



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ LARBI BEN MHIDI- OUM EL BOUAGHI



Année universitaire 2022 – 2023

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Numéro d'ordre : .....

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master

**Filière :** Mathématiques

**Option :** Mathématiques appliquées

## Thème

MISE EN OEUVRE DE LA MÉTHODE DE SOUS- ET SUR-SOLUTION  
POUR UN PROBLÈME ELLIPTIQUE NON LINÉAIRE AVEC UNE  
CONDITION AUX LIMITES DE ROBIN-NEUMANN

**Présenté par :** Abed Douaa et Sekhri Mounira

Soutenu le 25/06/2023, devant le jury :

Nabil Merazga	Président	Univ. O.E.B
Brahim Hadjou	Encadreur	Univ. O.E.B
Ahcene Merad	Examineur	Univ. O.E.B

SESSION: JUIN 2023

## Résumé

Dans ce mémoire, on étudie un problème elliptique avec une condition aux limites de type Robin-Neumann et un terme de convection dépendant non-linéairement de la solution et de son gradient. On utilise l'approche de sous- et sur-solution pour obtenir un résultat d'existence et de localisation d'une solution. Le résultat est appliqué pour prouver l'existence de solutions positives. Le travail réalisé peut être vu comme un pas vers l'unification de deux récents résultats de D. Motreanu et al.

## Abstract

In this dissertation, we study an elliptic problem with a Robin-Neumann boundary condition and a convection term that depends nonlinearly on the solution and its gradient. We use the sub- and super-solution approach to obtain a result of existence and localization of a solution. The result is applied to prove the existence of positive solutions. The work carried out can be seen as a step towards the unification of two recent results of D. Motreanu et al.

## المخلص

في هذه المذكرة ندرس مسألة ناقصية ذات شروط حدية من نوع روبن-نيومن تتضمن حدا للحمل الحراري يرتبط بصورة غير خطية بالحل وتدرجه. استخدمنا طريقة الحل السفلي والحل العلوي لإثبات نتيجة تتعلق بوجود الحل وتموقعه، كما استعملنا هذه النتيجة لإثبات وجود حلول موجبة. يمكن اعتبار هذا العمل خطوة لتوحيد نتيجتين نشرتا مؤخرا من طرف Motreanu و آخرين.

# REMERCIEMENT

*Nous remercions d'abord Dieu le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté et la patience pour réussir à finir ce mémoire.*

*Nous remercions profondément notre cher encadreur **Dr. Hadjou Brahim** pour son suivi, son aide, ses intéressants commentaires et ses conseils précieux tout au long de cette recherche.*

*Son énorme soutien, sa sincérité et sa motivation qui nous ont profondément inspiré. Ce fut un grand privilège et un honneur d'étudier et de travailler sous sa direction.*

*Nous adressons nos sincères remerciements aux **Dr. Mohamed Saadi** et **Dr. Rezzoug***

***Imad** qui nous ont apporté un grand soutien dans la réalisation de ce travail*

*Nos remerciements particuliers sont adressés aux membres du jury **Dr. Merazga***

***Nabil** et **Dr. Ahcene Merad** d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce mémoire et de l'évaluer.*

*Nos sincères remerciements s'adressent à tous les professeurs du département de mathématique pour leurs enseignements tout au long de notre parcours universitaire.*

# DÉDICACE

*Je dédie ce modeste travail :*

*À mes tendres parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien, leurs sacrifices et toute les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.*

*À la femme la plus merveilleuse qui soit, ma chère **mère**.*

*À l'homme le plus grand et le plus cher de l'univers, mon cher **père**.*

*À ceux qui m'ont apporté beaucoup de soutien, de patience, d'espoir et d'amour, tout au long de la réalisation de ce mémoire, mon cher mari **Mohamed**.*

*À mes chers frères **Ali** et **Yaâkoub**.*

*À ma sœur chérie **Soudjoud**, pour la patience infinie et le soutien et de m'épauler afin que je puisse réaliser mes rêves.*

*À mon cher grand-père **Ali**. À ma chère grand-mère **Rabaiya**.*

*À ma chère binôme **Mounira**.*

*À ma chère amie **Rayane**.*

*À tous ceux qui ont participé à l'élaboration de ce modeste travail.*

*À toute ma famille.*

**Douaa**

*Je dédie ce modeste travail :*

*Aux deux perles rares.*

*Mon très cher **père** et ma très chère **mère** sans qui je ne serais jamais ce que je suis aujourd'hui.*

*À mon cher mari **Saif**, pour la patience infinie et le soutien indéfectible dont il a fait preuve toute la durée de ce travail.*

*À mes chers frères **Lakhdar** et **Samir**.*

*À ma sœur chérie **Houda**, qui n'a jamais cessé de me soutenir et de m'épauler afin que je puisse réaliser mes rêves.*

*À mes petits poneys adorés, mes chers enfants **Amine** et **Anes**.*

*À ma chère binôme **Douaa** qui m'a toujours accompagné.*

*À toute ma famille, mes collègues, mes amis.*

**Mounira**

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Notation</b>	5
<b>Introduction</b>	6
<b>1 Notions et résultats préliminaires</b>	9
1.1 Quelques résultats classiques d'analyse fonctionnelle . . . . .	9
1.2 Un résultat d'existence pour un problème non linéaire abstrait . . . . .	11
1.3 Espaces $L^p(\Omega)$ et opérateur de Nemytskii . . . . .	14
1.3.1 Espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .	14
1.3.2 Opérateur de Nemytskii . . . . .	16
1.4 Espaces de Sobolev . . . . .	16
1.4.1 Opérateur de troncature associé à une paire de fonctions . . . . .	22
1.4.2 Première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet	24
<b>2 Méthode de sous- et sur-solution pour un problème elliptique non li-</b>	
<b>néaire avec une condition aux limites de Robin-Neumann</b>	25
2.1 Présentation du problème . . . . .	25
2.2 Formulation faible du problème . . . . .	26
2.3 La mise en œuvre de la méthode de sous- et sur-solution . . . . .	28
2.3.1 Résultat d'existence pour un problème auxiliaire . . . . .	28
2.3.2 Résultat d'existence pour le problème (P) . . . . .	31
2.4 Application : existence de solutions positives . . . . .	34
2.4.1 Cas d'un problème de Neumann « pur » . . . . .	35
2.4.2 Cas du Laplacien . . . . .	37
<b>Conclusion</b>	41
<b>Bibliographie</b>	42

---

# NOTATION

$V$	: Un espace de Hilbert.
$(\cdot   \cdot)_V$	: Crochet du produit scalaire dans $V$ .
$V'$	: Le dual topologique de $V$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Crochet de dualité entre $V$ et $V'$ .
$u_m \xrightarrow{V} u$	: Convergence forte de $(u_m)_m$ vers $u$ dans $V$ .
$u_m \xrightarrow{V'} u$	: Convergence faible de $(u_m)_m$ vers $u$ dans $V$ .
$\Omega$	: Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .
$\partial\Omega$	: La frontière de $\Omega$ .
$d\sigma$	: La mesure superficielle sur $\partial\Omega$ .
$\nu(x)$	: Le vecteur normal unitaire en $x \in \partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de $\Omega$ .
p.p.	: Presque partout.
$(H^1(\Omega))_+$	$= \{u \in H^1(\Omega); u(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega\}$ .
$u_+$	$= \max\{u, 0\}$ .
$u_-$	$= \max\{-u, 0\}$ .
$\nabla$	$= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ (gradient).
div	$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}$ (divergence).
$\Delta$	$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ (laplacien).

---

# INTRODUCTION

La modélisation mathématique par des équations aux dérivées partielles (EDP) a débuté au XVIIIe siècle avec les travaux d'Euler, d'Alembert, Lagrange et Laplace, sur des problèmes relevant de la science physique. De nos jours, force est de constater que les EDP permettent d'aborder une multitude de problèmes relevant d'une large variété de disciplines comme la science des matériaux, la chimie, la biologie des systèmes, la météorologie, la science du climat, la technologie médicale, la mécanique des structures, la conception d'avions, la cosmologie, le traitement d'images, l'économie, etc. Cela explique à lui seul l'intense activité de recherche actuelle et passée dans le domaine mathématique des EDP et de leurs problèmes aux limites.

Les problèmes aux limites elliptiques apparaissent comme modèles mathématiques de problèmes concrets stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. La nature étant essentiellement non linéaire, les problèmes aux limites censés représenter le plus fidèlement possible des situations concrètes sont non linéaires. Lors de l'étude d'un problème aux limites elliptique non linéaire, la question d'existence d'une solution est primordiale. Pour aborder cette question, il faut choisir entre plusieurs approches en fonction de la structure du problème étudié. Parmi les approches connues à ce jour, il y a la méthode de sous- et sur-solution (MSS). Dans les conditions favorables et en présence d'une paire ordonnée de sous- et sur-solution, la MSS permet d'affirmer l'existence d'une solution entre la sous-solution et la sur-solution. Au dire de certains chercheurs, l'utilisation de la MSS dans l'étude des problèmes aux limites elliptiques non linéaires a été initiée par M. Nagumo en 1954. À la lumière de la situation simple suivante, on est amené à penser que l'idée qui sous-tend la MSS est suggérée par le célèbre théorème des valeurs intermédiaires, démontré par B. Bolzano en 1817 :

Soit l'équation algébrique non linéaire :  $e(t) = c$ , où  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  $c \in \mathbb{R}$ . Supposons qu'il existe une paire  $(\underline{t}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^2$  telle que :  $e(\underline{t}) \leq c$ ,  $e(\bar{t}) \geq c$  et  $\underline{t} \leq \bar{t}$  (selon la terminologie de la MSS :  $\underline{t}$  est une sous-solution,  $\bar{t}$  est une sur-solution et la paire

( $\underline{t}, \bar{t}$ ) est ordonnée). Alors, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que cette équation admet au moins une solution dans l'intervalle  $[\underline{t}, \bar{t}]$ .

Tout récemment, en 2020, dans [9], D. Motreanu et al ont implémenté la MSS pour un problème elliptique non linéaire avec une condition aux limites de Neumann dont le prototype est

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + a_0(x) |u|^{p-2} u = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{N})$$

où

- $p \in ]1, +\infty[$ ,
- $\Omega$  est un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^n$ ,
- $\partial\Omega$  est la frontière de  $\Omega$ ,
- $\nu$  est la normale extérieure unitaire à  $\partial\Omega$ ,
- $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ , avec  $a_0 \geq 0$  et  $a_0 \not\equiv 0$ ,
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Carathéodory, i.e.  $f(x, \cdot, \cdot)$  est continue pour presque tout  $x \in \Omega$  et  $f(\cdot, \eta, \xi)$  est mesurable pour tout  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Au moyen de cette implémentation, ils ont obtenu des résultats d'existence de solutions positives pour une classe de problèmes de Neumann.

Au cours de la même année, ces mêmes auteurs ont récidivé dans [10] en implémentant la MSS pour un problème elliptique non linéaire avec, cette fois, une condition aux limites de Robin dont le prototype est

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + a_0(x) |u|^{p-2} u = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu(x) + b_0(x)u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{R})$$

où  $a_0 \in L^\infty(\Omega)$  avec  $a_0 \geq 0$  et  $b_0 \in L^\infty(\partial\Omega)$  avec  $b_0 \geq 0$  et  $b_0 \not\equiv 0$ . Au moyen de cette implémentation, ils ont obtenu des résultats d'existence de solutions positives pour une classe de problèmes de Robin.

Dans ce mémoire, nous proposons une « unification » des résultats de [9, 10] dans le cas particulier  $p = 2$ . Plus précisément, nous implémentons la MSS pour un problème elliptique non linéaire avec une condition aux limites pouvant être de Neumann ou de Robin dont le prototype est

$$\begin{cases} -\Delta u + a_0(x)u = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \nu(x) + b_0(x)u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{NR})$$

où  $(a_0, b_0) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\partial\Omega)$  avec  $a_0 \geq 0$ ,  $b_0 \geq 0$  et  $a_0 \not\equiv 0$  ou  $b_0 \not\equiv 0$ . Ensuite, comme application, nous montrons comment obtenir un résultat d'existence de solutions positives au moyen de cette implémentation.

Pour la partie implémentation, à l'instar de D. Motreanu et al dans [9, 10], nous avons suivi le schéma habituel de la MSS qui consiste à exploiter la présence d'une paire ordonnée de sous-solution et sur-solution afin de fabriquer un problème auxiliaire ( $\widetilde{NR}$ )

tel que, d'une part, chaque solution de  $(\widetilde{NR})$  est aussi une solution de  $(NR)$ , et, d'autre part, les outils de résolution de  $(\widetilde{NR})$  sont disponibles. Pour la partie applicative, nous avons adapté ce qui était fait dans [9, 10].

