma_{\widetilde{\alpha}}} b_j \left(\nabla y(\widetilde{\alpha}) .w\right) \frac{\partial q_i}{\partial \eta} d\Sigma \tag{4.14}$$

Où

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \sum_{n,m=1}^{k} a_{nm} \frac{\partial}{\partial x_m} \eta_m$$

On définit maintenant un opérateur linéaire continu

$$B \in \mathcal{L}\left(L^2(\omega), l^2(\mathbb{R})\right)$$

Par

$$B : \left| \begin{array}{ccc} L^2(\omega) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{R}) \\ u_i(\widetilde{\alpha}) & \longmapsto & \left(Bu_i(\widetilde{\alpha})\right)_j = \left(\int_{\Sigma_{\widetilde{\alpha}}} b_j \left(\nabla y(\widetilde{\alpha}) .w\right) \frac{\partial q_i}{\partial \eta} d\,\Sigma\right)_{j=1,\ldots,\infty} \end{array} \right.$$

Après l'équation (4.14) et (4.11) on peut écrire

$$\begin{aligned} \left(D_\alpha S(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha})\right)_{ij} &= \int_{\omega} u_i(\widetilde{\alpha})\, y_{\alpha_j} dxdt \\ &= \left(\int_{\Sigma_{\widetilde{\alpha}}} b_j \left(\nabla y(\widetilde{\alpha}) .w\right) \frac{\partial q_i}{\partial \eta} d\,\Sigma\right)_{j=1,\ldots,\infty} \\ &= \left(Bu_i(\widetilde{\alpha})\right)_{j=1,\ldots,\infty} \end{aligned}$$

Alors

$$\left(D_\alpha S(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha})\right)_{ij} = \left(Bu_i(\widetilde{\alpha})\right)_j \tag{4.15}$$

C'est un problème de contrôle ; c'est-à-dire trouver $u_i(\widetilde{\alpha}) \in L^2(\omega)$ de la norme minimal tels que $Bu_i(\widetilde{\alpha}) = z$ avec $z \in l^2(\mathbb{R})$.

Mais c'est un type du problème de contrôlabilité exacte ; et ce que pouvons réaliser la contrôlabilité approximative, qui est suffisante pour l'application numérique.□

Deuxième étape

On va montrer que $\overline{\mathrm{Im}(B)} = l^2(\mathbb{R})$ (on peut montrer que B^* "adjoint de B" est injective).

C'est-à-dire $\ker(B^*) = \{0\}$.

L'opérateur adjoint $B^* \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{R}), L^2(\omega))$ est donnée par

$$B^* : \left| \begin{array}{rcl} l^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\omega) \\ (\sigma_j)_{j=1,\ldots,\infty} & \longmapsto & B^*(\sigma_j) = \Phi\mid_\omega = \chi_\omega \Phi \end{array} \right.$$

Où Φ la solution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t}\Phi + C\Phi & = & 0 & \text{dans } Q_{\widetilde{\alpha}} \\ \Phi & = & 0 & \text{sur } \Sigma^* \\ \Phi & = & -\left(\nabla y(\widetilde{\alpha}).w\right) \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j b_j & \text{sur } \Sigma_{\widetilde{\alpha}} \\ \Phi(.,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_{\widetilde{\alpha}} \end{array} \right. \tag{4.16}$$

En effet d'après (4.16) on a

$$\begin{aligned} (u,\Phi)_{L^2(\omega)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \int_{\Sigma_{\widetilde{\alpha}}} b_j \left(\nabla y(\widetilde{\alpha}).w\right) \frac{\partial q_i}{\partial \eta} d\,\Sigma \\ &= (\sigma, Bu)_{l^2(\mathbb{R})} = (B^*\sigma, u)_{L^2(\omega)} \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\Phi\mid_\omega = B^*\sigma$$

On Suppose maintenant que $B^*\sigma = \Phi\mid_\omega = 0$.C'est-à-dire $\Phi = 0$ dans ω.

