

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Larbi Ben M'Hidi de Oum El-Bouaghi  
Faculté des Sciences et Sciences Appliquées  
Département de Génie Electrique



## Thèse

Présenté pour obtenir le diplôme de

### Doctorat en Sciences

Spécialité : Génie électrique

Option : Automatique

Par : M<sup>me</sup> BALASKA Hanane

# CONTRIBUTION A LA COMMANDE ADAPTATIVE ET ROBUSTE D'ORDRE FRACTIONNAIRE DES PROCESSUS INDUSTRIELS

Jury :

Pr. Lashab Mohammed	Université Oum El Bouaghi	Président
Pr. Djouambi Abdelbaki	Université Oum El Bouaghi	Rapporteur
Pr. Ladaci Samir	École polytechnique de Constantine	Co-Rapporteur
Pr. Charef Abdelfatah	Université de Constantine 1	Examineur
Pr. Mansouri Rachid	Université de Tizi-Ouzou	Examineur

(2021)

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail*

*A la mémoire de mon père,*

*A ma très chère mère,*

*A ma petite et grande famille, spécialement mon mari Hamza, mes petits princes Louai, Firas, et Kossai, et ma sœur Nawel,*

*A toutes mes amies.*

## *Remerciements*

Je remercie ALLAH le tout puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a donnée tout au long de mes études.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à mon Directeur de thèse, le Professeur Samir Ladaci, qui a su m'apporter un soutien constant, une disponibilité, une écoute, une confiance et des conseils constructifs et précieux qui m'ont guidée tout au long de cette thèse.

J'exprime ma gratitude au Professeur Djouambi abd Elbaki, Professeur à l'université d'Oum Elbouaghi pour avoir accepté d'encadrer ce travail de recherche.

Je remercie également tous les membres du jury pour l'hommage et l'honneur qu'ils me font en participant à ce jury :

Monsieur Mohamed LASHAB, Professeur à l'université Oum El Bouaghi, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Monsieur Abdelfatah Charef, Professeur à l'université de Constantine 1, ainsi que Monsieur Rachid Mansouri, Professeur à l'université de Tizi-Ouzou, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail de thèse.

J'adresse un grand merci à tous ceux qui m'ont aidée de près ou de loin durant ces années de recherche et d'études.

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b> .....	1
Table des matières .....	4
1. Systèmes d'ordre fractionnaire .....	7
1.1 Introduction .....	7
1.2 Historique .....	7
1.3 Outils mathématiques de base .....	9
1.3.1 La fonction Gamma.....	9
1.3.2 La fonction Mittag-Leffler.....	10
1.4 Opérateurs d'ordre fractionnaire.....	11
1.4.1 Définitions fondamentales :.....	11
1.4.1.1 Définition de Riemann-Liouville.....	11
1.4.1.2 Définition de Caputo .....	12
1.4.1.3 Définition de Grünwald-Letnikov.....	13
1.4.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	13
1.4.3 Evaluation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	14
1.4.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	15
1.4.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire.....	15
1.4.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire.....	15
1.5 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaires .....	16
1.5.1 Représentation par fonction de transfert .....	17
1.5.2 Représentation dans l'espace d'état .....	18
1.5.3 Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire .....	19
1.5.3.1 Systèmes d'ordre fractionnaire commensurable.....	20
1.5.3.2 Systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire variant dans le temps.....	21
1.5.4 Contrôlabilité et observabilité.....	22
1.5.4.1 Critère de contrôlabilité.....	22
1.5.4.2 Critère d'observabilité.....	23
1.6 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaires.....	23

1.6.1	Approximation de l'expression analytique de la sortie .....	23
1.6.2	Approximation par un modèle rationnel à temps discret .....	25
1.6.3	Approximation par un modèle rationnel à temps continu .....	26
1.6.3.1	Méthode d'Oustaloup .....	27
1.6.3.2	Méthode de Charef : Fonction de singularité .....	28
1.6.3.2.1	Système du premier ordre .....	28
1.6.3.2.2	Système du second ordre .....	29
1.7	Performances des systèmes d'ordre fractionnaire .....	31
1.8	Conclusion .....	33
2.	Eléments de commande adaptative .....	34
2.1	Introduction .....	34
2.2	Schémas de commande adaptative .....	35
2.2.1	Commande adaptative à gains préprogrammés .....	35
2.2.2	Régulateurs auto-ajustables (STR) .....	37
2.2.2.1	Conception du régulateur pour des systèmes à paramètres connus .....	38
2.2.2.2	Conception du régulateur STR explicite .....	41
2.2.3	Commande adaptative à modèle de référence .....	42
2.3	Schémas de commande MRAC directe .....	43
2.3.1	Commande MRAC avec loi d'adaptation MIT .....	43
2.3.1.1	Loi MIT .....	43
2.3.1.2	Réalisation du régulateur MRAC .....	45
2.3.2	Conception de la commande MRAC en utilisant la théorie de Lyapunov .....	48
2.3.2.1	Théorie de Lyapunov pour les systèmes variants dans le temps .....	48
2.3.2.2	MRAC directe basé sur l'approche SPR-Lyapunov .....	50
2.3.2.2.1	Régulateur MRC pour des systèmes à paramètres connus .....	52
2.3.2.2.2	Régulateur MRAC pour des systèmes à paramètres inconnus .....	56
2.4	Conclusion .....	60
3.	Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire .....	61
3.1	Introduction .....	61
3.2	Stratégie de la commande FOMRAC .....	62
3.3	Application à la commande du niveau d'un réservoir conique non-linéaire .....	63
3.3.1	Etude dans le cas idéal (sans perturbations) .....	67

3.3.2	Etude en présence de bruit de mesure .....	70
3.3.3	Etude en cas de variations paramétriques.....	72
3.4	Conclusion.....	74
4.	Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire (FOMRAC) pour une classe de système d'ordre fractionnaire .....	83
4.1	Introduction .....	83
4.2	Position du problème .....	76
4.3	Résultat principal .....	77
4.4	Exemples de simulation .....	83
4.4.1	Exemple 1 .....	83
4.4.2	Exemple 2.....	87
4.5	Conclusion.....	92
5.	Commande FOMRAC avec Tube de performance (FOTMRAC) des systèmes d'ordre fractionnaire .....	93
5.1	Introduction .....	93
5.2	Commande FOTMRAC par retour d'état .....	95
5.2.1	Résultat principal .....	99
5.2.2	Exemples de simulation.....	101
5.2.2.1	Exemple 1 .....	101
5.2.2.2	Exemple 2.....	109
5.3	Commande FOTMRAC pour une classe de systèmes d'ordre fractionnaire entrée-sortie .....	115
5.3.1	Résultat principal .....	116
5.3.2	Exemple de simulation .....	121
5.4	Conclusion.....	128
	<b>Conclusion générale et perspectives.....</b>	<b>130</b>
	<b>Bibliographie .....</b>	<b>133</b>

## Liste des tableaux

<b>Tableau 1.1</b> Approximation de l'opérateur $s^\alpha$ en temps discret.....	26
<b>Tableau 3.1:</b> Points de fonctionnement et paramètres des modèles linéarisés .....	65
<b>Tableau 3.2 :</b> La consigne du réservoir conique .....	67
<b>Tableau 3.3 :</b> Valeurs des fonctions coût par rapport à $m$ .....	69
<b>Tableau 3.4</b> Valeurs des fonctions coûts par rapport à l'ordre fractionnaire $m$ en présence de bruits. ....	70
<b>Tableau 3.5 :</b> Valeurs des fonctions coûts par rapport aux variations paramétriques.....	72
<b>Tableau 5.1 :</b> Evaluation de la fonction coût de commande.....	109
<b>Tableau 5.2 :</b> Evaluation comparative de la fonction coût de commande.....	114
<b>Tableau 5.3</b> Évaluation comparative des critères de coût de commande .....	127

## Liste des figures

<b>Fig. 1.1</b> Région de stabilité d'un système linéaire invariant dans le temps d'ordre fractionnaire dans le plan $s\alpha$ .....	21
<b>Fig. 1.2</b> Réponse indicielle du système d'ordre 1 fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire $\alpha$ .....	32
<b>Fig. 1.3</b> Réponse indicielle du système d'ordre 2 fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire $\alpha$ .....	32
<b>Fig. 2.1</b> Commande adaptative par séquençement du gain .....	36
<b>Fig. 2.2</b> Commande adaptative avec régulateur auto-ajustable .....	37
<b>Fig. 2.3</b> Commande adaptative à modèle de référence .....	42
<b>Fig. 2.4</b> Structure de la commande MRC .....	54
<b>Fig 3.1</b> Configuration du réservoir conique .....	64
<b>Fig. 3.2</b> Réponse indicielle du système en boucle ouverte (rouge), réponse indicielle du modèle de référence d'ordre entier (vert), réponse indicielle du modèle de référence d'ordre fractionnaire (bleu) .....	66
<b>Fig. 3.3</b> Tracé de Bode du transfert du système (rouge), du transfert du modèle de référence d'ordre entier (vert), et du transfert du modèle de référence d'ordre fractionnaire (bleu) ..	66
<b>Fig. 3.4</b> Réponse du système avec MRAC classique et avec la stratégie FOMRAC .....	68
<b>Fig. 3.5</b> Signal de commande issu du MRAC classique et de la stratégie FOMRAC .....	68
<b>Fig. 3.6</b> Réponse du système en présence de bruit de mesure, avec MRAC classique et stratégie FOMRAC proposée.....	71
<b>Fig. 3.7</b> Signal de commande issu des schémas de commande MRAC classique et FOMRAC en présence de bruit de mesure .....	71