Nous avons organisé le mémoire en deux chapitres, chacun composé de plusieurs sections :

- Le premier chapitre est un recueil d'outils d'analyse et d'analyse fonctionnelle, jugés essentiels au regard des objectifs du mémoire et aussi pour en faciliter la lecture. Il comprend quatre sections. Le principal outil de la deuxième section est d'une importance capitale pour l'atteinte des objectifs du mémoire et est le fruit d'une combinaison de deux outils classiques, à savoir le théorème de Lax-Milgram et le théorème de point fixe de Schaefer. Les outils présentés aux trois autres sections sont pour la plupart très connus.
- Le second chapitre comprend quatre sections. La première présente le problème traité. Dans la deuxième section, on établit une formulation faible du problème et on précise le sens de solution, sous-solution et sur-solution. Les détails de la mise en œuvre de la MSS sont exposés dans la troisième section. La dernière section présente un résultat d'existence de solutions positives obtenu au moyen de l'implémentation de la MSS.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## Notions et résultats préliminaires

Ce chapitre est un recueil d'outils d'analyse fonctionnelle, pour la plupart très connus, jugés essentiels au regard des objectifs du mémoire et aussi pour en faciliter la lecture. Dans tout le mémoire, les scalaires sont des réels.

### 1.1 Quelques résultats classiques d'analyse fonctionnelle

Dans tout ce qui suit,  $V$  désigne un espace de Hilbert, muni du produit scalaire  $(\cdot | \cdot)_V$  et de la norme (induite)  $\|\cdot\|_V$ ,  $V'$  son dual topologique, i.e. l'ensemble des formes linéaires continues sur  $V$ . Pour  $(\ell, u) \in V' \times V$ , on note  $\langle \ell, u \rangle$  le réel  $\ell(u)$  (image de  $u$  par  $\ell$ ). Rappelons au passage l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir par exemple [3], page 78)

$$\forall (u, v) \in V^2, \quad |(u | v)_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V.$$

**Définition 1 (Convergence forte, convergence faible)** Soit  $(u_m)_m$  une suite d'éléments de  $V$  et  $u \in V$ .

1. On dit que  $(u_m)_m$  converge fortement dans  $V$  vers  $u$  si

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|u_m - u\|_V = 0,$$

et on note

$$u_m \xrightarrow{V} u.$$

2. On dit que  $(u_m)_m$  converge faiblement dans  $V$  vers  $u$  si

$$\langle \ell, u_m \rangle \rightarrow \langle \ell, u \rangle \quad \forall \ell \in V',$$

et on écrit

$$u_m \xrightarrow{V'} u.$$

**Définition 2 (Application compacte)** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Une application continue  $G : H \longrightarrow V$  est dite compacte si elle transforme toute partie bornée de  $H$  en une partie relativement compacte de  $V$ . Autrement dit, si toute suite bornée  $(u_m)_m$  d'éléments de  $H$  admet une sous-suite  $(u_k)_k$  telle que  $(G(u_k))_k$  soit convergente (fortement) dans  $V$ .

**Définition 3 (Injection compacte)** Soit  $H$  un espace de Hilbert tel que  $H \subset V$ . On dit que l'injection de  $H$  dans  $V$  est compacte et on écrit  $H \hookrightarrow\hookrightarrow V$  si l'injection canonique (i.e. l'application  $u \longmapsto u$  de  $H$  dans  $V$ ) est compacte. Ce qui revient à dire que  $H \hookrightarrow\hookrightarrow V$  si et seulement si

- 1) il existe une constante  $C_{HV} > 0$  telle que  $\|u\|_V \leq C_{HV} \|u\|_H, \quad \forall u \in H$ , et
- 2) toute suite bornée dans  $H$  admet une sous-suite qui converge (fortement) dans  $V$ .

**Définition 4** On dit qu'une forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  est

- 1) *continue* s'il existe une constante  $C$  telle que

$$|b(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V,$$

- 2) *coercive* s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$b(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$$

**Théorème 1 (Lax-Milgram)** Soit  $b(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout  $l \in V'$  il existe  $u \in V$  unique tel que

$$b(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

**Preuve.** Voir [3], Corollaire V.8, page 84]. ■

On aura aussi besoin des trois résultats suivants :

**Proposition 1** Soit  $H$  un espace de Hilbert tel que  $H \hookrightarrow\hookrightarrow V$  et soit  $(u_m)_m$  une suite bornée de  $H$ . Alors, il existe une sous-suite  $(u_{m'})_{m'}$  et  $u \in H$  tels que

$$u_{m'} \xrightarrow{H} u$$

et

$$u_{m'} \xrightarrow{V} u.$$

**Preuve.** Voir [2], Proposition 1.1.3, page 13]. ■

**Théorème 2 (de point fixe de Schaefer)** Soit  $G$  une application compacte de  $V$  dans  $V$ . Si l'ensemble  $\{u \in V ; \exists t \in [0, 1[ \text{ tel que } u = tG(u)\}$  est borné dans  $V$ , alors  $G$  admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe  $u \in V$  tel que  $G(u) = u$ .

**Preuve.** Voir [8], Théorème 4.3.2, page 29]. ■

**Proposition 2 (Inégalité de Young avec epsilon)** Soit  $(a, b, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ . Alors

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \quad (1.1)$$

**Preuve.** Voir [4], Quelques inégalités 2.2.4, page 36]. ■

## 1.2 Un résultat d'existence pour un problème non linéaire abstrait

Soient  $H$  et  $V$  deux espaces de Hilbert tels que  $H \subset V$ ,  $b(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire sur  $H \times H$  et  $F$  une application (non linéaire) de  $H$  dans  $V$ . On considère le problème

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H \text{ tel que} \\ b(u, v) = (F(u) | v)_V \quad \forall v \in H \end{cases} \quad (\text{PVNL})$$

pour lequel on a le résultat suivant :

**Théorème 3 (Existence)** *Supposons que les cinq conditions suivantes soient satisfaites*  
**HV)**  $H \hookrightarrow V$ , i.e.

$$\exists C_{HV} > 0 \text{ telle que } \|u\|_V \leq C_{HV} \|u\|_H, \quad \forall u \in H, \quad (1.2)$$

et toute suite bornée dans  $H$  admet une sous-suite qui converge dans  $V$ ,

**b1)**  $b(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $H \times H$ , i.e.

$$\exists C_b > 0 \text{ telle que } |b(u, v)| \leq C_b \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall (u, v) \in H^2, \quad (1.3)$$

**b2)**  $b(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $H$ , i.e.

$$\exists \alpha_b > 0 \text{ telle que } b(u, u) \geq \alpha_b \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H, \quad (1.4)$$

**F1)**  $F$  est continue de  $H$  dans  $V$ ,

**F2)** il existe une constante  $C_F > 0$  telle que

$$\|F(u)\|_V + |(F(u) | u)_V| \leq C_F(1 + \|u\|_H), \quad \forall u \in H. \quad (1.5)$$

Alors le problème **(PVNL)** admet (au moins) une solution, i.e. il existe (au moins) un  $u \in H$  tel que

$$b(u, v) = (F(u) | v)_V, \quad \forall v \in H. \quad (1.6)$$

**Preuve.** On va concevoir une application  $G : H \longrightarrow H$  dont chaque point fixe est une solution de **(PVNL)**. Ensuite, on exploite le théorème **2** de point fixe de Schaefer pour montrer qu'effectivement elle en admet (au moins) un.

**Conception de l'application  $G$  :**

Soit  $u \in H$ . En raison de la bilinéarité du produit scalaire  $(\cdot | \cdot)_V$ , l'application  $v \longmapsto \langle l_u, v \rangle = (F(u) | v)_V$  est une forme linéaire sur  $H$ . De plus, en exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition **HV**, on a

$$|\langle l_u, v \rangle| = |(F(u) | v)_V| \leq \|F(u)\|_V \|v\|_V \leq (C_{HV} \|F(u)\|_V) \|v\|_H, \quad \forall v \in H.$$

Ceci prouve que  $l_u$  est continue sur  $H$ , i.e.  $l_u \in H'$ . Étant donné que la forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  satisfait les hypothèses **b1** et **b2**, alors, par le théorème de Lax-Milgram (voir le théorème **1**), il existe un unique  $w_u \in H$  tel que

$$b(w_u, v) = (F(u) | v)_V, \quad \forall v \in H.$$

En posant  $G(u) = w_u$ , on obtient l'application  $G : H \longrightarrow H$  caractérisée par :

$$\forall u \in H, G(u) \in H \quad \text{et} \quad b(G(u), v) = (F(u) | v)_V, \forall v \in H. \quad (1.7)$$

De plus, il est clair que si  $u$  est un point fixe de  $G$ , alors  $u$  satisfait (1.6), i.e.  $u$  est une solution de (PVNL).

**Continuité de  $G$  :**

Montrons que l'application  $G$  est continue de  $H$  dans lui-même. Soit  $(u, u') \in H^2$ . Grâce à **b2**, (1.7), **HV** et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \alpha_b \|G(u) - G(u')\|_H^2 &\leq b(G(u) - G(u'), G(u) - G(u')) \\ &= (F(u) - F(u') | G(u) - G(u'))_V \\ &\leq \|F(u) - F(u')\|_V \|G(u) - G(u')\|_V \\ &\leq C_{HV} \|F(u) - F(u')\|_V \|G(u) - G(u')\|_H. \end{aligned}$$

D'où

$$\|G(u) - G(u')\|_H \leq \frac{C_{HV}}{\alpha_b} \|F(u) - F(u')\|_V.$$

En raison de la condition **F1**, il en résulte que l'application  $G$  est continue.

**Compacité de  $G$  :** Montrons que l'application  $G$  est compacte. Soit  $(u_m)_m$  une suite bornée dans  $H$ . Alors, grâce à **b2**, (1.7), **HV**, **F2** et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, pour tout  $m$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_b \|G(u_m)\|_H^2 &\leq b(G(u_m), G(u_m)) \\ &= (F(u_m) | G(u_m))_V \\ &\leq \|F(u_m)\|_V \|G(u_m)\|_V \\ &\leq C_F C_{HV} (1 + \|u_m\|_H) \|G(u_m)\|_H \\ &\leq C_F C_{HV} \left(1 + \sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_H\right) \|G(u_m)\|_H. \end{aligned}$$

D'où

$$\|G(u_m)\|_H \leq \frac{C_F C_{HV}}{\alpha_b} \left(1 + \sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_H\right), \quad \forall m.$$

La suite  $(u_m)_m$  étant bornée dans  $H$ , il s'ensuit que la suite  $(G(u_m))_m$  est bornée dans  $H$ .

Par la proposition (1), il existe une sous-suite  $(u_{m'})_{m'}$  de  $(u_m)_m$  et  $u \in H$  tels que

$$G(u_{m'}) \xrightarrow{H} u, \quad (1.8)$$

et

$$G(u_{m'}) \xrightarrow{V} u. \quad (1.9)$$

Une fois de plus, grâce à la condition **b2** et à (1.7), on a pour tout  $m'$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_b \|G(u_{m'}) - u\|_H^2 &\leq b(G(u_{m'}) - u, G(u_{m'}) - u) \\ &= b(G(u_{m'}), G(u_{m'}) - u) - b(u, G(u_{m'}) - u) \\ &= (F(u_{m'}) | G(u_{m'}) - u)_V - b(u, G(u_{m'}) - u). \end{aligned} \quad (1.10)$$

En raison de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la condition **F2**, on a, pour tout  $m'$ ,

$$\begin{aligned} |(F(u_{m'}) | G(u_{m'}) - u)_V| &\leq \|F(u_{m'})\|_V \|G(u_{m'}) - u\|_V \\ &\leq C_F(1 + \|u_{m'}\|_H) \|G(u_{m'}) - u\|_V \\ &\leq C_F(1 + \sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_H) \|G(u_{m'}) - u\|_V. \end{aligned}$$

La suite  $(u_{m'})_m$  étant bornée dans  $H$ , il s'ensuit grâce à (1.9) que

$$\lim_{m'} (F(u_{m'}) | G(u_{m'}) - u)_V = 0. \quad (1.11)$$

D'autre part, en raison de la bilinéarité de  $b(\cdot, \cdot)$  et de la condition **b1**, l'application  $v \mapsto \langle k_u, v \rangle = b(u, v)$  est une forme linéaire continue sur  $H$ , i.e.  $k_u \in H'$ , donc, compte tenu de (1.8),

$$\lim_{m'} b(u, G(u_{m'}) - u) = \lim_{m'} \langle k_u, G(u_{m'}) - u \rangle = 0. \quad (1.12)$$

De (1.10), (1.11) et (1.12), on déduit que

$$\lim_{m'} \|G(u_{m'}) - u\|_H^2 = 0, \text{ i.e. } G(u_{m'}) \xrightarrow{H} u.$$

Ceci prouve que l'application  $G$  est compacte.

Pour pouvoir conclure que  $G$  admet un point fixe en vertu du théorème de Schaefer, il ne reste qu'à prouver que l'ensemble  $\{u \in H ; \exists t \in [0, 1[ \text{ tel que } u = tG(u)\}$  est borné dans  $H$ .