Alors d'après le théorème de Saut et Scheurer (voir [17]) on a

$$\Phi = 0 \Leftrightarrow \left(\nabla y(\widetilde{\alpha}).w\right) \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j b_j = 0$$

Puisque $(b_j)_{j=1,\ldots,\infty}$ est une base de $l^2(\mathbb{R})$, alors

$$\{\nabla y(\widetilde{\alpha}).w = 0\} \text{ ou } \{\sigma_j = 0\ , j = 1,\ldots,\infty\}$$

On va décomposé la zone w sur la normale et des vecteurs de tangente $\nu_{\widetilde{\alpha}}$ et $\tau_{\widetilde{\alpha}}$ sur $\Gamma_{\widetilde{\alpha}}$ que nous avons

$$\nabla y(\widetilde{\alpha}).w(x) = \nabla y(\widetilde{\alpha}).(a\nu_{\widetilde{\alpha}}(x)) + \nabla y(\widetilde{\alpha}).(b\tau_{\widetilde{\alpha}}(x))\,;\forall x \in \Gamma_{\widetilde{\alpha}}$$

Puisque $y(\widetilde{\alpha}) = 0$ sur $\Gamma_{\widetilde{\alpha}}$ alors on a

$$\nabla y(\widetilde{\alpha}) .w(x) = \nabla y(\widetilde{\alpha}) . (a\nu_{\widetilde{\alpha}}(x)) = a. \frac{\partial y(\widetilde{\alpha})}{\partial \nu_{\widetilde{\alpha}}}(x) ; \forall x \in \Gamma_{\widetilde{\alpha}}$$

D'après l'unicité de Cauchy on a

$$\frac{\partial y(\widetilde{\alpha})}{\partial \nu_{\widetilde{\alpha}}} \neq 0 \text{ sinon } y(\widetilde{\alpha}) = 0 \text{ dans } Q_{\widetilde{\alpha}}.$$

Donc

$$\nabla y(\widetilde{\alpha}) .w \neq 0 \text{ alors } \{\sigma_j = 0 \ , \forall j = 1, ..., \infty\}$$

Alors on déduit que B^* est injective.□

$\ker(B^*) = \{0\}$ équivaut à $\overline{\mathrm{Im}(B)} = l^2(\mathbb{R})$ C'est-à-dire

$$\forall \rho > 0, \forall z \in l^2(\mathbb{R}), \exists u_i(\widetilde{\alpha}) \in L^2(\omega) ; \|Bu_i(\widetilde{\alpha}) - z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho. \tag{4.17}$$

Troisième étape

Pour construire $u_i(\widetilde{\alpha})$ comme fonction de la norme minimal satisfaisant (4.17), qui sera fait par la méthode de dualité de Fenchel- Rockafellar

Soit

$$u_{ad} = \left\{ u \in L^2(\omega) \text{ telle que } \|Bu - z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho, z \in l^2(\mathbb{R}) \right\}$$

D'après (4.17) u_{ad} est un ensemble admissible (non vide + convexe + fermé) dans $L^2(\omega)$. Ainsi il existe $u_i(\widetilde{\alpha})$ unique satisfaisant (4.7) et solution du problème de minimisation suivant

$$\min_{u \in u_{ad}} \frac{1}{2} \|u\|^2_{L^2(\omega)} \tag{4.18}$$

Soit F et G deux fonctions définies par

$$F(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2_{L^2(\omega)} \text{ et } G(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\mu - z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut écrire la formule (4.18) sous la forme

$$\min_{u\in L^2(\omega)} F(u) + G(Bu)$$

On appliquant le théorème de dualité de Fenchel-Rockafellar (voir [10]). On obtient

$$u_i(\widetilde{\alpha}) = B^*\sigma^* \tag{4.19}$$

Où σ^* est la solution du problème dual de minimisation suivant

$$\min_{\sigma\in l^2(\mathbb{R})} F^*(B^*\sigma) + G^*(-\sigma) \tag{4.20}$$

Avec F^* et G^* étant les conjugues de Fenchel de F et G.

Telle que $F^* = F$ et G^* définie par

$$\begin{aligned} G^*(\sigma) &= \sup_{\mu\in l^2(\mathbb{R})} (\mu,\sigma) - G(\mu) \\ &= \sup_{\mu\in \overline{B}(0,\rho)} (z+\mu,\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \\ &= (z,\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} + \rho\,\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Où $\overline{B(0,\rho)}$ boule fermé du centre 0 et du rayon ρ.