<b>Fig. 3.8</b> Réponse du système avec MRAC classique et avec la stratégie FOMRAC .....	72
<b>Fig. 3.9</b> Signal de commande issu du MRAC classique et de la stratégie FOMRAC .....	73
<b>Fig. 4.1</b> Structure de la commande adaptative FOMRAC proposée.....	78
<b>Fig. 4.2</b> Sortie du système commandé (bleu) et trajectoire de référence (rouge).....	85
<b>Fig. 4.3</b> Signal de commande .....	85
<b>Fig. 4.4</b> Signal d'erreur de poursuite.....	86
<b>Fig. 4.5</b> Gains d'adaptation.....	86
<b>Fig. 4.6</b> Evolution temporelle des paramètres du processus .....	87
<b>Fig. 4.7</b> Sortie du système avec variations paramétriques (bleu) et trajectoire de référence (rouge) .....	88
<b>Fig. 4.8</b> Signal de commande .....	88
<b>Fig. 4.9</b> Erreur de poursuite .....	89
<b>Fig. 4.10</b> Gains d'adaptation.....	89
<b>Fig. 4.11</b> Sortie du système avec variations paramétriques et bruits de mesure (bleu) et trajectoire de référence (rouge).....	90
<b>Fig. 4.12</b> Signal de commande en présence de bruit de mesure. ....	90
<b>Fig. 4.13</b> Erreur de poursuite en présence de bruit de mesure.....	91
<b>Fig. 4.14</b> Gains d'adaptation en présence de bruit de mesure .....	91
<b>Fig. 5.1</b> Configuration MRAC basée sur un tube de performances.....	94
<b>Fig. 5.2</b> Réponse indicielle du système d'ordre 2 fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire $\alpha$ .....	102

<b>Fig. 5.3</b> Sortie du système commandé (bleu), trajectoire de référence (vert), tube de performances (rouge).....	103
<b>Fig. 5.4</b> Signal de commande FOTMRAC (bleu) et signal de correction d'objectif de commande (rouge).....	103
<b>Fig. 5.5</b> Vecteurs de gains adaptatifs .....	104
<b>Fig. 5.6</b> Sorties du système commandé en cas de commande FOTMRAC (rouge) et en cas de commande FOMRAC (bleu).....	104
<b>Fig. 5.7</b> Valeurs absolues des signaux de commande en cas de FOTMRAC (rouge) et en cas de FOMRAC (bleu).....	105
<b>Fig. 5.8</b> Sortie du système contrôlé (bleu), trajectoire de référence (vert), tube de performances (rouge), pour $rt = -3$ . .....	106
<b>Fig. 5.9</b> Signal de commande FOTMRAC (bleu) et signal de correction d'objectif du contrôle (rouge), pour $rt = -3$ . .....	106
<b>Fig. 5.10</b> Vecteurs de gains adaptatifs .....	107
<b>Fig. 5.11</b> Sorties du système contrôlé en cas de commande FOTMRAC (rouge) et en cas de commande FOMRAC (bleu), pour $rt = -3$ .....	107
<b>Fig. 5.12</b> Valeurs absolues des signaux de commande en cas de FOTMRAC (rouge) et en cas de FOMRAC (bleu), pour $rt = -3$ .....	108
<b>Fig. 5.13</b> Tube de performance et signal de référence .....	111
<b>Fig. 5.14</b> Sortie du système commandé et trajectoire de référence comprise dans le tube de performance. ....	111
<b>Fig. 5.15</b> Signal de commande FOTMRAC et signal de correction d'objectif du contrôle .....	112
<b>Fig. 5.16</b> Vecteurs de gains adaptatifs .....	112

<b>Fig. 5.17</b> Sortie du système en cas de commande d'ordre fractionnaire avec et sans optimisation .....	113
<b>Fig. 5.18</b> Valeurs absolues des signaux de commande d'ordre fractionnaire avec et sans optimisation .....	113
<b>Fig. 5.19</b> Sortie commandée (bleu), trajectoire de référence (vert) et tube de performance (rouge) .....	122
<b>Fig. 5.20</b> Signal de commande FOTMRAC (bleu) et signal de correction d'objectif (rouge) .....	123
<b>Fig. 5.21</b> Vecteurs de gain adaptatifs .....	123
<b>Fig. 5.22</b> Sorties du système contrôlé en cas de commande FOTMRAC (rouge) et en cas de commande FOMRAC (bleu) .....	124
<b>Fig. 5.23</b> Valeurs absolues des signaux de commande d'ordre fractionnaire avec et sans optimisation .....	124
<b>Fig. 5.24</b> Sortie commandée (bleu), trajectoire de référence (vert) et tube de performance (rouge) pour $rt = -6$ .....	125
<b>Fig. 5.25</b> Signal de commande FOTMRAC (bleu) et signal de correction d'objectif (rouge) pour $rt = -6$ .....	125
<b>Fig. 5.26</b> Vecteurs de gain adaptatifs pour $rt = -6$ .....	126
<b>Fig. 5.27</b> Sorties du système contrôlé en cas de commande FOTMRAC (rouge) et en cas de commande FOMRAC (bleu) pour $rt = -6$ .....	126
<b>Fig. 5.28</b> Valeurs absolues des signaux de commande d'ordre fractionnaire avec et sans optimisation pour $rt = -6$ .....	127

## Liste des abréviations

**BIBO** : Bounded Input- Bounded Output.

**CRONE** : Commande Robuste d'Ordre Non Entier.

**FOMRAC** : Fractional Order Model Reference Adaptive Control : Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire.

**FOTMRAC** : Fractional Order Tube Model Reference Adaptive Control : Commande adaptative à modèle de référence avec tube de performance d'ordre fractionnaire.

**LQG** : Linear Quadratic Gaussian : linéaire quadratique gaussien.

**LTI** : Linear Time Invariant : Linéaire invariant dans le temps.

**MIMO** : Multi Input Multi Output : Plusieurs entrée plusieurs sorties.

**MKY** : Meyer-Kalman-Yakubovich

**MRAC** : Model Reference Adaptive Control : Commande adaptative à modèle de référence.

**MRAS** : Model Reference Adaptive System : système adaptatif à modèle de référence.

**MRC** : Model Reference Control : commande à modèle de référence.

**PR** : Positive Real : Réelle positive.

**SISO** : Single Input Single Output : Entrée unique sortie unique.

**TMRAC** : Tube Model Reference Adaptive Control : Commande adaptative à modèle de référence avec tube de performance.

**SPR** : Strictly Positive Real : Strictement réelle positive.

**STR** : Self Tuning Regulator : Régulateur auto-ajustable.

# Introduction Générale

Le calcul fractionnaire représente la généralisation de l'intégration et de la différenciation d'ordre entier à un ordre arbitraire. La théorie du calcul fractionnaire remonte au début des années 1600 dans plusieurs lettres entre L'Hôpital et Leibniz, qui ont d'abord avancé l'idée de généraliser le sens des dérivées d'ordre entier aux dérivées d'ordre non entier. Même si l'apparition du calcul fractionnaire remonte à la même période où se développait le calcul différentiel classique, sa complexité inhérente a reporté son utilisation et son application dans le monde de l'ingénierie, et seules les mathématiques pures ont été privilégiées pour s'en occuper. Au cours des trois dernières décennies, le domaine du calcul fractionnaire a suscité l'intérêt des chercheurs dans plusieurs domaines d'application, notamment les mathématiques, la physique, la chimie, l'ingénierie et même la finance et les sciences sociales.

De nos jours, son utilisation dans l'ingénierie de commande gagne de plus en plus de popularité tant dans la modélisation que dans l'identification, ainsi que dans la conception des régulateurs. Dans le domaine de la modélisation, de nombreux chercheurs ont montré que les modèles d'ordre fractionnaire décrivent mieux et plus précisément des systèmes, que les modèles classiques d'ordre entier. Dans [STI79] et [BAG83], les modèles viscoélastiques sont formulés par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans [NAS18], les auteurs abordent l'identification d'impédance électrochimique dans le domaine temporel, en utilisant la modélisation fractionnaire. Dans [POD99], la diffusion de la chaleur à travers un solide semi-infini est un autre système d'ordre fractionnaire typique, où le débit de chaleur est égal à la demi-dérivée de la température. Une modélisation par un système d'ordre fractionnaire de la dynamique des flux de fluides à haute pression est présentée dans [LIN15]. Les auteurs de [MOV16] ont proposé un modèle d'état fractionnaire pour un convertisseur DC/DC. Aussi un modèle d'ordre fractionnaire est utilisé pour représenter des systèmes de neurone couplés électriquement dans [MOA12]. Même en bio-ingénierie, un modèle d'ordre fractionnaire est proposé pour modéliser les cellules immunitaires influencées par les cellules cancéreuses dans [UCA19].