Soit  $u \in H$  tel que  $u = tG(u)$  pour un certain  $t \in [0, 1[$ . Grâce à **b2**, (1.7), **F2** et à l'exploitation de l'inégalité de Young (voir 1.1) pour  $\varepsilon = \frac{\alpha_b}{2}$ , on obtient,

$$\begin{aligned} \alpha_b \|u\|_H^2 &\leq b(u, u) \\ &= b(tG(u), u) \\ &= t(F(u) | u)_V \\ &\leq |(F(u) | u)_V| \\ &\leq C_F + C_F \|u\|_H \\ &\leq C_F + \frac{C_F^2}{2\alpha_b} + \frac{\alpha_b}{2} \|u\|_H^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\frac{\alpha_b}{2} \|u\|_H^2 \leq C_F + \frac{C_F^2}{2\alpha_b}, \text{ i.e. } \|u\|_H \leq \sqrt{\frac{2C_F}{\alpha_b} + \left(\frac{C_F}{\alpha_b}\right)^2}.$$

Ceci prouve que

$$\sup \{\|u\|_H ; u \in H \text{ et } \exists t \in [0, 1[ \text{ tel que } u = tG(u)\} \leq \sqrt{\frac{2C_F}{\alpha_b} + \left(\frac{C_F}{\alpha_b}\right)^2},$$

c'est-à-dire que l'ensemble  $\{u \in H ; \exists t \in [0, 1[ \text{ tel que } u = tG(u)\}$  est borné dans  $H$ . ■

### 1.3 Espaces $L^p(\Omega)$ et opérateur de Nemytskii

Dans ce mémoire,  $dx$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

#### 1.3.1 Espaces $L^p(\Omega)$

**Définition 5** Etant donné  $1 \leq p < +\infty$ , on note  $L^p(\Omega)$ , l'espace vectoriel des (classes de) fonctions  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables de  $p^{\text{ième}}$  puissance Lebesgue-intégrable sur  $\Omega$ , muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in L^p(\Omega).$$

Si  $p = +\infty$ , on note  $L^\infty(\Omega)$  l'ensemble des (classes de) fonctions essentiellement bornées sur  $\Omega$ , i.e.

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}; \exists C > 0 \text{ telle que } |u(x)| \leq C \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

On munit cet espace de la norme définie par :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf\{C > 0; |u(x)| \leq C \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

**Théorème 4 (de Fisher-Riesz)**  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ . En particulier,  $L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(u | v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx$  est un espace de Hilbert.

**Preuve.** Voir [3], Théorème IV.8, page 57, et Exemple fondamental, page 78]. ■

**Théorème 5 (Inégalité de Hölder)** Soient  $u \in L^p(\Omega)$  et  $v \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p, q \leq \infty$  deux exposants conjugués ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ). Alors,  $uv \in L^1(\Omega)$  et l'on a

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Preuve.** Voir [3] Théorème IV.6, page 56] ■

**Proposition 3** Soit  $(u, v) \in L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On a :

- 1)  $|u| \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$  p.p. sur  $\Omega$ ,
- 2)  $uv \in L^2(\Omega)$  et  $\|uv\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$ ,
- 3) si  $\Omega$  est borné, alors  $u \in L^2(\Omega)$  et  $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ , où  $\text{mes}(\Omega)$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\Omega$ , i.e.  $\text{mes}(\Omega) = \int_{\Omega} dx$ .

**Preuve.**

1) Voir la remarque 1 à la page 56 dans [3].

2) Étant le produit de deux fonctions mesurables, la fonction  $uv$  est mesurable. De plus, selon le premier point de la proposition, on a  $|u| \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$  p.p. sur  $\Omega$ , donc  $|uv|^2 = u^2v^2 \leq (\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2)v^2$  p.p. sur  $\Omega$ , de sorte que

$$\int_{\Omega} |uv|^2 dx \leq \int_{\Omega} (\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2)v^2 dx = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} v^2 dx = (\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)})^2.$$

Ceci prouve que  $uv \in L^2(\Omega)$  et que  $\|uv\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}$ .

3) Désignons par  $1_\Omega$  la fonction indicatrice de l'ouvert  $\Omega$ , laquelle est clairement une fonction mesurable. Supposons  $\Omega$  borné. On a  $\int_{\Omega} |1_\Omega|^2 dx = \int_{\Omega} dx = \text{mes}(\Omega) < \infty$ , donc  $1_\Omega \in L^2(\Omega)$  et  $\|1_\Omega\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\text{mes}(\Omega)}$ . D'où, en exploitant le deuxième point de la proposition,  $u = u1_\Omega \in L^2(\Omega)$  et  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u1_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|1_\Omega\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\text{mes}(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ . ■

### Remarque 1

1)  $L^2$  espace produit  $L^2(\Omega)^m$ . Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . On pose

$$L^2(\Omega)^m = L^2(\Omega) \times \dots \times L^2(\Omega) = \{f = (f_1, \dots, f_m) ; f_i \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, m\}$$

et, pour  $f = (f_1, \dots, f_m) \in L^2(\Omega)^m$  et  $g = (g_1, \dots, g_m) \in L^2(\Omega)^m$ ,

$$(f | g)_{L^2(\Omega)^m} = \sum_{i=1}^m (f_i | g_i)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} f_i g_i dx$$

et

$$\|f\|_{L^2(\Omega)^m} = \sqrt{(f | f)_{L^2(\Omega)^m}} = \|f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^m \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il n'est pas difficile de démontrer les propriétés suivantes.

a)  $(\cdot | \cdot)_{L^2(\Omega)^m}$  est un produit scalaire sur  $L^2(\Omega)^m$  et  $L^2(\Omega)^m$  est un espace de Hilbert.

b) Inégalité de Cauchy-Schwarz : si  $(f, g) \in L^2(\Omega)^m \times L^2(\Omega)^m$ , alors  $f \cdot g \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^m f_i g_i \in L^1(\Omega)$  et  $\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)^m} \|g\|_{L^2(\Omega)^m}$ .

c) Si  $f = (f_1, \dots, f_m) \in L^\infty(\Omega)^m \stackrel{\text{déf}}{=} L^\infty(\Omega) \times \dots \times L^\infty(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Omega)^m$ , alors  $f \cdot g \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^m f_i g_i \in L^2(\Omega)$  et

$$\|f \cdot g\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{m} \left( \max_{1 \leq i \leq m} \|f_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|g\|_{L^2(\Omega)^m}. \quad (1.13)$$

d) Si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  est une matrice avec  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$  pour tous  $1 \leq i, j \leq m$  et si  $f \in L^2(\Omega)^m$ , alors  $Af \in L^2(\Omega)^m$  et

$$\|Af\|_{L^2(\Omega)^m} \leq \left( \sum_{i, j=1}^m \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|f\|_{L^2(\Omega)^m}. \quad (1.14)$$

2) Les espaces  $L^p(\partial\Omega)$ . Lorsque l'ouvert  $\Omega$  est régulier (de classe  $C^1$ ), les espaces  $L^p(\partial\Omega)$  sont définis par rapport à la mesure superficielle  $d\sigma$ , induite par la mesure de Lebesgue  $dx$  sur la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Tous les résultats présentés dans cette section concernant les espaces  $L^p(\Omega)$  sont également valables pour les espaces  $L^p(\partial\Omega)$ .

### 1.3.2 Opérateur de Nemytskii

**Définition 6** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $g : \Omega \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Carathéodory, i.e.  $g$  vérifie les deux conditions :

- 1)  $g(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue pour presque tout  $x \in \Omega$ ,
- 2)  $g(\cdot, \Theta) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  est mesurable pour tout  $\Theta \in \mathbb{R}^m$ .

On appelle opérateur de Nemytskii (ou opérateur de superposition) engendré par  $g$ , l'opérateur  $N_g$  défini en posant pour toute fonction mesurable  $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $N_g(U) = g(\cdot, U(\cdot))$ , i.e.  $N_g(U)$  désigne la fonction (nécessairement mesurable) définie sur  $\Omega$  par  $N_g(U)(x) = g(x, U(x))$ .

Nous aurons besoin du résultat suivant concernant l'opérateur de Nemytskii (voir par exemple [11], Théorème 2.76, page 41).

**Théorème 6** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $g : \Omega \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition suivante (appelée condition de croissance) : il existe une fonction  $h \in L^2(\Omega)$  et une constante  $c \in \mathbb{R}_+^*$  telles que

$$|g(x, \Theta)| \leq h(x) + c|\Theta|, \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall \Theta \in \mathbb{R}^m.$$

Alors l'opérateur de Nemytskii engendré par  $g$  envoie continûment l'espace  $L^2(\Omega)^m$  dans  $L^2(\Omega)$ , c'est-à-dire qu'on a

$$\forall U \in L^2(\Omega)^m, N_g(U) \in L^2(\Omega),$$

et que l'application

$$U \longmapsto N_g(U)$$

est continue de  $L^2(\Omega)^m$  dans  $L^2(\Omega)$ .

## 1.4 Espaces de Sobolev

Dans tout ce qui suit, l'ouvert  $\Omega$  est borné et régulier (de classe  $C^1$ ),  $\partial\Omega$  désigne la frontière (le bord) de  $\Omega$ ,  $d\sigma$  désigne la mesure superficielle sur  $\partial\Omega$  et  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$  désigne le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de  $\Omega$  au point  $x \in \partial\Omega$ . On pose

- $D(\Omega) = \{\varphi; \varphi \text{ est une fonction de classe } C^\infty \text{ sur } \Omega \text{ de support compact inclus dans } \Omega\}$ ,
  - $C(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega}) = \{\varphi|_\Omega; \varphi \text{ est une fonction continue sur } \mathbb{R}^n\}$ , où  $\varphi|_\Omega$  désigne la restriction de  $\varphi$  à  $\Omega$ ,
- et, pour  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ ,
- $C^k(\bar{\Omega}) = \{\varphi|_\Omega; \varphi \text{ est une fonction de classe } C^k \text{ sur } \mathbb{R}^n\}$ .

**Définition 7 (L'espace  $H^1(\Omega)$ )** On note  $H^1(\Omega)$  le sous-espace vectoriel de  $L^2(\Omega)$  défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \nabla u \in L^2(\Omega)^n \right\},$$

où  $\nabla u$ , appelé le gradient de la fonction  $u$ , est le vecteur défini par :

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

On munit cet espace du produit scalaire

$$\begin{aligned} (u | v)_{H^1(\Omega)} &\stackrel{\text{déf}}{=} (u | v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u | \nabla v)_{L^2(\Omega)^n} \\ &= (u | v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} | \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} uv dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

dont la norme associée est

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \sqrt{(u | u)_{H^1(\Omega)}} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{\Omega} u^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

**Remarque 2**

1) Dans la définition [7], la dérivée  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  est au sens des distributions sur  $\Omega$  et la condition  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$  signifie précisément qu'il existe  $v_i \in L^2(\Omega)$ , que l'on note  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ , tel que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Rappelons au passage les deux faits suivants

- Dans le cas d'une fonction continûment différentiable, la notion de dérivée au sens des distributions « coïncide » avec celle de dérivée au sens des fonctions (voir par exemple [6], Théorème 6.10, page 144).

- Dans le cas où  $\Omega$  est connexe, une distribution de gradient nul est nécessairement (une fonction) constante sur  $\Omega$  (voir par exemple [6], Theoreme 6.11, page 146).

2) On a  $D(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  et, parce que ici  $\Omega$  est borné, on a  $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ .

3) Pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ , on a :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1.15}$$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1.16}$$

et

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}. \tag{1.17}$$

4) Pour une suite  $(u_m)_m \subset H^1(\Omega)$  et pour  $u \in H^1(\Omega)$ , on a l'équivalence :

$$u_m \xrightarrow{H^1(\Omega)} u \Leftrightarrow \left( u_m \xrightarrow{L^2(\Omega)} u \quad \text{et} \quad \nabla u_m \xrightarrow{L^2(\Omega)^n} \nabla u \right).$$

**Théorème 7**  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

**Preuve.** Voir [3], Proposition IX.1, page 150]. ■

**Théorème 8 (de densité)**  $C^\infty(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ . Autrement dit, pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ , il existe une suite  $(\varphi_m)_m \subset C^\infty(\overline{\Omega})$  telle que  $\varphi_m \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$ .