Alors la formule (4.20) devient

$$\min_{\sigma\in l^2(\mathbb{R})} J(\sigma) = F(\Phi) + \rho\,\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})} - (z,\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \tag{4.21}$$

Où Φ est la solution de (4.16).□

Lemme 4.1

$\sigma^* = 0$ est la solution de (4.21) si et seulement si $\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$.

Preuve

Puisque $\sigma^* = 0$, alors d'après (4.19) on a $u_i(\widetilde{\alpha}) = 0$ et

$$Bu_i(\widetilde{\alpha}) - z = -z$$

Donc

$$\|Bu_i(\widetilde{\alpha}) - z\|_{l^2(\mathbb{R})} = \|z\|_{l^2(\mathbb{R})}$$

D'après (4.17) on a

$$\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho.\square$$

Si $\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$ alors d'après (4.17) on a

$$u_i(\widetilde{\alpha}) = 0$$

Appartient à u_{ad}.

$u_i(\widetilde{\alpha}) = 0$ est alors la solution de (4.18). Puisque B^* est injective l'équation (4.19) fournit ce $\sigma^* = 0.\square$

Pour $\sigma^* \neq 0$ Alors on suppose que

$$\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} > \rho.$$

Quel-que soit $\delta\sigma \in l^2(\mathbb{R})$ et $\sigma \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial J}{\partial \sigma}, \delta\sigma\right)_{l^2(\mathbb{R})} &= (B^*\sigma, B^*\delta\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} + \rho\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})}}, \delta\sigma\right) - (z, \delta\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \\
&= \left(BB^*\sigma + \rho\frac{\sigma}{\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})}} - z, \delta\sigma\right)_{l^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Alors en particulier pour $\sigma = \sigma^*$on a

$$BB^*\sigma^* + \rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} - z = 0$$

Alors

$$BB^*\sigma^* - z = -\rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} \tag{4.22}$$

Puisque $u_i(\widetilde{\alpha}) = B^*\sigma^*$ alors on a

$$Bu_i(\widetilde{\alpha}) - z = -\rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}$$

Donc

$$\|Bu_i(\widetilde{\alpha}) - z\| = \rho$$

Choix $(z)_j = \delta_{ij}$; $j = 1, ..., \infty$

Où $(z)_j$ est la coordonnée générique de z sur la base canonique de $l^2(\mathbb{R})$ et

$$\rho = \frac{\varepsilon}{i} \text{ ; telle que } \varepsilon > 0 \text{ suffisamment petits}$$

D'après (4.22)

$$BB^*\sigma^* - z = -\rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}$$

Puisque $\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} > \rho$ alors on a

$$BB^*\sigma^* = z - \rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} \Leftrightarrow Bu_i(\widetilde{\alpha}) = z - \rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}$$

Donc

$$(Bu_i(\widetilde{\alpha}))_j = (z)_j - \rho\frac{(\sigma^*)_j}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} = \delta_{ij} - \frac{\varepsilon}{i}\frac{(\sigma^*)_j}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}; j = 1, ..., \infty \tag{4.23}$$

Et combinant (4.23) par (4.15) nous obtenons (4.8)

$$(Bu_i(\widetilde{\alpha}))_j = (D_\alpha S(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}))_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\varepsilon}{i}\frac{(\sigma^*)_j}{\|\sigma^*\|}$$

Alors

$$D_\alpha S(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}) = Id + M; \forall\widetilde{\alpha} \in l^2(\mathbb{R}).$$

Donc on a la démonstration de l'existence et l'unicité d'une famille des fonctions $u_i(\widetilde{\alpha})$ pour $i = 1, ..., \infty$ solution (4.7) (4.8).□

4.5.2 Identification d'une partie de la frontière inconnue

Pour $\widetilde{\alpha}$ fixe, $S_{\widetilde{\alpha}}(\alpha) = S(\widetilde{\alpha}, \alpha)$ est une sentinelle au sens J.L.Lions (voir [13]). En effet

$$S_{\widetilde{\alpha}}(\alpha) = S(\widetilde{\alpha}, \alpha) \approx S(\widetilde{\alpha}, 0) + \alpha D_\alpha S(\widetilde{\alpha}, 0)$$

Nous construirons maintenant l'arrangement itératif pour la résolution du problème présenté dans la section précédente.