La popularité du calcul fractionnaire dans le réglage des régulateurs réside dans les avantages de la généralisation des ordres entiers classiques des actions dérivée et intégrale aux ordres non entiers. Dans la commande d'ordre entier classique, l'action intégrale élimine les erreurs en régime permanent, mais diminue également la stabilité relative. D'autre part, l'action dérivée augmente la stabilité relative, mais augmente également la sensibilité au bruit. L'avantage majeur de la commande d'ordre fractionnaire, est que les régulateurs d'ordre non entier offrent de meilleures performances telles que le temps de montée, le dépassement et la robustesse comparativement aux régulateurs classiques comme démontré dans la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) introduite par [OUT91], la commande  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire avec différentes stratégies d'ajustement (voir [POD99A], [BET17]), et la commande robuste d'ordre fractionnaire basé sur la fonction de transfert idéale de Bode dans [DJO08].

La commande adaptative est l'une des techniques de commande les plus populaires appliquées dans les processus industriels. Cette commande consiste à adapter le régulateur en ligne en vue de maintenir un niveau de performances imposé au départ en dépit des incertitudes sur la dynamique du processus à commander ou sur la façon dont cette dynamique se modifie au cours du temps.

De nombreux auteurs ont proposé de nouvelles lois de commande adaptative d'ordre fractionnaire, principalement inspirées des schémas de commande adaptative classiques. On peut citer les structures de commande adaptative d'ordre fractionnaire basées sur la commande par modèle de référence (MRAC : Model Reference Adaptive Control) [LAD12], ainsi que les travaux de [VIN02] et [LAD06] depuis lesquels diverses configurations de commande adaptative par modèle de référence d'ordre fractionnaire (FOMRAC : Fractional Order Model Reference Adaptive Control) ont été développées (voir [LAD09]). En outre, de nombreuses applications ont été réalisées ; par exemple la commande de la pression artérielle postopératoire dans [LAD12A], la commande de niveau du réservoir dans [BAL18], le régulateur de vitesse d'un véhicule électrique dans [BAL19], ...etc.

Cependant, il faut noter que cet effort vers la généralisation de la théorie de commande adaptative aux systèmes d'ordre fractionnaire a révélé d'importants problèmes de recherche ouverts, en particulier le problème de l'analyse de stabilité de tels systèmes de commande. Il est à noter que dans beaucoup de ces travaux de généralisation au cas fractionnaire, les

avantages des schémas de commande développés sont présentés à travers des exemples illustratifs, et que leur point faible réside dans le manque d'arguments théoriques garantissant la stabilité de ces schémas de commande. Dans le but de prouver analytiquement la stabilité de quelques systèmes de commande d'ordre fractionnaire, des travaux ont été effectués : dans [LI12], les auteurs ont proposé un stabilisateur adaptatif universel à grand gain d'ordre fractionnaire qui garantit la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire à entrées et sorties multiples (MIMO : Multi Input Multi Output). Dans [LAD08], les auteurs ont montré qu'il était toujours possible de trouver un régulateur par retour de sortie adaptatif d'ordre fractionnaire basé sur un grand gain pouvant stabiliser n'importe quel système à une entrée et une sortie (SISO : Single Input Single Output) linéaire, invariant dans le temps, à phase minimale, et avec un degré relatif unité. Dans [LAD09], les auteurs présentent une nouvelle approche de la commande adaptative robuste, utilisant des systèmes d'ordre fractionnaire comme feedforward parallèle dans la boucle d'adaptation dans le but de garantir la stabilité robuste du schéma de commande. Ainsi que le nouveau schéma de commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire dans [CHA13]. Concernant la commande adaptative des systèmes d'ordres fractionnaires basés sur des modèles de référence, on peut citer les travaux de [BOU19] et [SHI14], dans lesquels les auteurs proposent une conception de commande adaptative d'ordre fractionnaire pour une classe de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire. Ainsi que les travaux de [CHE16] où les auteurs proposent une commande adaptative par modèle de référence indirect pour une classe de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire.

## **Objectifs et contribution de la thèse**

C'est dans ce cadre général que s'inscrit le travail développé dans cette thèse, dont l'objectif principal est de contribuer à l'application des concepts des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire dans la commande adaptative et robuste des processus industriels. Principalement, nous nous sommes intéressés à la commande des systèmes décrits par des modèles d'ordre fractionnaire qui s'avèrent plus précis dans la représentations de beaucoup de systèmes réels.

En se basant sur la généralisation des schémas de commande MRAC directs classiques pour des systèmes d'ordre entier, trois nouveaux schémas de commande adaptative par

modèle de référence d'ordre fractionnaire avec leurs lois d'adaptation de commande, ont été développés dans ce travail.

Le premier schéma FOMRAC développé est inspiré des travaux de [IOA95] pour la synthèse de commande adaptative des systèmes d'ordre entier. Ce schéma a été généralisé et adapté pour faire face à la classe de systèmes d'ordre fractionnaire décrits par une fonction de transfert commensurable, à paramètres inconnus, et dont le degré relatif est égal à l'ordre fractionnaire de base.

Nous nous sommes également inspiré des travaux de conception de la commande adaptative par modèle de référence avec tube de performance (TMRAC : Tube Model Reference Adaptive Control) introduite dans [MIR13], afin de développer deux autres schémas de commande adaptative dédiés à la commande des systèmes d'ordre fractionnaire. Effectivement, en introduisant le concept d'adaptation en ligne de l'objectif de commande, nous avons réussi à développer deux schémas de commande adaptative d'ordre fractionnaire par modèle de référence avec tube de performance (FOTMRAC : Fractional Order Tube Model Reference Adaptive Control) capables non seulement de conserver les propriétés habituelles de stabilité et de robustesse, mais aussi de satisfaire une nouvelle spécification portant sur la minimisation de l'effort de commande.

Le premier schéma FOTMRAC développé est consacré à la commande d'une classe de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire représentés dans l'espace d'état tels que toutes les variables d'état sont mesurables. On utilise une commande par retour d'état, et nous fixons deux objectifs : le premier est de permettre aux états du système de suivre asymptotiquement les états d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire avec tube de performance stable, et le deuxième objectif est de réduire le coût énergétique de la commande.

Tandis que le deuxième schéma est basé sur un retour de sortie, et dédié à la commande d'une classe de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire représentée par une fonction de transfert commensurable dont les paramètres sont inconnus et dont le degré relatif est égal à l'ordre fractionnaire de base.

L'analyse de la stabilité du schéma de commande FOMRAC et des deux schémas FOTMRAC développés a été effectuée en utilisant la version étendue du théorème de Lyapunov aux cas des systèmes d'ordre fractionnaire [LI10]. Cette analyse confirme que ces

trois schémas de commande garantissent la stabilité en boucle fermée, le suivi asymptotique de la trajectoire de référence, et la minimisation du coût de la commande pour les deux stratégies FOTMRAC.

Afin de tester l'efficacité des schémas de commandes développés, ces derniers sont appliqués sur plusieurs exemples numériques représentant différents processus pratiques.

## **Structure de la thèse**

Le présent manuscrit est organisé en cinq chapitres comme suit.

**Chapitre 1 :** Ce chapitre présente les bases théoriques sur les opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent. Nous introduisons les deux formes de représentation des systèmes d'ordre fractionnaire, à savoir la représentation par fonction de transfert et la représentation dans l'espace d'état. On y rappelle les résultats importants sur l'analyse de la stabilité de ces systèmes, et nous exposons les méthodes d'approximation développées dans la littérature pour leur résolution et implémentation.

**Chapitre 2 :** Dans ce chapitre, nous présentons les différentes approches et techniques de base de la commande adaptative. Particulièrement, nous nous intéressons à l'approche directe de la commande adaptative par modèle de référence, dont nous présentons les principes théoriques nécessaires au développement de notre travail de recherche.

**Chapitre 3 :** Dans ce chapitre, nous présentons la stratégie FOMRAC pour la commande des systèmes d'ordre entier, introduite dans [LAD03]. Un exemple d'application industrielle qui a fait l'objet des travaux [BAL18], est étudié afin d'illustrer l'efficacité de cette stratégie de commande.

**Chapitre 4 :** Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la commande adaptative des systèmes décrits par des modèles d'ordre fractionnaire. Plus particulièrement nous présentons une de nos principales contributions [BAL20], qui concerne la synthèse d'un schéma de commande adaptative directe par modèle de référence d'ordre fractionnaire, pour une classe de systèmes d'ordre fractionnaire. Nous donnons aussi les arguments théoriques garantissant la stabilité de ce schéma de commande adaptative.