**Preuve.** Voir [7], Théorème 3, page 266]. ■

**Théorème 9 (de trace)** Il existe une unique application linéaire  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ , appelée application trace, telle que :

1) si  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ , alors  $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ , i.e.  $(\gamma_0 u)(x) = u(x)$  pour tout  $x \in \partial\Omega$ , et  
2)  $\gamma_0$  est continue, i.e. il existe une constante  $C_{\gamma_0} > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  telle que :

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_{\gamma_0} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

**Preuve.** Voir [7], Théorème 1, page 272]. ■

**Théorème 10 (Formule de Green)** Pour tous  $u, v \in H^1(\Omega)$  et tout  $1 \leq i \leq n$ , on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \nu_i d\sigma.$$

**Preuve.** Voir [1], Proposition 5.6.2, pages 189]. ■

**Lemme 1** Soit  $(\psi, u) \in C^1(\overline{\Omega}) \times H^1(\Omega)$ . Alors

$$\nabla(\psi u) = \psi \nabla u + u \nabla \psi, \quad \psi u \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \gamma_0(\psi u) = \psi \gamma_0 u.$$

**Preuve.** Soient  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\varphi \in D(\Omega)$ . En exploitant le théorème 10 sachant que

$\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi\varphi) = \psi \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \varphi \frac{\partial\psi}{\partial x_i}$  et que  $\varphi$  est nulle sur  $\partial\Omega$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi u), \varphi \right\rangle &= - \left\langle \psi u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} \psi u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx \\
 &= - \int_{\Omega} u \left( \psi \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} u \left( \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi\varphi) - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi\varphi) dx + \int_{\Omega} \left( u \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) \varphi dx \\
 &= - \left( - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\psi\varphi) dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\psi\varphi) \nu_i d\sigma \right) + \int_{\Omega} \left( u \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) \varphi dx \\
 &= - \left( - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\psi\varphi) dx + 0 \right) + \int_{\Omega} \left( u \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) \varphi dx \\
 &= \int_{\Omega} \left( \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) \varphi dx = \left\langle \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Ceci prouve qu'au sens des distributions, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi u) = \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial\psi}{\partial x_i}.$$

D'où  $\nabla(\psi u) = \psi \nabla u + u \nabla \psi$ .

Montrons maintenant que  $\psi u \in H^1(\Omega)$ . Comme  $(\psi, \nabla\psi) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})^n \subset L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)^n$  et  $(u, \nabla u) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^n$ , alors, compte tenu de la proposition [3](#),  $(\psi u, \psi \nabla u, u \nabla \psi) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n$ . On en déduit que  $(\psi u, \nabla(\psi u)) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^n$ , i.e.  $\psi u \in H^1(\Omega)$ .

Montrons enfin que  $\gamma_0(\psi u) = \psi \gamma_0 u$ . Pour ce faire, nous allons d'abord montrer que l'application  $v \mapsto F(v) = \psi v$  de  $H^1(\Omega)$  dans lui-même est continue. Il est clair que  $F$  est linéaire.

Soit  $v \in H^1(\Omega)$ . Compte tenu de la proposition [3](#) et de la remarque [1](#) ainsi que des inégalités [\(1.15\)](#) et [\(1.16\)](#), on a

$$\|\psi v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

et

$$\begin{aligned}
 \|\nabla(\psi v)\|_{L^2(\Omega)^n} &= \|\psi \nabla v + v \nabla \psi\|_{L^2(\Omega)^n} \\
 &\leq \|\psi \nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} + \|v \nabla \psi\|_{L^2(\Omega)^n} \\
 &\leq \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} + \sqrt{n} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{n} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
 &= \left( \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} + \sqrt{n} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

On en déduit grâce à (1.17) que

$$\|F(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq \left( 2 \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} + \sqrt{n} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \right) \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

c'est-à-dire que  $F$  est continue.

D'autre part, sachant que  $C^\infty(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$  (voir le théorème 8), il existe une suite  $(\varphi_m)_m \subset C^\infty(\bar{\Omega})$  telle que  $\varphi_m \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$ . En exploitant le théorème de trace 9 ainsi que la continuité de  $F$ , on a

$$\gamma_0 \varphi_m \xrightarrow{L^2(\partial\Omega)} \gamma_0 u, \tag{1.18}$$

$$\gamma_0(\psi \varphi_m) \xrightarrow{L^2(\partial\Omega)} \gamma_0(\psi u) \tag{1.19}$$

et, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$(\gamma_0(\psi \varphi_m))(x) = (\psi \varphi_m)(x), \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

On a également, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 \|\gamma_0(\psi u) - \psi \gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} &= \|\gamma_0(\psi u) - \psi \varphi_m + \psi \varphi_m - \psi \gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
 &\leq \|\gamma_0(\psi u) - \psi \varphi_m\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\psi \varphi_m - \psi \gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)}
 \end{aligned}$$

et, tenant compte de la proposition 3 et de la remarque 1,

$$\|\psi \varphi_m - \psi \gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|\psi(\varphi_m - \gamma_0 u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|\varphi_m - \gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Par passage à la limite quand  $m \rightarrow \infty$ , on en déduit grâce à (1.18) et (1.19) que  $\|\gamma_0(\psi u) - \psi \gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0$ , i.e.  $\gamma_0(\psi u) = \psi \gamma_0 u$ . ■

**Définition 8** ( $H^2(\Omega)$ ) On pose

$$H^2(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \nabla u \in H^1(\Omega)^n\}.$$

**Remarque 3** Comme conséquence du lemme [1] et du théorème [10], on a la formule suivante laquelle est valable pour tous  $(\psi, u, v) \in C^1(\bar{\Omega}) \times H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  et  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \psi \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v dx = - \int_{\Omega} \psi \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \psi \left( \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (\gamma_0 v) \nu_i d\sigma. \quad (1.20)$$

**Théorème 11 (Rellich-Kondrachov)** On a  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , i.e. l'injection canonique de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte.

**Preuve.** Voir [3], Théorème IX.16, page 169]. ■

**Définition 9 ( $H_0^1(\Omega)$ )** On note  $H_0^1(\Omega)$  l'adhérence de  $D(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ . Autrement dit,

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) ; \text{il existe une suite } (\varphi_m)_m \subset D(\Omega) \text{ telle que } \varphi_m \xrightarrow{H^1(\Omega)} u \right\}.$$

**Proposition 4 (Caractérisation de  $H_0^1(\Omega)$ )**  $H_0^1(\Omega)$  est égal au noyau de  $\gamma_0$ , i.e. on a

$$H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0 = \{ u \in H^1(\Omega) ; \gamma_0 u = 0 \}.$$

**Preuve.** Voir [7], Théorème 2, page 273]. ■

Nous terminons cette section en rappelant quelques propriétés concernant les parties positives et négatives des fonctions dans  $H^1(\Omega)$ .

**Définition 10** Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un ensemble  $X$ . On pose

1)  $f_+ \stackrel{\text{déf}}{=} \max \{ f, 0 \} = 1_{f \geq 0} f = \frac{|f|+f}{2}$ , i.e.  $f_+$  désigne la fonction définie sur  $X$  par

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \leq 0, \end{cases}$$

2)  $f_- \stackrel{\text{déf}}{=} (-f)_+ = \max \{ -f, 0 \} = -1_{f \leq 0} f = \frac{|f|-f}{2}$ , i.e.  $f_-$  désigne la fonction définie sur  $X$  par

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0, \end{cases}$$

où  $1_{f \geq 0}$  (respectivement  $1_{f \leq 0}$ ) désigne la fonction indicatrice de l'ensemble  $\{x \in X ; f(x) \geq 0\}$  (respectivement  $\{x \in X ; f(x) \leq 0\}$ ).

**Théorème 12** Soit  $u \in H^1(\Omega)$ . Alors

- 1)  $1_{u=0} \nabla u = 0$ ,
- 2)  $u_+ \in H^1(\Omega)$ ,  $\gamma_0 u_+ = (\gamma_0 u)_+$  et  $\nabla u_+ = 1_{u>0} \nabla u$ ,
- 3)  $u_- \in H^1(\Omega)$ ,  $\gamma_0 u_- = (\gamma_0 u)_-$  et  $\nabla u_- = -1_{u<0} \nabla u$ .

**Preuve.** Voir [5], Théorème 2.8, page 28, et Corollaire 2.1, page 30]. ■

### 1.4.1 Opérateur de troncature associé à une paire de fonctions

On se donne une paire  $(\underline{u}, \bar{u}) \in H^1(\Omega)^2$  telle que  $\underline{u} \leq \bar{u}$ , i.e.  $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x)$  p. p  $x \in \Omega$ .

**Définition 11 (l'opérateur de troncature associé à la paire  $(\underline{u}, \bar{u})$ )** Pour  $u \in L^2(\Omega)$ , on désigne par  $T(u)$  la fonction définie sur  $\Omega$  par

$$T(u)(x) = \begin{cases} \underline{u}(x) & \text{si } u(x) < \underline{u}(x) \\ u(x) & \text{si } \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x) \\ \bar{u}(x) & \text{si } u(x) > \bar{u}(x). \end{cases} \quad (1.21)$$

**Notation 1** Dans la suite, lorsque  $u \in L^2(\Omega)$ , la fonction indicatrice de l'ensemble  $\{x \in \Omega ; u(x) < \underline{u}(x)\}$  sera notée  $1_{u < \underline{u}}$ , la fonction indicatrice de l'ensemble  $\{x \in \Omega ; u(x) > \bar{u}(x)\}$  sera notée  $1_{u > \bar{u}}$ , la fonction indicatrice de l'ensemble  $\{x \in \Omega ; \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x)\}$  sera notée  $1_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}}$ , etc.

**Remarque 4** Soit  $u \in L^2(\Omega)$ . Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier.

$$\begin{aligned} 1) \quad T(u) &= 1_{u < \underline{u}} \underline{u} + 1_{u > \bar{u}} \bar{u} + 1_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}} u \\ &= \frac{1}{2} (|u - \underline{u}| - |u - \bar{u}| + \underline{u} + \bar{u}) \\ &= \frac{1}{2} ((u - \underline{u})_+ + (u - \underline{u})_- - (u - \bar{u})_+ - (u - \bar{u})_- + \underline{u} + \bar{u}) \\ &= \max\{u, \underline{u}\} + \min\{u, \bar{u}\} - u \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$2) \quad \underline{u} \leq T(u) \leq \bar{u}. \quad (1.23)$$

$$3) \quad T(u) = u \text{ si et seulement si } \underline{u} \leq u \leq \bar{u}. \quad (1.24)$$

$$4) \quad |T(u)| \leq |\bar{u}| + 2|\underline{u}|. \quad (1.25)$$

$$5) \quad T(u) \in L^2(\Omega).$$

6)  $T(u) = N_\tau(u)$ , où  $N_\tau$  est l'opérateur de Nemytskii engendré par la fonction de Carathéodory  $\tau : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\tau(x, \eta) = \frac{1}{2} (|\eta - \underline{u}(x)| - |\eta - \bar{u}(x)| + \underline{u}(x) + \bar{u}(x)).$$

On remarque que la fonction  $\tau$  satisfait la condition de croissance

$$\text{p.p. } x \in \Omega, \quad |\tau(x, \eta)| \leq |\bar{u}(x)| + 2|\underline{u}(x)|, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

7)  $T$  est une application continue de  $L^2(\Omega)$  dans lui-même.

**Lemme 2 (d'autres propriétés de l'opérateur  $T$ )**

1) Soit  $u \in H^1(\Omega)$ . Alors  $T(u) \in H^1(\Omega)$  et on a

$$\nabla T(u) = 1_{u < \underline{u}} \nabla \underline{u} + 1_{u > \bar{u}} \nabla \bar{u} + 1_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}} \nabla u, \quad (1.26)$$

c'est-à-dire, pour presque tout  $x \in \Omega$ , on a

$$(\nabla T(u))(x) = \begin{cases} \nabla \underline{u}(x) & \text{si } u(x) < \underline{u}(x) \\ \nabla u(x) & \text{si } \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x) \\ \nabla \bar{u}(x) & \text{si } u(x) > \bar{u}(x). \end{cases} \quad (1.27)$$

2)  $T$  est une application continue de  $H^1(\Omega)$  dans lui-même.

3) Soit  $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance (locale)

il existe une fonction  $h \in L^2(\Omega)$  et une constante  $c \in \mathbb{R}_+^*$  telles que

$$\text{p.p. } x \in \Omega, \quad |g(x, \eta, \xi)| \leq h(x) + c|\xi|, \quad \forall (\eta, \xi) \in [\underline{u}(x), \bar{u}(x)] \times \mathbb{R}^n.$$

On désigne par  $N_g$  l'opérateur de Nemytskii engendré par  $g$  et on pose

$$N_g \circ T(u) = N_g(T(u), \nabla T(u)), \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Alors  $N_g \circ T$  est une application continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

**Preuve.**

1) En vertu de la remarque (4), on a par la formule (1.22)

$$T(u) = \frac{1}{2} \left( (u - \underline{u})_+ + (u - \underline{u})_- - (u - \bar{u})_+ - (u - \bar{u})_- + \underline{u} + \bar{u} \right).$$

D'où, en utilisant le théorème (12),  $T(u) \in H^1(\Omega)$  et

$$\begin{aligned} \nabla T(u) &= \frac{1}{2} \left( \nabla (u - \underline{u})_+ + \nabla (u - \underline{u})_- - \nabla (u - \bar{u})_+ - \nabla (u - \bar{u})_- + \nabla \underline{u} + \nabla \bar{u} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1_{u > \underline{u}} \nabla (u - \underline{u}) - 1_{u < \underline{u}} \nabla (u - \underline{u}) - 1_{u > \bar{u}} \nabla (u - \bar{u}) + 1_{u < \bar{u}} \nabla (u - \bar{u}) + \nabla \underline{u} + \nabla \bar{u}) \\ &= \frac{1}{2} (-1_{u > \underline{u}} + 1_{u < \underline{u}} + 1) \nabla \underline{u} + \frac{1}{2} (1_{u > \bar{u}} - 1_{u < \bar{u}} + 1) \nabla \bar{u} \\ &\quad + \frac{1}{2} (1_{u > \underline{u}} - 1_{u < \underline{u}} - 1_{u > \bar{u}} + 1_{u < \bar{u}}) \nabla u \\ &= \frac{1}{2} (21_{u < \underline{u}} + 1_{u = \underline{u}}) \nabla \underline{u} + \frac{1}{2} (21_{u > \bar{u}} + 1_{u = \bar{u}}) \nabla \bar{u} \\ &\quad + \frac{1}{2} (21_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}} - 1_{u = \underline{u}} - 1_{u = \bar{u}}) \nabla u \\ &= 1_{u < \underline{u}} \nabla \underline{u} + 1_{u > \bar{u}} \nabla \bar{u} + 1_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}} \nabla u + \frac{1}{2} 1_{u = \underline{u}} \nabla (\underline{u} - u) + \frac{1}{2} 1_{u = \bar{u}} \nabla (\bar{u} - u) \\ &= 1_{u < \underline{u}} \nabla \underline{u} + 1_{u > \bar{u}} \nabla \bar{u} + 1_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}} \nabla u + 0 + 0 = 1_{u < \underline{u}} \nabla \underline{u} + 1_{u > \bar{u}} \nabla \bar{u} + 1_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}} \nabla u. \end{aligned}$$

2) Pour la preuve de ce point, on renvoie à [4], Lemme 2.89, page 35].