Différencier $S(\widetilde{\alpha}, \alpha)$ en ce qui concerne α au point $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha})$ on obtient

$$S(\widetilde{\alpha}, \alpha) \approx S(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}) + (\alpha - \widetilde{\alpha}) D_\alpha S(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}) + o(|\alpha - \widetilde{\alpha}|)$$

Et en particulier pour $\alpha = \overline{\alpha}$ on a

$$S(\widetilde{\alpha}, \overline{\alpha}) \approx S(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}) + (\overline{\alpha} - \widetilde{\alpha}) D_\alpha S(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}) + o(|\overline{\alpha} - \widetilde{\alpha}|)$$

D'après (4.8) on obtient

$$S(\widetilde{\alpha}, \overline{\alpha}) \approx S(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}) + \overline{\alpha} - \widetilde{\alpha} + M(\overline{\alpha} - \widetilde{\alpha}) + o(|\overline{\alpha} - \widetilde{\alpha}|)$$

Cela suggère les itérations suivantes

$$S\left(\alpha^k, \overline{\alpha}\right) \approx S\left(\alpha^k, \alpha^k\right) + \overline{\alpha} - \alpha^k + M\left(\overline{\alpha} - \alpha^k\right) + o\left(\left|\overline{\alpha} - \alpha^k\right|\right)$$

Alors

$$S\left(\alpha^k, \overline{\alpha}\right) + \alpha^k - S\left(\alpha^k, \alpha^k\right) \approx \overline{\alpha} + M\left(\overline{\alpha} - \alpha^k\right) + o\left(\left|\overline{\alpha} - \alpha^k\right|\right)$$

On pose

$$\alpha^{k+1} = S\left(\alpha^k, \overline{\alpha}\right) + \alpha^k - S\left(\alpha^k, \alpha^k\right) \tag{4.24}$$

Telle que

$$S\left(\alpha^k, \overline{\alpha}\right) = \left(\int_\omega u_i\left(\alpha^k\right) y_{obs} dxdt\right)_{i=1,\ldots,\infty} \tag{4.25}$$

$$S\left(\alpha^k, \alpha^k\right) = \left(\int_\omega u_i\left(\alpha^k\right) y(\alpha^k) dxdt\right)_{i=1,\ldots,\infty} \tag{4.26}$$

Où $y(\alpha^k) = y\left(x, t; \alpha^k\right)$ est la solution de (4.3).

Nous pouvons maintenant étudier la convergence de notre schéma.

D'après le théorème

Théorème 4.1

La suite $\left(\alpha^k\right)_{k=0,\ldots,\infty}$

$$\left|\begin{array}{l}\alpha^0 \in l^2\left(\mathbb{R}\right) \text{ donnée comme une première conjecture} \\ \alpha^{k+1}=\alpha^k+S\left(\alpha^k,\overline{\alpha}\right)-S\left(\alpha^k,\alpha^k\right)\end{array}\right. \tag{4.27}$$

Converge vers $\overline{\alpha}$ dans $l^2\left(\mathbb{R}\right)$.

Preuve

Le schéma numérique (4.27) peut être regardé comme méthode pour résoudre un problème de point fixe

$$\left|\begin{array}{l}\alpha^0 \in l^2\left(\mathbb{R}\right) \\ \alpha^{k+1}=\alpha^k+S\left(\alpha^k,\overline{\alpha}\right)-S\left(\alpha^k,\alpha^k\right)\end{array}\right.$$

On pose

$$g\left(\alpha^k\right)=\alpha^k+S\left(\alpha^k,\overline{\alpha}\right)-S\left(\alpha^k,\alpha^k\right)$$

Alors

$$\alpha^{k+1}=g\left(\alpha^k\right)$$

Où g est un opérateur traçant de $l^2\left(\mathbb{R}\right)$ à lui même et défini comme (4.6) (4.27) et (4.25).