**Chapitre 5 :** Dans ce chapitre, nous introduisons deux nouveaux schémas de commande adaptative par modèle de référence d'ordre fractionnaire avec tube de performance (FOTMRAC) pour contrôler deux différentes classes de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire [BAL20A]. La stabilité de ces deux schémas de commande est aussi établie dans ce chapitre.

Enfin, une conclusion générale résumera les principaux résultats de cette thèse et présentera les perspectives futures de ce travail de recherche.



# Chapitre 1

## 1. Systèmes d'ordre fractionnaire

### 1.1 Introduction

Les systèmes d'ordre fractionnaire suscitent de plus en plus l'intérêt de nombreux chercheurs dans différents domaines de la science et de l'ingénierie. On retrouve des modèles d'ordre non entiers de plus en plus utilisés pour mieux décrire le comportement dynamique de nombreux systèmes physiques. Ces modèles sont généralement décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Dans ce chapitre, après un bref historique sur le calcul fractionnaire, nous rappellerons quelques notions mathématiques sur les opérateurs d'ordre non entier ; leurs définitions, leurs propriétés principales et aussi leur transformée de Laplace y seront présentées. Nous évoquerons les deux formes de représentation des systèmes d'ordre fractionnaire, à savoir la représentation par fonction de transfert et la représentation dans l'espace d'état, sans oublier de rappeler les résultats importants utiles pour l'analyse de la stabilité de ces derniers. Enfin, comme les systèmes d'ordre non entier n'ont pas de solutions analytiques exactes, pour leur résolution, analyse et implémentation, nous ferons un tour d'horizon des méthodes d'approximation développées dans la littérature.

### 1.2 Historique

Le calcul fractionnaire est la branche des mathématiques analytiques qui étudie les différentes possibilités de définir des ordres en nombres réels ou en nombres complexes de l'opérateur de différentiation et d'intégration. Il peut être considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. C'est un vieux sujet car ; commençant à partir des spéculations de G.W. Leibniz (1695, 1697) et L. Euler (1730), il s'est développé progressivement jusqu'à ce jour. Les travaux pionniers liés au calcul fractionnaire ont été élaborés par beaucoup de personnalités dont nous pouvons citer une liste non exhaustive : P.S. Laplace (1812), J.B.J.

Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1973), B. Riemann (1847), A.K. Gröndwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872).

Durant une longue période, le calcul fractionnaire était resté pratiquement inexploré pour les applications d'ingénierie, et seules les mathématiques pures ont été privilégiées pour s'en occuper, la raison selon [CHE09] et [GUT10], peut être observée dans : l'existence de plusieurs approches pour les définitions du calcul fractionnaire, le manque d'interprétation géométrique simple, l'absence de méthodes de résolution pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire et l'adéquation apparente du calcul de l'ordre entier pour la majorité des problèmes.

Le calcul fractionnaire peut être aussi considéré comme un nouveau sujet car, ce n'est que depuis les années 70 que le calcul fractionnaire fait l'objet de conférences et de traités spécialisés. Pour la première conférence le mérite est dû à B. Ross qui a organisé la 'First Conference on Fractional Calculus and its Applications' à l'Université de New Haven en juin 1974 [ROS75]. Pour la première monographie, le mérite est attribué au chimiste K.B. Oldham et au mathématicien J. Spanier, qui, après une collaboration commune commencée en 1968, ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974, voir [OLD74]. En 1987, l'énorme livre de S. Samko, A. Kilbas et O. Marichev [SAM87], désormais appelé « encyclopédie » du calcul fractionnaire, est apparu d'abord en russe, puis avec une édition anglaise en 1993.

Au cours des trois dernières décennies, le domaine du calcul fractionnaire a suscité l'intérêt des chercheurs dans plusieurs domaines, il y a eu une explosion des activités de recherche sur l'application du calcul fractionnaire à différents domaines, notamment les mathématiques, physique, chimie, ingénierie et même finance et sciences sociales.

La viscoélasticité linéaire est certainement le domaine des applications les plus étendues du calcul fractionnaire depuis son apparition, du fait de sa capacité à modéliser des phénomènes héréditaires avec une longue mémoire. Pour plus de détails à ce sujet, voir les livres [CAP69], [POD99], [HIL00], [MAI10].

Le traitement du signal, la modélisation et la commande sont des domaines qui ont fait l'objet d'une publication plus intensive dans les dernières décennies. En fait, on peut citer les travaux pionniers de A. Oustaloup (1991) [OUS91] qui a étudié l'application des dérivées

fractionnaires du point de vue de la réponse en fréquence, et le livre important de I. Podlubny (1999) [POD99], couvrant un large éventail de questions dans l'application du calcul fractionnaire en contrôle automatique. Néanmoins, en remontant le temps, nous vérifions qu'O. Heaviside a introduit les dérivées d'ordre fractionnaire dans son livre sur la théorie électromagnétique (1920) et, plus tard, A. Gemant (1936) [GEM36] a appliqué ces dérivées pour les problèmes d'élasticité.

Nous pourrions aussi nous référer à d'autres domaines d'applications comme la finance [CAO20], les processus stochastiques et de nombreuses branches des sciences appliquées et de l'ingénierie (voir [SUN18]), comme le prouve le nombre croissant d'articles, de congrès et de traités impliquant le calcul fractionnaire.

### 1.3 Outils mathématiques de base

Nous présenterons dans cette section deux fonctions mathématiques importantes et qui permettent de donner des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire, il s'agit de la fonction Gamma d'Euler et de la fonction Mittag-Leffler.

#### 1.3.1 La fonction Gamma

Une définition générale de la fonction gamma est celle donnée par la limite d'Euler :

$$\Gamma(x) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{N! N^x}{x[x+1][x+2] \dots [x+N]} \right] \quad (1.1)$$

Cependant la définition intégrale (1.2) est souvent la plus utilisée même si elle est restreinte aux valeurs positives de  $x$  :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy \quad , x > 0 \quad (1.2)$$

A partir de (1.2), on peut déduire que :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (1.3)$$

Une intégration par parties de l'expression (1.2) conduit à la propriété la plus importante de la fonction gamma décrite par la relation suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad (1.4)$$

Aussi, pour tout entier positif  $x$ , nous avons :

$$\Gamma(x + 1) = x! \quad (1.5)$$

Pour plus de détails, voir [OLD74].

### 1.3.2 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler qui tient son nom du mathématicien Gösta Mittag-Leffler, a été introduite en 1903. La définition standard de cette fonction à un paramètre est donnée comme suit :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad , \alpha > 0 \quad (1.6)$$

Cette fonction joue un rôle analogue à celui de la fonction exponentielle dans le cas du calcul entier. D'ailleurs, on retrouve la fonction exponentielle usuelle pour une valeur de  $\alpha$  égale à 1.

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.7)$$

En 1953, Agarwal [AGA53] introduisit la fameuse fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres. Sa définition fut ensuite modifiée par [ERD55] pour devenir :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad , (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.8)$$

Sa  $k^{\text{ème}}$  dérivée est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!z^j}{j!\Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

## 1.4 Opérateurs d'ordre fractionnaire

### 1.4.1 Définitions fondamentales :

Le calcul fractionnaire est basé sur la généralisation de la différentiation et intégration à un ordre arbitraire, qui peut être rationnel, irrationnel voire complexe.

Cette généralisation a conduit à l'introduction de l'opérateur intégral-différentiel continu de base :

$${}_{t_0}D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \Re(\alpha) > 0 \\ 1 & \Re(\alpha) = 0 \\ \int_{t_0}^t (d\tau)^{-\alpha} & \Re(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $\alpha$  est l'ordre de l'opération, généralement  $\alpha \in \mathfrak{R}$ ,  $t_0$  et  $t$  sont les limites de l'opération.

Dans la littérature, Il existe plusieurs définitions mathématiques pour la dérivation et l'intégration d'ordre fractionnaire, les trois définitions les plus fréquemment utilisées sont ceux dite de : Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov et Caputo (voir [CHE09], [GUT10], [OLD74], [MIL93]).

#### 1.4.1.1 Définition de Riemann-Liouville

La définition de la différentiation fractionnaire de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires et pour ses applications en mathématiques pures.

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathfrak{R}$  les anneaux des nombres complexes et réels respectivement, soient  $\alpha \in \mathcal{C}$  avec  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $t_0 \in \mathfrak{R}$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty)$ .

L'intégrale dite de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est donnée par :

$${}^{RL}I_{t_0}^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.11)$$

avec  $t \geq t_0$ ,  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler définie par (1.2):

Tandis que la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre fractionnaire  $\alpha$  est donnée par :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1.12)$$

Où  $n$  est un nombre entier positif, sous la condition  $(n - 1 < \alpha < n)$ .