3) On pose

$$\tilde{g}(x, \eta, \xi) = g \left( x, \frac{1}{2} (|\eta - \underline{u}(x)| - |\eta - \bar{u}(x)| + \underline{u}(x) + \bar{u}(x)), \xi \right), \quad (x, \eta, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Il est clair que  $\tilde{g}$  est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance

$$\text{p.p. } x \in \Omega, \quad |\tilde{g}(x, \eta, \xi)| \leq h(x) + c|\xi| \leq h(x) + c|(\eta, \xi)|, \quad \forall (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Il s'ensuit, en vertu du théorème 6, que l'opérateur de Nemytskii  $N_{\tilde{g}}$ , engendré par la fonction  $\tilde{g}$ , envoie continûment  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^n$  dans  $L^2(\Omega)$ . En observant la définition de  $\tilde{g}$ , on remarque la relation suivante entre les deux opérateurs  $N_{\tilde{g}}$  et  $N_g$  :

$$N_{\tilde{g}}(u, U) = N_g(T(u), U), \quad \forall (u, U) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^n.$$

D'autre part, puisque  $T$  envoie continûment  $H^1(\Omega)$  dans lui-même, l'application

$$u \longmapsto (u, T(u)) \longmapsto (u, \nabla T(u))$$

est continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^n$ . Par conséquent, l'application

$$u \longmapsto N_{\tilde{g}}(u, \nabla T(u)) = N_g(T(u), \nabla T(u))$$

est continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ . ■

### 1.4.2 Première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet

On aura besoin du résultat suivant (ici l'ouvert  $\Omega$  doit être de classe  $C^2$ ).

**Proposition 5** *Il existe un nombre réel  $\lambda_1 > 0$ , appelé première valeur propre de  $-\Delta$  avec condition de Dirichlet, et il existe une fonction  $\varphi_1 \in C^1(\overline{\Omega})$ , appelée fonction propre associée à  $\lambda_1$ , tels que*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & \text{dans } \Omega \\ \varphi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\varphi_1(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

**Preuve.** Voir [11], Remarque 9.2, page 224, et Proposition 9.8, page 229]. ■

---

---

## CHAPITRE 2

---

# Méthode de sous- et sur-solution pour un problème elliptique non linéaire avec une condition aux limites de Robin-Neumann

Dans ce chapitre, nous étudions un problème elliptique avec une condition aux limites de type Robin et qui comprend un terme de convection dépendant de manière non linéaire de la solution et de son gradient. La condition aux limites considérée est suffisamment flexible pour inclure également le type Neumann. Inspirés par les travaux effectués dans [9], [10], nous utilisons l'approche de sous- et sur-solution pour obtenir un résultat d'existence et de localisation d'une solution faible. Ensuite, nous appliquons ce résultat pour prouver l'existence de solutions faibles positives.

### 2.1 Présentation du problème

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) un domaine (c'est-à-dire un ouvert connexe) borné de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$  et dont la normale extérieure unitaire en tout point  $x \in \partial\Omega$  est notée  $\nu(x)$ . On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + a_0(x)u = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ A(x)\nabla u \cdot \nu(x) + b_0(x)u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{P})$$

et on formule les hypothèses suivantes sur ses composantes :

- (H1)  $A \in L^\infty(\Omega)^{n \times n}$ , i.e.  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  avec  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ,
- (H2) il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que  $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ , p.p.  $x \in \Omega$ ,
- (H3)  $a_0 \in L^\infty(\Omega)$  avec  $a_0(x) \geq 0$  p.p.  $x \in \Omega$ ,
- (H4)  $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Carathéodory, i.e.  $f(x, \cdot, \cdot)$  est continue pour presque tout  $x \in \Omega$  et  $f(\cdot, \eta, \xi)$  est mesurable pour tout  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,
- (H5)  $b_0 \in L^\infty(\partial\Omega)$  avec  $b_0(x) \geq 0$ , p.p.  $x \in \partial\Omega$ ,
- (H6)  $\max \left\{ \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|b_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right\} > 0$ , i.e.  $a_0 \neq 0$  ou  $b_0 \neq 0$ .

On remarque que  $(P)$  est un problème de Robin « pur » si  $b_0 \neq 0$  et est un problème de Neumann « pur » si  $b_0 = 0$ .

## 2.2 Formulation faible du problème

On suppose que  $A \in C^1(\bar{\Omega})^{n \times n}$ ,  $u \in H^2(\Omega)$  et que  $f(\cdot, u, \nabla u) \in L^2(\Omega)$ . Vu que

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

la première composante du problème  $(P)$  s'écrit

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u = f(x, u, \nabla u). \quad (2.1)$$

En multipliant les deux membres de l'équation  $(2.1)$  par une fonction test  $v \in H^1(\Omega)$  et intégrant sur  $\Omega$ , on obtient

$$- \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) v dx.$$

En exploitant la formule  $(1.20)$ , il vient

$$- \sum_{i,j=1}^n \left( - \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \left( a_{ij} \gamma_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right) (\gamma_0 v) \nu_i d\sigma \right) + \int_{\Omega} a_0 u v dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) v dx,$$

i.e.

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial\Omega} \left( a_{ij} \gamma_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right) (\gamma_0 v) \nu_i d\sigma + \int_{\Omega} a_0 u v dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) v dx,$$

i.e.

$$\int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} (A\gamma_0(\nabla u) \cdot \nu) (\gamma_0 v) d\sigma + \int_{\Omega} a_0 u v dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) v dx,$$

où on a posé  $\gamma_0(\nabla u) = \left( \gamma_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \dots, \gamma_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \right)$ .

En tenant compte de la condition aux limites «  $A(x)\nabla u \cdot \nu(x) + b_0(x)u = 0$  sur  $\partial\Omega$  », i.e.  $A(x)\gamma_0(\nabla u) \cdot \nu(x) = -b_0(x)\gamma_0 u$ , on arrive à l'équation

$$\int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx + \int_{\partial\Omega} b_0(\gamma_0 u)(\gamma_0 v) d\sigma = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) v dx.$$

Toutes les intégrales apparaissant dans la dernière équation existent dès que  $(A, u) \in L^\infty(\Omega)^{n \times n} \times H^1(\Omega)$ , c'est-à-dire que nous n'avons plus besoin de l'hypothèse plus forte

$(A, u) \in C^1(\bar{\Omega})^{n \times n} \times H^2(\Omega)$  faite au départ. En effet, compte tenu de la remarque **1** (les propriétés **b**, **d** et **2**), on a

$$\begin{aligned} (A, \nabla u, \nabla v) &\in L^\infty(\Omega)^{n \times n} \times L^2(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n \implies (A\nabla u, \nabla v) \in L^2(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n \\ &\implies A\nabla u \cdot \nabla v \in L^1(\Omega), \\ (a_0, u, v) &\in L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega)^2 \implies (a_0 u, v) \in L^2(\Omega)^2 \implies a_0 u v \in L^1(\Omega), \\ (b_0, \gamma_0 u, \gamma_0 v) &\in L^\infty(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)^2 \implies (b_0(\gamma_0 u), \gamma_0 v) \in L^2(\partial\Omega)^2 \\ &\implies b_0(\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \in L^1(\partial\Omega), \end{aligned}$$

et

$$(f(\cdot, u, \nabla u), v) \in L^2(\Omega)^2 \implies f(\cdot, u, \nabla u)v \in L^1(\Omega).$$

En conclusion, nous avons la formulation faible suivante du problème **P**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } f(\cdot, u, \nabla u) \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \\ \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx + \int_{\partial\Omega} b_0(\gamma_0 u)(\gamma_0 v) d\sigma = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u)v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (\text{PV})$$

Dans la suite, lorsque  $u \in H^1(\Omega)$ , on utilisera la notation  $N_f(u) = N_f(u, \nabla u)$ , où  $N_f$  est l'opérateur de Nemytskii engendré par  $f$  (voir la définition **6**).

En posant

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx + \int_{\partial\Omega} b_0(\gamma_0 u)(\gamma_0 v) d\sigma, \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega)^2, \quad (2.2)$$

on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } N_f(u) \in L^2(\Omega) \text{ et} \\ a(u, v) = \int_{\Omega} N_f(u)v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (\text{PV})$$

**Définition 12 (Solution faible)** Une fonction  $u \in H^1(\Omega)$  est dite solution (faible) du problème **P** si  $u$  est une solution de **PV**, i.e. si

$$N_f(u) \in L^2(\Omega)$$

et

$$a(u, v) = \int_{\Omega} N_f(u)v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On introduit la notation

$$(H^1(\Omega))_+ = \{u \in H^1(\Omega); u(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

**Définition 13 (Sous-solution faible et sur-solution faible)**

1) Une fonction  $\underline{u} \in H^1(\Omega)$  est dite sous-solution (faible) de **P** si

$$N_f(\underline{u}) \in L^2(\Omega)$$

et

$$a(\underline{u}, v) \leq \int_{\Omega} N_f(\underline{u})v dx, \quad \forall v \in (H^1(\Omega))_+. \quad (2.3)$$

2) Une fonction  $\bar{u} \in H^1(\Omega)$  est dite sur-solution (faible) de  $(\bar{P})$  si

$$N_f(\bar{u}) \in L^2(\Omega)$$

et

$$a(\bar{u}, v) \geq \int_{\Omega} N_f(\bar{u})v dx, \quad \forall v \in (H^1(\Omega))_+. \quad (2.4)$$

3) Si  $\underline{u}$  est une sous-solution de  $(\bar{P})$  et  $\bar{u}$  est une sur-solution de  $(\bar{P})$  et  $\underline{u} \leq \bar{u}$ , on dira que  $(\underline{u}, \bar{u})$  est une paire ordonnée de sous- et sur-solution de  $(\bar{P})$ .

## 2.3 La mise en œuvre de la méthode de sous- et sur-solution

En plus des hypothèses **(H1)**-**(H6)**, pour pouvoir appliquer la méthode de sous- et sur-solution on a besoin de deux autres hypothèses. L'une concerne l'existence d'une paire ordonnée de sous- et sur-solution, ce qui constitue un ingrédient de base de cette méthode, l'autre concerne la croissance locale de la fonction  $f$ .

**(H7)** On dispose d'une paire ordonnée de sous- et sur-solution  $(\underline{u}, \bar{u})$  de  $(\bar{P})$ .

**(H8)** Il existe  $f_0 \in L^2(\Omega)$  et  $c \in \mathbb{R}_+^*$  tels que

$$\text{p.p. } x \in \Omega, \quad |f(x, \eta, \xi)| \leq f_0(x) + c|\xi|, \quad \forall (\eta, \xi) \in [\underline{u}(x), \bar{u}(x)] \times \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Notre but maintenant est de prouver que sous les hypothèses **(H1)**-**(H8)**,  $(\bar{P})$  admet (au moins) une solution  $u$  comprise entre la sous-solution et la sur-solution, i.e.  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ . Pour y arriver, on suit le schéma habituel de la méthode de sous- et sur-solution. On exploite la présence de la paire  $(\underline{u}, \bar{u})$  pour fabriquer un problème auxiliaire  $(\bar{P})$  dont chaque solution faible est une solution de  $(\bar{P})$  comprise entre  $\underline{u}$  et  $\bar{u}$  et pour lequel les outils de résolution sont disponibles.