On va calculer $g'\left(\mu\right)$ pour $\mu \in l^2\left(\mathbb{R}\right)$; on a

$$g\left(\mu\right)=\mu+S\left(\mu,\overline{\alpha}\right)-S\left(\mu,\mu\right)$$

Alors

$$g'\left(\mu\right)=Id+D_{\overline{\alpha}}S\left(\mu,\overline{\alpha}\right)-D_{\overline{\alpha}}S\left(\mu,\mu\right)-D_{\alpha}S\left(\mu,\mu\right)$$

Avec tous les dérivées étant justifiées, alors en particulier pour $\mu=\overline{\alpha}$ on a

$$g'\left(\overline{\alpha}\right)=Id+D_{\overline{\alpha}}S\left(\overline{\alpha},\overline{\alpha}\right)-D_{\overline{\alpha}}S\left(\overline{\alpha},\overline{\alpha}\right)-D_{\alpha}S\left(\overline{\alpha},\overline{\alpha}\right)$$

Donc

$$g'(\overline{\alpha}) = Id - D_\alpha S(\overline{\alpha}, \overline{\alpha})$$

Donc

$$D_\alpha S(\overline{\alpha}, \overline{\alpha}) = Id - g'(\overline{\alpha})$$

Alors d'après (4.8) (dans proposition (4.1)) on a

$$Id + M = Id - g'(\overline{\alpha})$$

Alors

$$g'(\overline{\alpha}) = -M$$

Où

$$M \in \mathcal{L}\left(l^2(\mathbb{R})\right) \quad \text{telle que } \|(M_i)\| = \frac{\varepsilon}{i}; i = 1, ..., \infty$$

Maintenant calculons la norme de Hilbert-Schmidt de $g'(\overline{\alpha})$

$$\begin{aligned} \|g'(\overline{\alpha})\|_{HS}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(g'(\overline{\alpha})\right)_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(g'(\overline{\alpha})\right)_{ij}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\|M_i\|_{l^2(\mathbb{R})}^2 = \varepsilon^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} \end{aligned} \tag{4.28}$$

La valeur de la série (4.28) peut être placée en choisissant une valeur appropriée pour ε.

Notamment que nous pouvons prendre à ε tels que

$$\|g'(\overline{\alpha})\|_{HS} < 1$$

Alors le processus (4.27) d'itérations est localement convergent dans $l^2(\mathbb{R})$.□

C'est-à-dire la suite $\left(\alpha^k\right)_{k=0,...,\infty}$ convergent localement vers $\overline{\alpha}$ dans un certain sens, à partir d'une première conjecture α^0. que ceci donnera une approximation de la forme de $\Gamma_{\overline{\alpha}}$ telle que $\Gamma_{\overline{\alpha}}$ la forme d'une partie inconnue de la frontière d'un domaine.

Conclusion générale

En ce thème nous avons présenté une méthode efficace pour identifier une partie inconnue de la frontière d'un domaine pour l'équation de la chaleur. Nous avons formulé le problème comme Jacques Simon (voir [18]) et nous proposons une nouvelle méthode de d'identification.

La théorie utilisée pour l'identification a besoin de la méthode de Sentinelles développée par Lions [13] Kernévez [11] et Bodart [7]. Et en conclusion, nous avons obtenu un résultat local de convergence pour le schéma numérique itératif identifiant la frontière inconnue.

Bibliographie

[1] A. Ayadi, M. Djebarni ; *pollution terms estimation in parabolic system with incomplete data ; far east Math. Sci. (FJMS), Pushpa Publishing House 2005.*

[2] A. Ayadi A. Berahail ; *Système parabolique F-contrôlable et les actionneurs frontières, Sci : Tech. A-N°22, 2004, pp 13-16, univ Mentouri Constantine.*

[3] Ali Boutoulout ; *Contrôlabilité régionale, Cible frontière et contrôlabilité du gradient dans les systèmes distribues. Thèse de doctorat, L'université Moulay Ismail 2000.*