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être formulée à partir de l'équation (1.11) par :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{ {}^{RL}I_t^{(n-\alpha)} f(t) \} \quad (1.13)$$

L'équation (1.10) peut être aussi écrite sous la forme suivante :

$${}^{RL}I_t^\alpha f(t) = g(t) * f(t) \quad (1.14)$$

où  $g(t) = \frac{(t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ , \* représente le produit de convolution, on note que pour  $\alpha = 1$ ,  $g(t)=1$ , et dans ce cas-là, on reconnaît l'intégrale d'ordre entier de la fonction  $f(t)$  sur l'intervalle  $[t_0 \ t]$ .

#### 1.4.1.2 Définition de Caputo

En 1967, M. Caputo introduisit une nouvelle définition de la dérivée d'ordre fractionnaire ne nécessitant pas de conditions aux bornes, cette dernière diffère de celle de Riemann-Liouville en ce qu'elle effectue la dérivation  $n$  fois de la fonction  $f$  avant l'intégrale fractionnaire d'ordre  $n - \alpha$ , elle est donnée par:

$${}^C D_t^\alpha f(t) \triangleq {}^C I_t^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1.15)$$

avec  $n$  entier positif vérifiant  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $f^{(n)}(\tau)$  est la dérivée d'ordre entier  $n$  de la fonction  $f(\tau)$ .

Cette définition est aussi donnée en fonction de la définition de Riemann-Liouville comme suit :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (1.16)$$

### 1.4.1.3 Définition de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation d'ordre entier d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires. Plus adéquate au calcul numérique de la dérivation fractionnaire, la dérivée dite de Grünwald-Letnikov d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de la fonction  $f$  est donnée par :

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (1.17)$$

Où :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \quad (1.18)$$

[.] désigne la partie entière du nombre.

L'intégrale dite de Grünwald-Letnikov d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de la fonction  $f$  est donnée par:

$${}^{GL}I_t^\alpha f(t) = {}^{GL}D_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{-\alpha}{j} f(t-jh) \quad (1.19)$$

**Remarque :**

Afin d'alléger la notation, dorénavant nous noterons  $I^\alpha$  pour  ${}_0I_t^\alpha$ , et  $D^\alpha$  pour  ${}_0D_t^\alpha$ .

## 1.4.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des opérateurs fractionnaires sont les suivantes [CHE09] :

1. Si  $f(t)$  est une fonction analytique de  $t$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\alpha f(t)$  est une fonction analytique de  $t$  et de  $\alpha$ .
2. Pour  $\alpha = n$  où  $n$  est un entier, l'opération  $D^\alpha f(t)$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier  $n$ .
3. Pour  $\alpha = 0$ , l'opération  $D^\alpha f(t)$  est l'opération identité, c'est-à-dire  $D^0 f(t) = f(t)$ .
4. La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires :

$$D^\alpha(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)) = a_1 D^\alpha f_1(t) + a_2 D^\alpha f_2(t)$$

5. La loi additive des indices (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(t) = D^\beta D^\alpha f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$$

est satisfaite sous certaines conditions sur la fonction  $f(t)$ .

La dérivée d'ordre fractionnaire commute avec la dérivée d'ordre entier :

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^\alpha \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}_a D_t^{\alpha+n} f(t)$$

sous la condition  $f^k(a) = 0$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ).

(Voir [POD99], Chapitre 2] pour d'autres propriétés de commutation)

### 1.4.3 Evaluation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire

En utilisant les méthodes analytiques, le calcul de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire  $\alpha$  d'une fonction quelconque est loin d'être une tâche facile. Pour pallier cette difficulté, plusieurs techniques d'approximation numérique de la dérivation et de l'intégration non entière ont été développées, l'approche la plus répandue est celle basée sur la définition de Grünwald-Leitnikov [POD99].

Pour une fonction causale  $f(t)$ , et pour  $t = kh$ , la dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha$  est donnée par :

$$D^\alpha f(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{t/h} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh - jh) \quad (1.20)$$

Avec  $\binom{\alpha}{j}$  est donné par (1.18).

Pour le calcul de l'intégrale d'ordre fractionnaire  $\beta$  de la fonction  $f(t)$ , on utilise :

$$I^\beta f(t) = D^{-\beta} f(t) \approx h^\beta \sum_{j=0}^{t/h} (-1)^j \binom{-\beta}{j} f(kh - jh) \quad (1.21)$$

### 1.4.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

Nous présenterons dans cette section la transformée de Laplace des opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre fractionnaire.

#### 1.4.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

A partir de l'équation (2.14) qui définit l'intégrale d'ordre fractionnaire comme étant un produit de convolution, on peut calculer la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire  $\alpha$  ( $\Re(\alpha) > 0$ ) d'une fonction temporelle  $f(t)$  causale, soit [OLD74] :

$$\mathcal{L}(I^\alpha f(t)) = \mathcal{L}\left(\frac{t^{\alpha-1}u(t)}{\Gamma(\alpha)} * f(t)\right) = \mathcal{L}\left(\frac{t^{\alpha-1}u(t)}{\Gamma(\alpha)}\right) \mathcal{L}(f(t)) = s^{-\alpha}F(s) \quad (1.22)$$

Où  $u(t)$  est l'échelon unitaire,  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ ,  $s = \sigma + j\omega$  : dénote l'opérateur de Laplace.

#### 1.4.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous allons présenter la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire déjà présentées.

La transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est donnée par :

$$\mathcal{L}(D^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1}f(t)]_{t=0} \quad (1.23)$$

où  $n - 1 < \alpha < n$ .

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo est :

$$\mathcal{L}(D^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^k(0) \quad (1.24)$$

avec  $n - 1 < \alpha < n$ .

On observe que la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville utilise les conditions initiales suivantes:  $D^{\alpha-1}f(0)$ ,  $D^{\alpha-2}f(0)$ , ...,  $D^{\alpha-n}f(0)$ , ce qui peut entraîner des problèmes avec leurs interprétations physiques. Contrairement à la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo, qui utilise des valeurs initiales des dérivés classiques d'ordre entier dont l'interprétation

physique est connue, d'où l'avantage principal de l'utilisation de la définition de Caputo. Une autre différence entre les définitions de Riemann-Liouville et de Caputo est que la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo d'une constante est égale à 0, tandis que la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante quand la limite inférieure est égale à une valeur finie  $t_0$ , n'est pas bornée et est égale à  ${}^{RL}D_t^\alpha C = \frac{C(t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ , à l'exception du cas où on prend  $t_0 = -\infty$  comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville. Cependant, plusieurs processus ne permettent pas de placer le point de départ à  $-\infty$ . Donc, il est plus approprié d'adopter la définition de Caputo particulièrement pour la modélisation de phénomènes physiques, où c'est plus facile de donner un sens physique aux conditions initiales [OLD74], [MIL93].

La transformée de Laplace de la dérivée de Grünwald-Letnikov est :

$$\mathcal{L}(D^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) \quad (1.25)$$

## 1.5 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaires

Au début du siècle dernier, un certain nombre de travaux est apparus, notamment en théorie de la viscoélasticité et en mécanique des solides héréditaires, où des dérivées fractionnaires sont utilisées pour une meilleure description de certains matériaux (voir par exemple [GEM36, GEM38], [SCO44, SCO47, SCO49], [GER48]). La modélisation mathématique basée sur des modèles rhéologiques améliorés a conduit naturellement à des équations différentielles d'ordre fractionnaire [OLD74]. Également, de nombreuses recherches récentes ont montré que les modèles d'ordre fractionnaire décrivent les systèmes physiques mieux que les modèles classiques d'ordre entier. Par exemple dans [NAS18], les auteurs présentent une identification dans le domaine temporel de l'impédance électrochimique en utilisant la modélisation fractionnaire. Dans [POD99], on trouve la diffusion de la chaleur à travers un solide semi-infini qui est un autre système d'ordre fractionnaire typique, où le flux de chaleur est égal à la dérivée d'ordre un demi de la température. Aussi en bio-ingénierie, des modèles d'ordre fractionnaire ont été proposés pour modéliser les cellules immunitaires influencées par le cancer dans [UCA19].

### 1.5.1 Représentation par fonction de transfert

Un système dynamique d'ordre fractionnaire à temps continu linéaire invariant dans le temps peut être décrit par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante [POD99], [CHE09], [PET09] :

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) \\ = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Où  $u(t)$  représente le signal d'entrée,  $y(t)$  le signal de sortie,  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ),  $b_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) sont des constantes. On peut supposer les inégalités suivantes sans perte de généralité :  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ ,  $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$ .

Dans le cas où tous les ordres de dérivation  $\alpha_k$ , ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) et  $\beta_k$ , ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) sont des multiples entiers de l'ordre de base  $\alpha \in \mathfrak{R}^+$ , on dit que le système est d'ordre commensurable, et l'équation (1.26) devient :

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t) \quad (1.27)$$

En appliquant la transformée de Laplace à (1.27), tout en supposant que les conditions initiales sont nulles, nous obtenons la fonction de transfert d'ordre fractionnaire qui est une fonction avec des puissance d'ordre non entier de la variable complexe  $s$  de Laplace.