### 2.3.1 Résultat d'existence pour un problème auxiliaire

On pose

$$a_{\alpha}(x) = a_0(x) + \alpha, \quad x \in \Omega,$$

et

$$f_{\alpha}(x, \eta, \xi) = f(x, \eta, \xi) + \alpha\eta, \quad (x, \eta, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Notons que  $f_{\alpha}$  est clairement une fonction de Carathéodory et qu'on a, en raison de **(H8)**,

$$\text{p.p. } x \in \Omega, \quad |f_{\alpha}(x, \eta, \xi)| \leq g_0(x) + c|\xi|, \quad \forall (\eta, \xi) \in [\underline{u}(x), \bar{u}(x)] \times \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

avec  $g_0 = f_0 + \alpha(|\bar{u}| + 2|\underline{u}|) \in L^2(\Omega)$ .

On désigne par  $T$  l'opérateur de troncature associé à la paire  $(\underline{u}, \bar{u})$  (voir la définition [\(11\)](#)) et on introduit le problème auxiliaire

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + a_\alpha(x)u = f_\alpha(x, T(u), \nabla T(u)) & \text{dans } \Omega \\ A(x)\nabla u \cdot \nu(x) + b_0(x)u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\tilde{P})$$

dont la formulation faible est

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_\alpha u v dx + \int_{\partial\Omega} b_0(\gamma_0 u)(\gamma_0 v) d\sigma = \int_{\Omega} f_\alpha(x, T(u), \nabla T(u)) v dx, \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (\tilde{P}V)$$

En désignant par  $N_{f_\alpha}$  l'opérateur de Nemytskii engendré par la fonction  $f_\alpha$  et en posant

$$b(u, v) = a(u, v) + \alpha \int_{\Omega} u v dx, \forall (u, v) \in H^1(\Omega)^2, \quad (2.7)$$

on peut écrire

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ b(u, v) = \int_{\Omega} (N_{f_\alpha} \circ T)(u) v dx, \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (\tilde{P}V)$$

**Lemme 3 (un résultat d'existence pour [\(P̃V\)](#))** *Sous les hypothèses **(H1)**-**(H8)**, le problème [\(P̃V\)](#) admet au moins une solution.*

**Preuve.** On applique le théorème [\(3\)](#) en prenant  $V = L^2(\Omega)$ ,  $H = H^1(\Omega)$ ,  $F = N_{f_\alpha} \circ T$ , et en montrant que toutes ses conditions sont satisfaites. Il est clair que  $L^2(\Omega)$  et  $H^1(\Omega)$  sont des espaces de Hilbert. D'après le théorème [\(11\)](#), on a  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , c'est-à-dire que la condition **HV** est satisfaite. Montrons qu'il en est de même pour toutes les autres conditions.

Montrons que la condition **b1** est satisfaite. Il est clair que  $b(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ . D'autre part, pour tout  $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , on a, en exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité [\(1.14\)](#), la proposition [\(3\)](#), la remarque [\(2\)](#) (les inégalités [1.16](#) et [1.15](#)) et le théorème [\(9\)](#),

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx + \int_{\partial\Omega} b_0(\gamma_0 u)(\gamma_0 v) d\sigma + \alpha \int_{\Omega} u v dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx \right| + \left| \int_{\Omega} a_0 u v dx \right| + \left| \int_{\partial\Omega} b_0(\gamma_0 u)(\gamma_0 v) d\sigma \right| + \left| \alpha \int_{\Omega} u v dx \right| \\ &\leq \|A\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} + \|a_0 u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|b_0 \gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\quad + \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left( \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|b_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq \left( \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + \|b_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} C_{\gamma_0}^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \\
&= \left( \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|b_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} C_{\gamma_0}^2 + \alpha \right) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que  $b(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire continue sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ .

Passons à la condition **b2**. Pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ , on a, en raison des hypothèses **(H2)**, **(H3)**, **(H5)**,

$$\begin{aligned}
b(u, u) &= \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega} a_0 u^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} b_0 (\gamma_0 u)^2 \, d\sigma + \alpha \int_{\Omega} u^2 \, dx \\
&\geq \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \alpha \int_{\Omega} u^2 \, dx \\
&\geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \alpha \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&= \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Donc  $b(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $H^1(\Omega)$ .

Montrons maintenant que les conditions **F1** et **F2** sont satisfaites. D'après le lemme 2 (la propriété 3),  $N_{f_\alpha} \circ T$  est une application continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , c'est-à-dire que la condition **F1** est satisfaite. Soit  $u \in H^1(\Omega)$ . En exploitant (2.6) et (1.26), on a

$$\begin{aligned}
|N_{f_\alpha} \circ T(u)| &= |f_\alpha(\cdot, T(u)(\cdot), \nabla T(u)(\cdot))| \\
&\leq g_0 + c |\nabla T(u)| \\
&= g_0 + c |1_{u < \underline{u}} \nabla \underline{u} + 1_{u > \bar{u}} \nabla \bar{u} + 1_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}} \nabla u| \\
&\leq g_0 + c (|\nabla \underline{u}| + |\nabla \bar{u}| + |\nabla u|).
\end{aligned}$$

D'où, en exploitant (1.16),

$$\begin{aligned}
\|N_{f_\alpha} \circ T(u)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|g_0 + c (|\nabla \underline{u}| + |\nabla \bar{u}| + |\nabla u|)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|g_0\|_{L^2(\Omega)} + c \left( \|\nabla \underline{u}\|_{L^2(\Omega)^n} + \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)^n} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \right) \\
&\leq \left( \|g_0\|_{L^2(\Omega)} + c \|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)} + c \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \right) + c \|u\|_{H^1(\Omega)} \\
&= c_1 + c \|u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.8}
\end{aligned}$$

où

$$c_1 = \|g_0\|_{L^2(\Omega)} + c \|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)} + c \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} N_{f_\alpha} \circ T(u) &= 1_{u < \underline{u}} N_{f_\alpha} \circ T(u) + 1_{u > \bar{u}} N_{f_\alpha} \circ T(u) + 1_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}} N_{f_\alpha} \circ T(u) \\ &= 1_{u < \underline{u}} N_{f_\alpha}(\underline{u}) + 1_{u > \bar{u}} N_{f_\alpha}(\bar{u}) + 1_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}} N_{f_\alpha}(u). \end{aligned}$$

En exploitant une fois de plus (2.6) et en utilisant la remarque 4 ((1.24) et (1.25)), on en déduit que

$$\begin{aligned} |N_{f_\alpha} \circ T(u)u| &\leq 1_{u < \underline{u}} (g_0 + c |\nabla T(\underline{u})|) |u| + 1_{u > \bar{u}} (g_0 + c |\nabla T(\bar{u})|) |u| \\ &\quad + 1_{\underline{u} \leq u \leq \bar{u}} (g_0 + c |\nabla T(u)|) |u| \\ &\leq (g_0 + c |\nabla T(\underline{u})|) |u| + (g_0 + c |\nabla T(\bar{u})|) |u| + (g_0 + c |\nabla T(u)|) (|\bar{u}| + 2|\underline{u}|) \\ &= (|\bar{u}| + 2|\underline{u}|) g_0 + (2g_0 + c |\nabla \underline{u}| + c |\nabla \bar{u}|) |u| + c (|\bar{u}| + 2|\underline{u}|) |\nabla u|, \end{aligned}$$

donc, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \left| (N_{f_\alpha} \circ T(u) | u)_{L^2(\Omega)} \right| &= \left| \int_{\Omega} N_{f_\alpha} \circ T(u) u dx \right| \\ &\leq \| |\bar{u}| + 2|\underline{u}| \|_{L^2(\Omega)} \|g_0\|_{L^2(\Omega)} + \|2g_0 + c |\nabla \underline{u}| + c |\nabla \bar{u}|\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c \| |\bar{u}| + 2|\underline{u}| \|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \\ &\leq c_2 + c_3 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

où  $c_2 = \| |\bar{u}| + 2|\underline{u}| \|_{L^2(\Omega)} \|g_0\|_{L^2(\Omega)}$

et  $c_3 = \|2g_0 + c |\nabla \underline{u}| + c |\nabla \bar{u}|\|_{L^2(\Omega)} + c \| |\bar{u}| + 2|\underline{u}| \|_{L^2(\Omega)}$ .

En prenant  $C = \max \{c_1 + c_2, c + c_3\}$ , on déduit de (2.8) et (2.9) que

$$\|N_{f_\alpha} \circ T(u)\|_{L^2(\Omega)} + \left| (N_{f_\alpha} \circ T(u) | u)_{L^2(\Omega)} \right| \leq C(1 + \|u\|_{H^1(\Omega)}), \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Toutes les conditions du théorème 3 étant satisfaites, on conclut que le problème (PV) admet au moins une solution. ■

### 2.3.2 Résultat d'existence pour le problème (P)

**Théorème 13 (un résultat d'existence pour (PV))** *Sous les hypothèses (H1)-(H8) le problème (PV) admet au moins une solution.*

**Preuve.** D'après le lemme 3, le problème (PV) admet au moins une solution  $u$ . On va montrer que  $u$  est aussi une solution de (P). Pour cela, il suffit de prouver que  $T(u) = u$ , ou de manière équivalente que  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ .

Comme  $\bar{u}$  est une sur-solution de (P), on a l'inéquation (2.4), et comme  $u$  est une solution de (PV), on a l'équation

$$b(u, v) = \int_{\Omega} N_{f_\alpha} \circ T(u) v dx, \quad \forall v \in (H^1(\Omega))_+. \tag{2.10}$$

En soustrayant (2.4) de (2.10), on déduit que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A \nabla(u - \bar{u}) \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0(u - \bar{u})v dx + \int_{\partial\Omega} b_0 \gamma_0(u - \bar{u}) \gamma_0 v d\sigma \\ & \leq \int_{\Omega} (f(x, T(u), \nabla T(u)) - f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}))v dx + \alpha \int_{\Omega} (T(u) - u)v dx, \forall v \in (H^1(\Omega))_+, \end{aligned}$$

et, en choisissant  $v = (u - \bar{u})_+$ , par (1.21) et (1.27) il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A \nabla(u - \bar{u}) \cdot \nabla(u - \bar{u})_+ dx + \int_{\Omega} a_0(u - \bar{u})(u - \bar{u})_+ dx \\ & + \int_{\partial\Omega} b_0 \gamma_0(u - \bar{u}) \gamma_0(u - \bar{u})_+ d\sigma \\ & \leq \int_{\Omega} (f(x, T(u), \nabla T(u)) - f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}))(u - \bar{u})_+ dx + \alpha \int_{\Omega} (T(u) - u)(u - \bar{u})_+ dx \\ & = \int_{\Omega} (f(x, T(u), \nabla T(u)) - f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}))1_{u \geq \bar{u}}(u - \bar{u}) dx + \alpha \int_{\Omega} (T(u) - u)1_{u \geq \bar{u}}(u - \bar{u}) dx \\ & = \int_{\Omega} (f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) - f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}))1_{u \geq \bar{u}}(u - \bar{u}) dx + \alpha \int_{\Omega} (\bar{u} - u)1_{u \geq \bar{u}}(u - \bar{u}) dx \\ & = -\alpha \int_{\Omega} ((u - \bar{u})_+)^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

D'autre part, en exploitant le théorème 12 et (H2) on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A \nabla(u - \bar{u}) \cdot \nabla(u - \bar{u})_+ dx + \int_{\Omega} a_0(u - \bar{u})(u - \bar{u})_+ dx \\ & + \int_{\partial\Omega} b_0 \gamma_0(u - \bar{u}) \gamma_0(u - \bar{u})_+ d\sigma \\ & = \int_{\Omega} A \nabla(u - \bar{u}) \cdot (1_{u > \bar{u}} \nabla(u - \bar{u})) dx + \int_{\Omega} a_0(u - \bar{u})1_{u \geq \bar{u}}(u - \bar{u}) dx \\ & + \int_{\partial\Omega} b_0 \gamma_0(u - \bar{u})1_{\gamma_0 u \geq \gamma_0 \bar{u}} \gamma_0(u - \bar{u}) d\sigma \\ & = \int_{\Omega} A(1_{u > \bar{u}} \nabla(u - \bar{u})) \cdot (1_{u > \bar{u}} \nabla(u - \bar{u})) dx + \int_{\Omega} a_0 1_{u \geq \bar{u}}(u - \bar{u})1_{u \geq \bar{u}}(u - \bar{u}) dx \\ & + \int_{\partial\Omega} b_0 1_{\gamma_0 u \geq \gamma_0 \bar{u}} \gamma_0(u - \bar{u})1_{\gamma_0 u \geq \gamma_0 \bar{u}} \gamma_0(u - \bar{u}) d\sigma \\ & = \int_{\Omega} A \nabla(u - \bar{u})_+ \cdot \nabla(u - \bar{u})_+ dx + \int_{\Omega} a_0 ((u - \bar{u})_+)^2 dx + \int_{\partial\Omega} b_0 (\gamma_0(u - \bar{u})_+)^2 d\sigma \\ & \geq \alpha \|\nabla(u - \bar{u})_+\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \int_{\Omega} a_0 ((u - \bar{u})_+)^2 dx + \int_{\partial\Omega} b_0 (\gamma_0(u - \bar{u})_+)^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\nabla(u - \bar{u})_+ = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} a_0((u - \bar{u})_+)^2 dx + \int_{\partial\Omega} b_0(\gamma_0(u - \bar{u})_+)^2 d\sigma = 0.$$

Comme  $\Omega$  est connexe, on déduit que la fonction  $(u - \bar{u})_+$  est constante sur  $\Omega$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $(u - \bar{u})_+ = C$  (voir la remarque [2](#)). Ainsi par le théorème de trace [9](#),  $\gamma_0(u - \bar{u})_+ = C$  et, de ce fait,

$$C^2 \left( \int_{\Omega} a_0 dx + \int_{\partial\Omega} b_0 d\sigma \right) = 0.$$

En raison de l'hypothèse **(H6)**, ceci implique  $C = 0$ , donc  $(u - \bar{u})_+ = 0$ , i.e.  $u \leq \bar{u}$ .