[4] O. Bodart, Pierre. Demeestère. *Sentinels for the identification of an unknown boundary. M3AS, 7(6), pp. 871-885. Université de Technologie de Compiègne (France), 1997.*

[5] B. E. Ainseba. *Sentinelles et contrôlabilité exacte. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 1992.*

[6] C. Benard, B. Guerrier, H.G. Liu, and Wang X. *Inverse 2d phase change problem. In proceedings of the 16th IFIP TC7 conference on system modelling and optimization, Compiègne (France), 1993.*

[7] O. Bodart. *Application de la méthode des sentinelles à l'identification des sources de pollution dans un système distribué. Contrôles insensibilisant. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 1993.*

[8] O. Bodart, J.P.Kernévez, and T. Männikkö. *Numerical methods to compute sentinels for distributed systems. In proccedings of the 16th IFIP TC7 conference on system modelling and optimization, Compiègne (France), 1993.*

[9] D. Bresch and J. Simon. *Une remarque sur la non conservation de la regularité d'un domaine par des variations normales. Preprint 95-09. Technical report, Laboratoire de mathématiques appliquées, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France, 1995.*

[10] I. Ekeland and R. Temam. *Convex analysis and variational problems. North-Holland, Amsterdam, 1976.*

[11] J.P.Kernévez. *The sentinels method and its application to environmental pollution problems. CRC Press, Inc, Boca Raton, Florida (USA), 1996.*

[12] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte et perturbation des systèmes distribués. Masson, R.M.A, 1986.*

[13] J.L. Lions. *Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes. Masson, R.M.A, 1992.*

[14] J.L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous boundary problems and applications. Springer, 1972.*

[15] O. Pironneau. *Optimal shape design for elliptic systems. Springer-Verlag, Springer series, in computational physics, 1983.*

[16] W. Rudin. *Functional analysis. Mc Graw Hill, New-York, 1974.*

[17] J.C. Saut and B. Scheurer. *Unique continuation for some evolution equations. J. Diff. Equations, vol 66, 1987.*

[18] J. Simon. *Domain Variation for Drag in Stokes flow, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 1991.*

[19] J. Simon. *Domain variation for drag in Stokes flow. In control theory of distributed parameter systems and applications, Proceeding of IFIP 90 conferences in Shangai, 1993. Li Xunjing, ed.*

[20] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et application. Masson. Paris, 1983.*

[21] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Math. Studies 5. North Holland. Amsterdam, 1979.*

[22] D. Henry. *Geometric théory of semilinear parabolic Equations. Lecteur Notes in Mathematics 840 Springer-Verlag. New-York, 1984.*

[23] Yosida, K : *Functional analysis, Springer-Verlag. Berlin, 1974.*

[24] ADAMS, R.A. : *Sobolev spaces. Academic Press, New-York. San Francisco London, 1975.*

[25] J.A. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations. Springer-Verlag. New-York, 1983.*

[26] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte, Stabilisation et Perturbations des systèmes distribués (Vol 1). Masson.1988.*

[27] J.L. Lions ; *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod Gauthier, Villars, Paris 1986.*

[28] V. Trénoguine. *Analyse fonctionnelle. Edition Mir Moscou.*

[29] A. EL Jai - A. J. Pritchard ; C*apteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués. Masson. R.M.A 3. Paris. 1986.*

[30] E. H. Zerrik ; *Analyse régionale des systèmes distribués. These. Univ. Mohammed V. Maroc, 1993.*

[31] A. PAZY. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Math. Sciences 44, Springer-Verlag. New-York, 1983.*

[32] Ludovic Dan Lemile. *Une étude Comparative Concernat les Semi-groupes de classe* C_0 *et les semi-groupes intégrés, Université Blaise Pascal, Aubière, France, 2005.*

[33] Assia Benabdallah. *Une introduction à la théorie du contrôle, Université de Provence. CMI-LATP, 2007.*

[34] Ludovic Dan Lemile. *La formule de LIE-TROTTER pour le semi-groupe fortement continu. Univ Claude Bernard Lyon, 2001*

Résumé

On considère l'équation de la chaleur dans un domaine dont une partie de la frontière est inconnue. Une méthode pour l'identification de cette partie inconnue à partir d'une observation partielle de la solution est présentée. Elle est basée sur la méthode des sentinelles. La méthode montre l'existence de sentinelles approchées sur le système linéarisé et construit une méthode de point fixe.