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{k\alpha}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{k\alpha}} \quad (1.28)$$

qui peut être vue comme étant une fonction  $H(\lambda)$  pseudo-rationnelle de la variable  $\lambda = s^\alpha$ .

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k} \quad (1.29)$$

### 1.5.2 Représentation dans l'espace d'état

Un système multi-variable linéaire invariant dans le temps d'ordre fractionnaire commensurable peut être représenté dans l'espace d'état sous la forme suivante [OUS95], [MAT96] :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C^T x(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.30)$$

Où  $0 < \alpha < 1$ ,  $u \in \mathfrak{R}^p$  représente le vecteur d'entrée,  $x \in \mathfrak{R}^n$  le vecteur de variables d'état,  $y \in \mathfrak{R}^l$  le vecteur de sortie.  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  est la matrice d'état,  $B \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  la matrice d'entrée,  $C^T \in \mathfrak{R}^{l \times n}$  la matrice de sortie,  $D \in \mathfrak{R}^{l \times p}$  la matrice de transmission directe.

En appliquant la transformée de Laplace au système (1.30) et en considérant la définition de Caputo de la dérivée, nous aurons :

$$\begin{cases} s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = C^T X(s) + D U(s) \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1}s^{\alpha-1}x(0) \\ Y(s) = C^T X(s) + DU(s) \end{cases} \quad (1.32)$$

avec  $I \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  la matrice identité, dans le cas où  $x(0) = 0$  (conditions initiales nulles), nous aurons :

$$\begin{cases} X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C^T X(s) + DU(s) \end{cases} \quad (1.33)$$

D'où on obtient la matrice de transfert  $G(s)$  telle que  $Y(s) = G(s)U(s)$  :

$$G(s) = C^T (s^\alpha I - A)^{-1}B + D \quad (1.34)$$

Comme pour les systèmes d'ordre entier, la représentation dans l'espace d'état d'un système d'ordre fractionnaire n'est pas unique.

Considérons un système SISO décrit par sa fonction de transfert d'ordre fractionnaire commensurable de la forme (1.28) avec  $a_n = 1$  et  $m \leq n$ , la fonction de transfert (1.28) est équivalente au système d'état suivant, appelé forme canonique commandable:

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-2} \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.35)$$

$$y = [b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \dots \quad b_{n-2} - b_n a_{n-2} \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (1.36)$$

Où  $b_i = 0$  pour  $m < i \leq n$

On peut aussi représenter (1.28) par la forme canonique observable suivante :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-2} \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-2} - b_n a_{n-2} \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u \quad (1.37)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

où  $b_i = 0$  pour  $m < i \leq n$

### 1.5.3 Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

De toute évidence, la stabilité en boucle fermée représente l'exigence la plus fondamentale et la plus cruciale lors de la conception d'un système de commande. Il est bien connu qu'un système d'ordre entier à temps continu linéaire invariant dans le temps est stable si et seulement si toutes les racines de son polynôme caractéristique ont des parties réelles négatives. En d'autres termes, les pôles doivent se trouver dans la moitié gauche du plan complexe. L'étude de la stabilité des systèmes linéaires invariant dans le temps d'ordre fractionnaire est différente de celle des systèmes d'ordre entier, selon que le système soit d'ordre commensurable ou non. Dans ce qui suit, nous allons présenter deux méthodes qui permettent l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre non entier. Il s'agit du théorème de

Matignon [MAT98] applicable aux systèmes linéaire invariant dans le temps d'ordre fractionnaire commensurable, et de la méthode directe de Lyapunov étendue à l'ordre fractionnaire [LI10] qui est valable pour les systèmes non linéaires invariant dans le temps d'ordre fractionnaire.

### 1.5.3.1 Systèmes d'ordre fractionnaire commensurable

La stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire commensurable peut être analysée via le théorème de Matignon. Ainsi, un système décrit par (1.30) avec  $0 < \alpha < 2$  est stable dans le sens BIBO ( Bounded Input- Bounded Output) si et seulement si, toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  vérifient le théorème de Matignon [MAT98], soit :

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n \quad (1.39)$$

#### Remarques

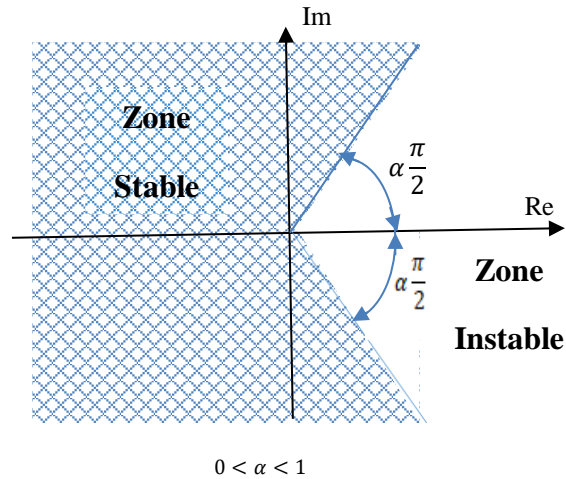
1. Pour  $\alpha = 1$ , on retrouve la condition de stabilité des systèmes d'ordre entier.
2. Dans le cas où le système est décrit par (1.28), on désigne par  $p_i$  les pôles du système, qui sont les solutions de l'équation  $\det(s^\alpha I - A) = 0$  et sont donnés par :

$$p_i = \lambda_i^{1/\alpha} \quad (1.40)$$

d'où la condition de stabilité :

$$|\arg(p_i)| > \frac{\pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n \quad (1.41)$$

Un résultat intéressant est que les pôles du système d'ordre fractionnaire stable peuvent même être situés dans le demi-plan complexe droit du plan  $s^\alpha$ . Ce fait est illustré par exemple sur la figure 1.1 où la région de stabilité est représentée pour un système d'ordre fractionnaire d'ordre  $0 < \alpha < 1$  linéaire et invariant dans le temps.



**Fig. 1.1** Région de stabilité d'un système linéaire invariant dans le temps d'ordre fractionnaire dans le plan  $s^\alpha$

### 1.5.3.2 Systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire variant dans le temps

Dans cette section, nous allons rappeler un résultat important sur la stabilité des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire variant dans le temps [LI10], ce résultat sera utilisé par la suite afin de prouver la stabilité des schémas de commande proposés dans notre travail.

Considérons la classe de système non linéaire et variant dans le temps d'ordre fractionnaire de la forme :

$${}^c D_t^\alpha f(t) = f(x, t) \quad (1.42)$$

où  $t$  représente le temps et  $\alpha \in (0, 1)$ . On considère ici la définition de Caputo, pour l'analyse de la stabilité du système (1.42), nous avons le résultat important suivant :

#### Définition 1.1 :

*La fonction continue  $g: [0, t) \rightarrow [0, \infty)$  est dite fonction de class-K si elle est strictement croissante et  $g(0) = 0$  [DUA15].*

**Theorème 1.1 :** Extension à l'ordre fractionnaire de la méthode directe de Lyapunov [LI10]

Soit le système représenté par (1.42), et soit  $x = 0$  son point d'équilibre. Supposons l'existence d'une fonction de Lyapunov  $V(t, x(t))$  et des fonctions  $g_i (i = 1, 2, 3)$  de classe  $K$  qui satisfont :

$$g_1(\|x\|) \leq V(t, x(t)) \leq g_2(\|x\|) \quad (1.43)$$

$${}^c D_t^\beta V(t, x(t)) \leq -g_3(\|x\|) \quad (1.44)$$

avec  $\beta \in (0, 1)$ , alors le système (1.42) est asymptotiquement stable.

Afin d'effectuer l'analyse de stabilité des schémas de commande que nous développerons dans cette thèse, pour la classe de systèmes d'ordre fractionnaire représentée par l'équation (1.42), nous rappelons le lemme suivant [DUA15].

**Lemme 1.1 :**

Considérons une fonction continue et dérivable  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ , avec  $Q = Q^T \geq 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  alors, pour tout instant  $t_0$

$$\frac{1}{2} {}^c D_t^\gamma x^T(t) Q x(t) \leq x(t) Q {}^c D_t^\gamma x(t) \quad \forall \gamma \in (0, 1) \quad (1.45)$$

## 1.5.4 Contrôlabilité et observabilité

La contrôlabilité et l'observabilité sont deux concepts importants dans l'analyse de l'espace d'état. La contrôlabilité et l'observabilité des systèmes d'ordre fractionnaire commensurables ont été considérées dans la littérature ([BET08], [MAT96, MAT97], [ZEN05]). Dans ce cas, les critères de contrôlabilité et d'observabilité sont similaires à ceux des systèmes d'ordre entier.