Par une démarche similaire, on va monter que  $u \geq \underline{u}$ , en utilisant cette fois le fait que  $\underline{u}$  est une sous-solution de [\(P\)](#).

En soustrayant [\(2.10\)](#) de [\(2.3\)](#), on déduit que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A \nabla(\underline{u} - u) \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0(\underline{u} - u)v dx + \int_{\partial\Omega} b_0 \gamma_0(\underline{u} - u) \gamma_0 v d\sigma \\ & \leq \int_{\Omega} (f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) - f(x, T(u), \nabla T(u)))v dx + \alpha \int_{\Omega} (u - T(u))v dx, \quad \forall v \in (H^1(\Omega))_+. \end{aligned}$$

En choisissant  $v = (\underline{u} - u)_+$ , par [\(1.21\)](#) et [\(1.27\)](#) il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A \nabla(\underline{u} - u) \cdot \nabla(\underline{u} - u)_+ dx + \int_{\Omega} a_0(\underline{u} - u)(\underline{u} - u)_+ dx \\ & + \int_{\partial\Omega} b_0 \gamma_0(\underline{u} - u) \gamma_0(\underline{u} - u)_+ d\sigma \\ & \leq \int_{\Omega} (f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) - f(x, T(u), \nabla T(u)))(\underline{u} - u)_+ dx + \alpha \int_{\Omega} (u - T(u))(\underline{u} - u)_+ dx \\ & = \int_{\Omega} (f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) - f(x, T(u), \nabla T(u)))1_{u \leq \underline{u}}(\underline{u} - u) dx + \alpha \int_{\Omega} (u - T(u))1_{u \leq \underline{u}}(\underline{u} - u) dx \\ & = \int_{\Omega} (f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) - f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}))1_{u \leq \underline{u}}(\underline{u} - u) dx + \alpha \int_{\Omega} (u - \underline{u})1_{u \leq \underline{u}}(\underline{u} - u) dx \\ & = -\alpha \int_{\Omega} ((\underline{u} - u)_+)^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

D'autre part, on a en utilisant le théorème [12](#) et **(H2)**

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} A \nabla(\underline{u} - u) \cdot \nabla(\underline{u} - u)_+ dx + \int_{\Omega} a_0(\underline{u} - u)(\underline{u} - u)_+ dx + \int_{\partial\Omega} b_0 \gamma_0(\underline{u} - u) \gamma_0(\underline{u} - u)_+ d\sigma \\
 = & \int_{\Omega} A \nabla(\underline{u} - u) \cdot (1_{\underline{u} < u} \nabla(\underline{u} - u)) dx + \int_{\Omega} a_0(\underline{u} - u) 1_{\underline{u} \leq u} (\underline{u} - u) dx \\
 & + \int_{\partial\Omega} b_0 \gamma_0(\underline{u} - u) 1_{\gamma_0 \underline{u} \leq \gamma_0 u} \gamma_0(\underline{u} - u) d\sigma \\
 = & \int_{\Omega} A (1_{\underline{u} < u} \nabla(\underline{u} - u)) \cdot (1_{\underline{u} < u} \nabla(\underline{u} - u)) dx + \int_{\Omega} a_0 1_{\underline{u} \leq u} (\underline{u} - u) 1_{\underline{u} \leq u} (\underline{u} - u) dx \\
 & + \int_{\partial\Omega} b_0 1_{\gamma_0 \underline{u} \leq \gamma_0 u} \gamma_0(\underline{u} - u) 1_{\gamma_0 \underline{u} \leq \gamma_0 u} \gamma_0(\underline{u} - u) d\sigma \\
 = & \int_{\Omega} A \nabla(\underline{u} - u)_+ \cdot \nabla(\underline{u} - u)_+ dx + \int_{\Omega} a_0 ((\underline{u} - u)_+)^2 dx + \int_{\partial\Omega} b_0 (\gamma_0(\underline{u} - u)_+)^2 d\sigma \\
 \geq & \alpha \|\nabla(\underline{u} - u)_+\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \int_{\Omega} a_0 ((\underline{u} - u)_+)^2 dx + \int_{\partial\Omega} b_0 (\gamma_0(\underline{u} - u)_+)^2 d\sigma.
 \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\nabla(\underline{u} - u)_+ = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} a_0 ((\underline{u} - u)_+)^2 dx + \int_{\partial\Omega} b_0 (\gamma_0(\underline{u} - u)_+)^2 d\sigma = 0.$$

Comme  $\Omega$  est connexe, on déduit que la fonction  $(\underline{u} - u)_+$  est constante sur  $\Omega$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $(\underline{u} - u)_+ = C$  (voir la remarque [2](#)). Ainsi par le théorème de trace [9](#),  $\gamma_0(\underline{u} - u)_+ = C$  et, de ce fait,

$$C^2 \left( \int_{\Omega} a_0 dx + \int_{\partial\Omega} b_0 d\sigma \right) = 0.$$

En raison de l'hypothèse **(H6)**, ceci implique  $C = 0$ , donc  $(\underline{u} - u)_+ = 0$ , i.e.  $\underline{u} \leq u$ . On a ainsi montré que  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ , donc  $u$  est une solution du problème [\(PV\)](#). ■

## 2.4 Application : existence de solutions positives

Comme nous venons de le voir à travers le théorème [13](#), la méthode de sous- et sur-solution peut ramener la question de l'existence d'une solution à celle de l'existence d'une paire ordonnée de sous- et sur-solution. Maintenant nous allons voir qu'il est parfois possible de construire une paire ordonnée de sous- et sur-solution et d'en déduire via le théorème [13](#) l'existence d'une solution positive.

### 2.4.1 Cas d'un problème de Neumann « pur »

On considère d'abord le cas où  $a_0 \not\equiv 0$  et  $b_0 \equiv 0$ , c'est-à-dire le cas où (P) est un problème de Neumann « pur » qu'on écrit

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + a_0(x)u = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ A(x)\nabla u \cdot \nu(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{P1})$$

Comme résultat d'existence d'une solution (faible) positive, nous avons le théorème suivant qui est le fruit d'une adaptation du résultat obtenu dans [9].

#### Théorème 14 (Existence d'une solution positive pour (P1))

En plus des hypothèses (H1)-(H4), supposons que  $a_0 \not\equiv 0$  et qu'il existe  $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^3$  et une fonction  $f_0 \in L^2(\Omega)$  tels que

$$c_1 < c_2,$$

$$f(x, c_1, 0) \geq c_1 a_0(x), \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad (2.11)$$

$$f(x, c_2, 0) \leq c_2 a_0(x), \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad (2.12)$$

$$|f(x, \eta, \xi)| \leq f_0(x) + c_0 |\xi|, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall (\eta, \xi) \in [c_1, c_2] \times \mathbb{R}^n. \quad (2.13)$$

Alors le problème (P1) admet une solution (faible)  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant  $0 < c_1 \leq u(x) \leq c_2$ , p.p.  $x \in \Omega$ .

**Preuve.** On pose  $\underline{u} \equiv c_1$  et  $\bar{u} \equiv c_2$ . On a clairement

$$(\underline{u}, \bar{u}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega),$$

$$\nabla \underline{u} = \nabla \bar{u} \equiv 0,$$

$$\underline{u} \leq \bar{u},$$

et, en raison de (2.13),

$$|f(x, \eta, \xi)| \leq f_0(x) + c_0 |\xi|, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall (\eta, \xi) \in [\underline{u}(x), \bar{u}(x)] \times \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

$$|f(x, \underline{u}(x), \nabla \underline{u}(x))| = |f(x, c_1, 0)| \leq f_0(x), \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad (2.15)$$

$$|f(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))| = |f(x, c_2, 0)| \leq f_0(x), \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \quad (2.16)$$

Remarquons que (2.14) signifie que la condition (2.5) est satisfaite. De (2.15) et (2.16), on déduit que

$$f(\cdot, \underline{u}, \nabla \underline{u}) \in L^2(\Omega)$$

et que

$$f(\cdot, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \in L^2(\Omega).$$

Soit  $v \in (H^1(\Omega))_+$ . Compte tenu de (2.11) et (2.12), on a

$$\int_{\Omega} A \nabla \underline{u} \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0 \underline{u} v dx = \int_{\Omega} c_1 a_0 v dx \leq \int_{\Omega} f(x, c_1, 0) v dx = \int_{\Omega} f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) v dx$$

et

$$\int_{\Omega} A \nabla \bar{u} \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0 \bar{u} v dx = \int_{\Omega} c_2 a_0 v dx \geq \int_{\Omega} f(x, c_2, 0) v dx = \int_{\Omega} f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) v dx.$$

Tout ceci prouve que  $(\underline{u}, \bar{u})$  est une paire ordonnée de sous- et sur-solutions. Les conditions du théorème [13](#) se trouvent ainsi toutes satisfaites, on conclut que le problème [\(P1\)](#) admet une solution (faible)  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant  $0 < c_1 = \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x) = c_2$ , p.p.  $x \in \Omega$ . ■

**Exemple 1 (Une fonction  $f$  satisfaisant les conditions du théorème [14](#))** Soient  $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(e, g) \in L^\infty(\Omega) \times C(\mathbb{R})$  et  $h : \mathbb{R}^n \mapsto [0, +\infty[$  une fonction continue tels que

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < c_2, \\ g(c_1) &\geq 0, \\ g(c_2) &\leq 0, \\ h(0) &= 0, \\ \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{h(\xi)}{1 + |\xi|} &< \infty. \end{aligned}$$

Montrons que la fonction  $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, \eta, \xi) = (a_0(x)\eta + g(\eta))(1 + |\xi|) + e(x)h(\xi)$$

satisfait aux conditions du théorème [14](#). D'abord  $f$  est de Carathéodory parce que les fonctions  $x \mapsto a_0(x)$  et  $x \mapsto e(x)$  sont mesurables et les fonctions  $\eta \mapsto g(\eta)$  et  $\xi \mapsto h(\xi)$  sont continues. Ensuite, en posant

$$\begin{aligned} M_g &= \sup_{\eta \in [c_1, c_2]} |g(\eta)|, \\ M_h &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{h(\xi)}{1 + |\xi|}, \end{aligned}$$

$$c_0 = c_2 \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} + M_g + \|e\|_{L^\infty(\Omega)} M_h$$

et, pour tout  $x \in \Omega$ ,

$$f_0(x) = c_2 a_0(x) + M_g + \|e\|_{L^\infty(\Omega)} M_h,$$

on constate que

$$\begin{aligned} f(x, c_1, 0) &= a_0(x)c_1 + g(c_1) \geq c_1 a_0(x), & \text{p.p. } x \in \Omega, \\ f(x, c_2, 0) &= a_0(x)c_2 + g(c_2) \leq c_2 a_0(x), & \text{p.p. } x \in \Omega, \\ f_0 &\in L^2(\Omega), \\ |f(x, \eta, \xi)| &\leq f_0(x) + c_0 |\xi|, & \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall (\eta, \xi) \in [c_1, c_2] \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

## 2.4.2 Cas du Laplacien

On considère maintenant le cas où  $A$  est la matrice identité. Le problème (P) devient

$$\begin{cases} -\Delta u + a_0(x)u = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \nu(x) + b_0(x)u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{P2})$$

Il s'agit d'un cas particulier du problème traité dans [10]. Dans ce qui suit,  $\lambda_1 > 0$  désigne la première valeur propre de l'opérateur  $-\Delta$  avec condition de Dirichlet et  $\varphi_1$  est une fonction propre associée à  $\lambda_1$ , c'est-à-dire que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & \text{dans } \Omega \\ \varphi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De plus  $\varphi_1 \in C^1(\overline{\Omega})$  et  $\varphi_1(x) > 0, \forall x \in \Omega$  (voir la proposition 5). Comme résultat d'existence d'une solution (faible) positive pour le problème (P2), nous avons le théorème suivant qui est le fruit d'une adaptation du résultat obtenu dans [10].