Pour montrer l'existence des sentinelles linéarisée le problème d'identification est reformulé en un problème de contrôlabilité approchée dont la solution est obtenue par une technique d'analyse convexe. La propriété de contraction du point fixe découle directement de la définition des sentinelles.

Mots-clés : Contrôlabilité, système évolutif, système distribué, opérateur, sentinelle.

Abstract

A method for the identification of a part of the boundary in a diffusion problem is proposed.

It is based on sentinels. A linearisation scheme is used and the local convergence is proved. The method defines and proves the existence of approximate sentinels for the linearized system and builds a fixed point method.

To prove the existence of the linearized sentinels, the problem is reformulated as an approximate control problem and solved by a convex analysis method.

The contraction property of the fixed point method follows straightforward from the definition of approximate the sentinels.

Key words : Controllability, evaluative system, distributed system, operator, sentinel.

Notations générales

1- Opérateurs

A : Opérateur linéaire continue.

B : Opérateur linéaire continue.

T : Opérateur linéaire continue.

Δ :Laplacien.

∇ :Le gradient.

g : Lpérateur de trace.

$\overline{A}$: fermeture de A.

I : opérateur identité.

A^* : adjoint de A.

A^c : complémentaire de A.

$A^\perp$: orthogonale de A.

A^{-1} : inverse de A.

$A \subset B$: c'est-à-dire $D(A) \subset D(B)$.

$T(t) \in \mathcal{SG}(M, \omega)$: alors qui vérifie $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$.

2- Fonctions

$S(\lambda, \tau)$: la sentinelle.

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$: dérivé normale extérieure de u.

χ : fonction caractéristique.

D_i : dérivé au sens des distributions.

$D_\alpha S$: le différentielle de S.

F^* : fonction conjuguée de F.

$R(\lambda)$: la transformée de Laplace du semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

3- Ensembles

$\operatorname{Im}(A)$: image de A.

$\ker(A)$: noyau de A.

$\rho(A)$: l'ensemble résolvante de A.

$\sigma(A)$: spectre de A.

ϕ : ensemble vide.

$D(A)$: est le domaine de A.

$A_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$.

Ω : ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière.

Ω_α : la déformation du domaine Ω.

$\partial\Omega = \Gamma$: frontière de Ω.

$Supp(g)$: support de la fonction g.

$I = \left[0, \check{T}\right]$: intervalle de temps.

Q : le cylindre de $\Omega \times \left]0, \check{T}\right[$, $\check{T}$ fini.

$\Sigma = \Gamma \times \left]0, \check{T}\right[$: la frontière latérale.

O : observatoire, (une partie de Ω).

4- Espaces fonctionnels

V, U, E : sont des espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{L}(V, E)$: espace des applications linéaires continues de V dans E .

$\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(U, U)$.

E^* : dual topologique de E.

$L^2(\Omega)$: espace des fonctions de carré intégrable sur Ω.

$D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$: c'est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω.

$H_0^1(\Omega)$: est l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$H^{-1}(\Omega)$: dual de $H_0^1(\Omega)$.

H^m : espace de Sobolev.$(m \in \mathbb{N})$

$C_c(\Omega)$: fonctions continues à support compact dans Ω.

$C^k(\Omega)$: fonctions k fois continûment différentiables sur Ω $(k \in \mathbb{Z}_+)$.

$C^\infty(\Omega) = \bigcap C^k(\Omega)$ .telle que $k \geq 0$.

$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.

$\boxed{\textbf{5- Symboles}}$

t : variable qui désigne le temps.

x : vecteur de $\mathbb{R}^n$.

α : vecteur de $\mathbb{R}^n$.

β : multi indice de $\mathbb{N}^n$.

$\lambda\widehat{f}$: terme de pollution.

$\tau\widehat{y}_0$: terme manquant.

η : la normale extérieure.

$p.p$: presque partout.

$resp$: respectivement.