### 1.5.4.1 Critère de contrôlabilité

Un système d'ordre fractionnaire commensurable représenté par le système d'équation d'état (1.30) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité donnée par l'équation (1.46) est de plein rang  $n$  (où  $n$  représente le nombre de variables d'état).

$$M_{com} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (1.46)$$

#### 1.5.4.2 Critère d'observabilité

Un système d'ordre fractionnaire commensurable de la forme (1.30) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité donnée par (1.46) est une matrice de plein rang  $n$  (où  $n$  représente le nombre de variables d'état).

$$M_{obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

## 1.6 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaires

À cause de leur représentation irrationnelle, la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire dans le domaine temporel est généralement difficile à réaliser par les méthodes analytiques. Plusieurs approches permettant de les simuler ont été développées dans la littérature. Ces méthodes de simulation peuvent être classées en trois groupes comme suit (voir [AOU04]) :

- L'approximation de l'expression analytique de la sortie par les fonctions de type Mittag-Leffler.
- L'approximation du modèle non entier par un modèle rationnel à temps discret.
- L'approximation du modèle non entier par un modèle rationnel à temps continu.

### 1.6.1 Approximation de l'expression analytique de la sortie

Ces méthodes reposent sur la résolution des équations différentielles non entières. Dans [POD99], une fonction de type Mittag-Leffler est utilisée afin d'obtenir la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle d'un système décrit par une fonction de transfert d'ordre fractionnaire. Dans [OUS95], le résultat du calcul de la transformée inverse d'un système fractionnaire est donné comme une décomposition d'un mode exponentiel et d'un multimode apériodique. Parmi les solutions analytiques existantes, on peut citer à titre d'exemple les solutions basées sur les fonctions de Green [SCH89], les fonctions de Wright [MAI96], et les techniques de séparation de variables [CHE07]. Cependant, on doit noter

que le calcul des sorties des systèmes d'ordre fractionnaire en utilisant ces méthodes est très difficile.

Dans ce qui suit, nous exposerons brièvement la méthode de calcul de la réponse temporelle d'un système linéaire SISO (Single Input Single Output) d'ordre fractionnaire par la méthode utilisant les fonctions de type Mittag-Leffler [POD99].

Considérons les systèmes décrits par la fonction de transfert d'ordre fractionnaire suivante :

$$G(s) = \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\beta_1} + a_0 s^{\beta_0}} \quad (1.48)$$

où  $\beta_k$ , ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres réels arbitraires tels que  $\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_1 > \beta_0$ ,  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) sont des constantes arbitraires.

Dans [POD99], les auteurs ont introduit la fonction suivante :

$$\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(y t^\alpha) \quad , (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.49)$$

dont la transformée de Laplace est évaluée dans [POD94] par :

$$\int_0^\infty e^{-st} \varepsilon_k(t, \pm y; \alpha, \beta) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp y)^{k+1}} \quad (Re(s) > |y|^{1/\alpha}) \quad (1.50)$$

Un autre avantage de la fonction  $\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta)$  est sa différentiation d'ordre fractionnaire simple qui est donnée par [POD94]:

$$D^\lambda \varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = \varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta - \lambda) \quad (\lambda < \beta) \quad (1.51)$$

La réponse impulsionnelle du système (1.48) est donnée par :

$$g(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m, k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} \varepsilon_m\left(t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j\right) \quad (1.52)$$

Pour obtenir la réponse indicielle du système (1.48), on calcule l'intégrale de (1.52) à l'aide de (1.51), le résultat est le suivant :

$$y_{ind}(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_{n-2}=m \\ k_0 \geq 0, \dots, k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} \varepsilon_m \left(t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j + 1\right) \quad (1.53)$$

Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer à [POD94].

### 1.6.2 Approximation par un modèle rationnel à temps discret

Le principe de ces méthodes consiste à approximer le modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret en remplaçant l'opérateur de Laplace  $s$  dans le modèle fractionnaire par son équivalent discret  $w(z^{-1})$ . Soit pour un système d'ordre fractionnaire décrit par :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0} \quad (1.54)$$

L'opération d'approximation par cette approche donne la fonction de transfert discrète suivante :

$$G(z) = \frac{b_m (w(z^{-1}))^{\beta_m} + b_{m-1} (w(z^{-1}))^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0}{a_n (w(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1} (w(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0} \quad (1.55)$$

Où  $w(z^{-1})$  peut être calculé par plusieurs méthodes. Parmi lesquelles on peut citer les méthodes basées sur les approximations : d'Euler, de Tustin, de Simpson, et de Al Alaoui (voir [VIN00], [ALA94], [TAB71], [CHE02]).

**Tableau 1.1** Approximation de l'opérateur  $s^\alpha$  en temps discret

Méthode	Opération effectuée
Euler (Grünwald)	$(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{1}{T}(1 - z^{-1})\right)^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} \left(1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} z^{-2} + \dots\right)$
Tustin	$(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^\alpha = \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha (1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha^2 z^{-2} + \dots)$
Simpson	$(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{3}{T} \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})^\alpha}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}\right)^\alpha$ $= \left(\frac{3}{T}\right)^\alpha (1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(4\alpha + 3)z^{-2} + \dots)$
Al-Alaoui	$(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{8}{7T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^\alpha$ $= \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha \left(1 - \frac{8}{7}\alpha z^{-1} + \left(-\frac{24}{49}\alpha + \frac{32}{49}\alpha^2\right)z^{-2} + \dots\right)$

Comme on peut le constater à partir de ces approximations, un système d'ordre fractionnaire est décrit dans le domaine en  $s$  (Laplace) par une fonction de transfert irrationnelle, alors que dans le domaine discret on retrouve une transmittance de dimension infinie, ce qui confirme que les systèmes d'ordre fractionnaire ont une mémoire illimitée contrairement aux systèmes d'ordre entier dont la mémoire est limitée.

L'inconvénient majeur de cette classe de méthodes est un ordre d'approximation très élevé, ce qui rend la simulation en temps réel dure à obtenir.

### 1.6.3 Approximation par un modèle rationnel à temps continu

Ces méthodes sont aussi appelées approximations analogiques ou approximations du domaine fréquentiel, plusieurs techniques d'approximation ont été développés dans la littérature, par exemple on peut citer les travaux : [OUS95], [TRI99], [KRA14], [MAN10]. Cette classe de méthodes de simulation présente un bon compromis entre le comportement fractionnaire désiré sur l'intervalle de fréquences donné et la complexité du calcul.

Les méthodes les plus connues et les plus utilisées sont celle d'Oustaloup [OUS95] et celle de Charef [CHA92]. Cette dernière, dite méthode de la fonction de singularité à laquelle

nous avons porté un intérêt particulier, est plus élaborée et plus pratique pour les approximations des fonctions de transferts d'ordre fractionnaire, ainsi, nous l'utiliserons pour l'implémentation de certains schémas de commande adoptés dans notre travail.

### 1.6.3.1 Méthode d'Oustaloup

La méthode d'Oustaloup permet d'approximer l'opérateur d'ordre fractionnaire  $s^\alpha$  dans une bande de fréquences donnée  $[\omega_l \ \omega_h]$ , par une fonction rationnelle en utilisant une distribution récursive de zéros et pôles d'ordre entier comme suit :

$$s^\alpha \cong \hat{G}(s) = K \prod_{i=1}^N \frac{1+s/z_i}{1+s/p_i} \quad (1.56)$$

Dans (1.56),  $N$  dénote l'ordre d'approximation,  $z_i$  et  $p_i$  sont respectivement les zéros et les pôles définis par :

$$z_1 = \omega_l \sqrt{\eta} \quad (1.57.a)$$

$$p_i = \gamma z_i \quad i = 1, \dots, N \quad (1.57.b)$$

$$z_{i+1} = \eta p_i \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad (1.57.c)$$

Avec :

$$\gamma = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\alpha/N}, \quad \eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{1-\alpha}{N}} \quad (1.58)$$

$K$  est calculé de façon à avoir un gain unitaire à la fréquence logarithmique intermédiaire  $\omega_u = \sqrt{\omega_l \omega_h}$ .

Pour avoir le modèle rationnel (approximation) d'un système d'ordre non entier, il suffit de remplacer chaque opérateur d'ordre fractionnaire du modèle original par son approximation rationnelle. La sortie du modèle est donc la convolution du modèle rationnel obtenu avec le signal d'entrée.

### 1.6.3.2 Méthode de Charef : Fonction de singularité

Dans l'objectif d'implémenter des modèles d'ordre non entier dans des schémas de commande, nous utiliserons la méthode de la fonction de singularité développée dans [CHA92], et [CHA06] que nous présenterons dans cette section. Cette méthode a pour but d'approximer des systèmes du premier et du deuxième ordre fractionnaire.

#### 1.6.3.2.1 Système du premier ordre

Un système d'ordre fractionnaire du premier ordre (single fractal system) est modélisé sous la forme :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p}\right)^\alpha} \quad (1.59)$$

$G(s)$  peut-être réécrite comme suit :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p}\right)^\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.60)$$

où  $(N + 1)$  représente le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquence du système.