### Théorème 15 (Existence d'une solution positive pour (P2))

En plus des hypothèses (H3)-(H6), supposons que

$$\varphi_1 \in C^2(\overline{\Omega}), \quad (2.17)$$

$$\nabla\varphi_1(x) \cdot \nu(x) \leq 0, \quad p.p. \quad x \in \partial\Omega \quad (2.18)$$

et qu'il existe  $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^3$  tel que

$$|f(x, \eta, \xi)| \leq c_1(1 + |\xi|), \quad p.p. \quad x \in \Omega, \quad \forall(\eta, \xi) \in ]0, c_2] \times \mathbb{R}^n, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} f(x, \eta, \xi) &\geq (\lambda_1 + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)})\eta, \quad p.p. \quad x \in \Omega, \quad \forall\eta \in ]0, c_0[, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n \\ &\text{avec } |\xi| < c_0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$f(x, c_2, 0) = 0, \quad p.p. \quad x \in \Omega. \quad (2.21)$$

Alors le problème (P2) admet une solution (faible)  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant  $0 < u(x) \leq c_2$ , p.p.  $x \in \Omega$ .

**Preuve.** On pose

$$\bar{u} \equiv c_2 \quad \text{et} \quad \underline{u} = \varepsilon\varphi_1, \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{\min\{c_0, c_2\}}{\max_{x \in \Omega} \varphi_1(x) + \max_{x \in \Omega} |\nabla\varphi_1(x)|}.$$

On a clairement

$$(\underline{u}, \bar{u}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega),$$

$$\nabla\bar{u} \equiv 0,$$

$$\nabla\underline{u} = \varepsilon\nabla\varphi_1,$$

$$|\nabla\underline{u}(x)| = \varepsilon|\nabla\varphi_1(x)| \leq \frac{c_0|\nabla\varphi_1(x)|}{\max_{x \in \Omega} \varphi_1(x) + \max_{x \in \Omega} |\nabla\varphi_1(x)|} < c_0, \quad \forall x \in \Omega,$$

$$\underline{u}(x) \leq \frac{c_2 \varphi_1(x)}{\max_{x \in \Omega} \varphi_1(x) + \max_{x \in \Omega} |\nabla \varphi_1(x)|} < c_2 = \bar{u}(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

et, en raison de (2.19) et (2.21),

$$|f(x, \eta, \xi)| \leq c_1 + c_1 |\xi|, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall (\eta, \xi) \in [\underline{u}(x), \bar{u}(x)] \times \mathbb{R}^n, \quad (2.22)$$

$$|f(x, \underline{u}(x), \nabla \underline{u}(x))| \leq c_1 + c_1 |\nabla \underline{u}(x)|, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad (2.23)$$

$$f(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) = f(x, c_2, 0) = 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \quad (2.24)$$

Remarquons que (2.22) signifie que la condition (2.5) est satisfaite. De (2.23) et (2.24), on déduit que

$$f(\cdot, \underline{u}, \nabla \underline{u}) \in L^2(\Omega)$$

et que

$$f(\cdot, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \in L^2(\Omega).$$

Soit  $v \in (H^1(\Omega))_+$ . On a  $v = v_+$ , donc, en vertu du théorème 12,  $\gamma_0 v = \gamma_0 v_+ = (\gamma_0 v)_+$ , i.e.  $\gamma_0 v \geq 0$ . D'autre part, en exploitant le théorème 9 et le théorème 10, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla v dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left( - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i^2} v dx + \int_{\partial \Omega} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right) (\gamma_0 v) \nu_i d\sigma \right) \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta \varphi_1) v dx + \int_{\partial \Omega} (\nabla \varphi_1 \cdot \nu) (\gamma_0 v) d\sigma \\ &= \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 v dx + \int_{\partial \Omega} (\nabla \varphi_1 \cdot \nu) (\gamma_0 v) d\sigma. \end{aligned}$$

D'où, compte tenu de (2.18),

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla v dx \leq \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 v dx. \quad (2.25)$$

En raison de (2.24), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0 \bar{u} v dx + \int_{\partial \Omega} b_0 (\gamma_0 \bar{u}) (\gamma_0 v) d\sigma &= \int_{\Omega} c_2 a_0 v dx + \int_{\partial \Omega} c_2 b_0 (\gamma_0 v) d\sigma \geq 0 \\ &= \int_{\Omega} f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) v dx. \end{aligned}$$

Cela signifie que  $\bar{u}$  est une sur-solution. D'autre part, compte tenu de (2.25) et (2.20) et

du fait que  $\gamma_0\varphi_1 = 0$ , on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \nabla \underline{u} \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0 \underline{u} v dx + \int_{\partial\Omega} b_0(\gamma_0 \underline{u})(\gamma_0 v) d\sigma &= \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla v dx + \varepsilon \int_{\Omega} a_0 \varphi_1 v dx \\
 &\leq \lambda_1 \varepsilon \int_{\Omega} \varphi_1 v dx + \varepsilon \int_{\Omega} a_0 \varphi_1 v dx \\
 &= \int_{\Omega} (\lambda_1 + a_0) \varepsilon \varphi_1 v dx \\
 &= \int_{\Omega} (\lambda_1 + a_0) \underline{u} v dx \\
 &\leq \int_{\Omega} (\lambda_1 + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}) \underline{u} v dx \\
 &\leq \int_{\Omega} f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) v dx.
 \end{aligned}$$

Cela signifie que  $\underline{u}$  est une sous-solution. Toutes les conditions du [13](#) sont ainsi satisfaites, on conclut que le problème [P2](#) admet une solution (faible)  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant  $0 < \varepsilon\varphi_1(x) = \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x) = c_2$ , p.p.  $x \in \Omega$ . ■

**Remarque 5 (à propos des conditions [\(2.17\)](#) et [\(2.18\)](#))**

1) Il semble assez étrange que le résultat d'existence d'une solution positive (faible) pour le problème [P2](#) ait été démontré dans [\[10\]](#) sans les conditions [\(2.17\)](#) et [\(2.18\)](#). En effet, dans le but de montrer que  $\varepsilon\varphi_1$  est une sous-solution, les auteurs de [\[10\]](#) ont utilisé l'égalité transcrite ci-dessous pour le cas  $p = 2$

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} (-\Delta \varphi_1) v dx, \quad \forall v \in (H^1(\Omega))_+.$$

Or cette égalité est incorrecte puisque, en choisissant  $v \equiv 1 \in (H^1(\Omega))_+$ , elle conduit à

$$\int_{\Omega} (-\Delta \varphi_1) dx = 0,$$

en contradiction avec le fait que :  $-\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$  et  $\varphi_1(x) > 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ .

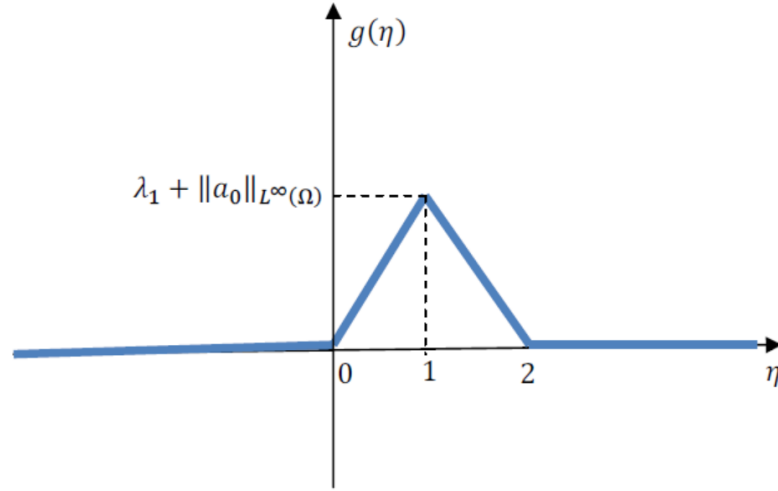
2) La condition [\(2.17\)](#) est toujours satisfaite si l'ouvert  $\Omega$  est assez régulier (de classe  $C^m$  avec  $m > \frac{n}{2}$ ). Voir par exemple [\[3\]](#), le théorème IX.25 à la page 181 ainsi que la remarque 30 à la page 193.

3) Si  $n = 1$  et  $\Omega = ]0, 1[$ , alors la condition [\(2.18\)](#) est satisfaite. En effet, dans ce cas on a  $\partial\Omega = \{0, 1\}$ ,  $\nu(1) = -\nu(0) = 1$ , de plus (voir la proposition 8.5.2 à la page 299 dans [\[1\]](#) ou l'exemple à la page 146 dans [\[3\]](#)),  $\lambda_1 = \pi^2$  et  $\varphi_1(x) = c \sin \pi x$ ,  $\forall x \in \Omega$ , où  $c$  est une constante strictement positive, de sorte que  $\nabla \varphi_1(x) \cdot \nu(x) = \varphi_1'(x) \nu(x) = -c\pi < 0$ ,  $\forall x \in \partial\Omega$ .

**Exemple 2 (Une fonction  $f$  satisfaisant les conditions du théorème 15)**

Soit  $e : \bar{\Omega} \rightarrow [1, +\infty[$  une fonction continue,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$g(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta < 0 \text{ ou } \eta > 2 \\ (\lambda_1 + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)})\eta & \text{si } 0 \leq \eta \leq 1 \\ (\lambda_1 + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)})(2 - \eta) & \text{si } 1 < \eta \leq 2 \end{cases}$$



Courbe représentative de la fonction  $g$

et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction continue vérifiant

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{h(\xi)}{1 + |\xi|} < \infty.$$

Montrons que la fonction  $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, \eta, \xi) = e(x)(g(\eta) + h(\xi))$$

satisfait aux conditions du théorème 15). D'abord  $f$  est de Carathéodory parce que les trois fonctions  $x \mapsto e(x)$ ,  $\eta \mapsto g(\eta)$  et  $\xi \mapsto h(\xi)$  sont continues. Ensuite, il suffit de prendre

$$c_0 = 1,$$

$$c_2 = 2,$$

$$M_e = \max_{x \in \bar{\Omega}} e(x),$$

$$M_h = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{h(\xi)}{1 + |\xi|},$$

$$c_1 = M_e(\lambda_1 + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} + M_h),$$

pour se rendre compte que

$$|f(x, \eta, \xi)| \leq M_e(\lambda_1 + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} + M_h(1 + |\xi|)) \leq c_1(1 + |\xi|), \quad \forall (x, \eta, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

$$f(x, \eta, \xi) \geq g(\eta) \geq (\lambda_1 + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)})\eta, \quad \forall (x, \eta, \xi) \in \Omega \times ]0, c_0[ \times \mathbb{R}^n,$$

$$f(x, c_2, 0) = e(x)(g(2) + h(0)) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

---

# CONCLUSION

On a étudié un problème elliptique avec une condition aux limites de type Robin-Neumann et un terme de convection dépendant non-linéairement de la solution et de son gradient. En utilisant la méthode de sous- et sur-solution, on a établi un résultat d'existence et de localisation d'une solution faible. En guise d'application de ce résultat, on a prouvé l'existence de solutions positives pour une classe de problèmes elliptiques non linéaires de Robin et de Neumann. Le travail réalisé dans ce mémoire montre qu'il est tout à fait possible d'établir une version unificatrice de deux résultats publiés récemment par D. Motreanu et al.

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille, Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces, Application to PDEs and optimization. MPS-SIAM, USA, 2006 [18](#), [39](#)
- [2] C. Benarab, Sur la solvabilité d'un système non linéaire couplé d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Mémoire de Master en mathématiques appliquées, Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi, Juin 2020. [10](#)
- [3] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications. Masson, Paris, 1983. [9](#), [10](#), [14](#), [15](#), [18](#), [21](#), [39](#)
- [4] S. Carl, V.K. Le, D. Motreanu, Nonsmooth Variational Problems and Their Inequalities, Comparison Principles and Applications. Springer, New York, NY, USA, 2007. [10](#), [23](#)
- [5] M. Chipot, Elements of Nonlinear Analysis, Springer Basel AG, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 2000, DOI 10.1007/978-3-0348-8428-0. [21](#)
- [6] E.H. Lieb, M. Loss, Analysis second edition. Volume 14, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2001. [17](#)
- [7] L.C. Evans, Partial Differential Equations. Volume 19, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, (2nd edition) 2010.. [18](#), [21](#)
- [8] D.R. SMART, Fixed point theorems. University Printing House Cambridge New York, 1974. [10](#)
- [9] D. Motreanu, A. Sciammetta, E. Tornatore, A sub-supersolution approach for Neumann boundary value problems with gradient dependence. Nonlinear Analysis : Real World Applications 54 (2020) 103096. [7](#), [8](#), [25](#), [35](#)
- [10] D. Motreanu, A. Sciammetta, E. Tornatore, A Sub-Supersolution Approach for Robin Boundary Value Problems with Full Gradient Dependence. [www.mdpi.com/journal/mathematics](http://www.mdpi.com/journal/mathematics), Mathematics 2020, 8, 658, doi :10.3390/math8050658. [7](#), [8](#), [25](#), [37](#), [39](#)
- [11] D. Motreanu, V.V. Motreanu, N. Papageorgiou, Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems. Springer, New York, 2014. [16](#), [24](#)