L'équation (1.60) peut être tronquée à un nombre fini  $N$ , et l'approximation devient :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p}\right)^\alpha} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.61)$$

Les pôles  $p_i$  et les zéros  $z_i$  peuvent être obtenus comme suit :

$$p_i = (ab)^i p_0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.62.a)$$

$$z_i = (ab)^i a p_0 \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (1.62.b)$$

avec :

$$p_0 = p 10^{\frac{\epsilon p}{20\alpha}} \quad (1.63.a)$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\alpha)}} \quad (1.63.b)$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\alpha}} \quad (1.63.c)$$

$$\alpha = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (1.63.d)$$

$\epsilon_p$  est l'erreur tolérée en dB.

### 1.6.3.2.2 Système du second ordre

Soit le système du deuxième ordre fractionnaire décrit par :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\alpha} \quad (1.64)$$

avec  $\alpha$  un nombre réel positif tel que  $0 < \alpha < 1$ , on peut distinguer deux cas :

1. Le cas où  $0 < \alpha < 0.5$

La fonction de transfert (1.63) peut être exprimée comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\eta}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\beta\frac{s}{\omega_n} + 1\right)} \quad (1.65)$$

Où  $\beta = \xi^\alpha$  et  $\eta = 1 - 2\alpha$ ,  $G_e(s)$  peut aussi être approximée par :

$$G_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right) \prod_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\beta\frac{s}{\omega_n} + 1\right) \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.66)$$

Les singularités (pôles  $p_i$  et zéros  $z_i$ ) sont données par :

$$p_i = (ab)^{i-1} az_1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.67.a)$$

$$z_i = (ab)^{i-1} z_1 \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (1.67.b)$$

avec :

$$z_1 = \omega_n \sqrt{b} \quad (1.68.a)$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\eta)}} \quad (1.68.b)$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\eta}} \quad (1.68.c)$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (1.68.d)$$

$\epsilon_p$  est l'erreur tolérée en dB.

L'ordre d'approximation  $N$  est calculé en fixant la bande de fréquences de travail, spécifiée par  $\omega_{max}$  telle que :  $p_{N-1} < \omega_{max} < p_N$ , ce qui mène à la valeur suivante :

$$N = \text{Partie entière de} \left[ \frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_1}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (1.69)$$

$G_e(s)$  peut s'écrire sous la forme d'une fonction paramétrique d'ordre  $N + 2$  :

$$G_e(s) = \frac{b_{m0}s^N + b_{m1}s^{N-1} + \dots + b_{mN}}{s^{N+2} + a_{m1}s^{N+1} + \dots + a_{mN+2}} \quad (1.70)$$

où les coefficients  $b_{mi}$  et  $a_{mi}$  sont à calculés d'après les valeurs des  $p_i, z_i, \beta$  et  $\omega_n$

## 2. Le cas où $0.5 < \alpha < 1$

Dans ce cas, la fonction (2.64) est approximée par :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\beta\frac{s}{\omega_n} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\eta} \quad (1.71)$$

avec  $\beta = \xi^\alpha$  et  $\eta = 2\alpha - 1$ , les valeurs singulières sont données par :

$$p_i = (ab)^{i-1} p_1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.72.a)$$

$$z_i = (ab)^{i-1} a p_1 \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (1.72.b)$$

où :

$$p_1 = \omega_n \sqrt{b} \quad (1.73.a)$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\eta)}} \quad (1.73.b)$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\eta}} \quad (1.73.c)$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (1.73.d)$$

$\epsilon_p$  est l'erreur tolérée en dB.

$G_e(s)$  peut aussi se mettre sous la forme d'une fonction de transfert paramétrique (1.70).

## 1.7 Performances des systèmes d'ordre fractionnaire

Des propriétés avantageuses des modèles d'ordre fractionnaire par rapport à ceux d'ordre entier standard ont été indiquées par de nombreuses études antérieures, dans [LAD06, MON11], les auteurs rapportent que les modèles d'ordre fractionnaire sont meilleurs comme modèles de référence pour les applications de commande. En effet, ces systèmes offrent des performances améliorées, en termes de temps de réponse, de stabilité de la dynamique transitoire, en plus de leur robustesse vis-à-vis des perturbations et du bruit [LAD06A].

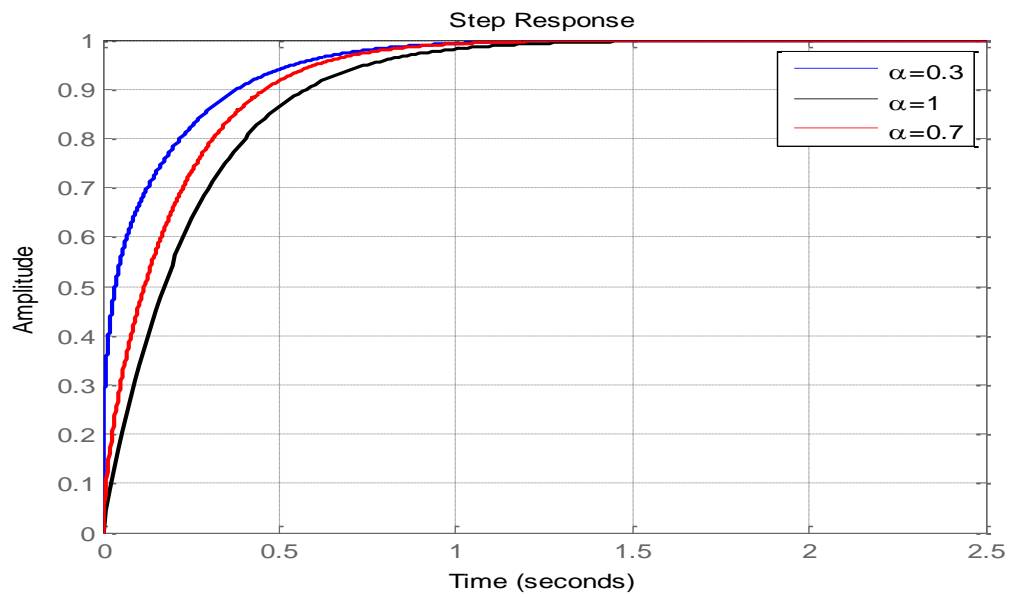
Pour illustrer ce fait, considérons deux exemples de modèles d'ordre fractionnaire donnés par :

$$H_1(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{4}\right)^\alpha} \quad (1.74)$$

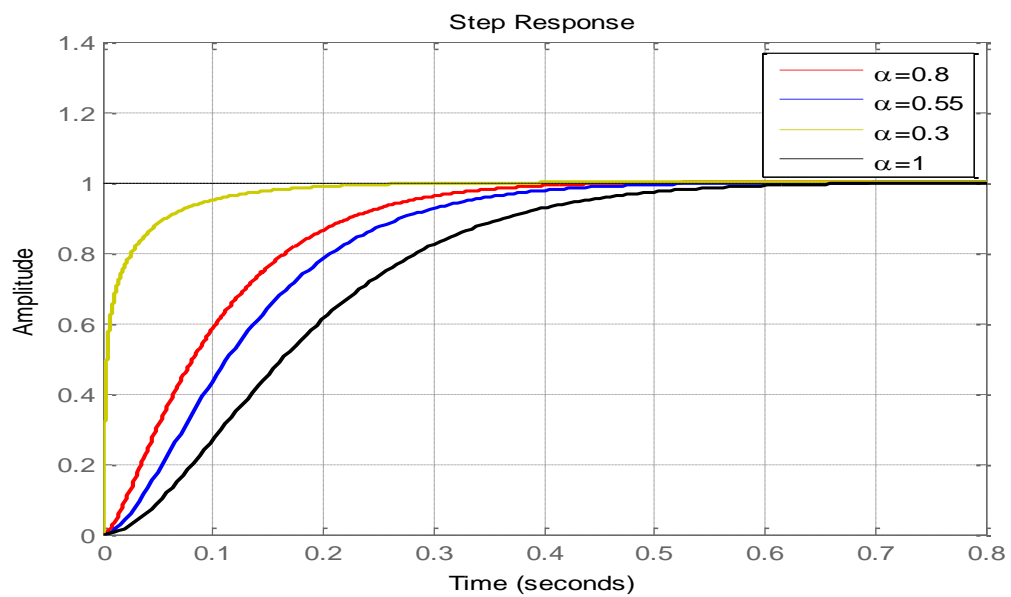
$$H_2(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\alpha} \quad (1.75)$$

avec  $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ ,  $\xi = 0.95$ .

Les réponses indicielles des systèmes  $H_1(s)$  et  $H_2(s)$  pour le cas entier ( $\alpha = 1$ ) et les valeurs d'ordre fractionnaire  $\alpha$  sont illustrées respectivement sur les figure 1.2 et 1.3, elles montrent le gain en temps de montée dans les deux cas.



**Fig. 1.2** Réponse indicielle du système d'ordre 1 fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire  $\alpha$



**Fig. 1.3** Réponse indicielle du système d'ordre 2 fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire  $\alpha$

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les concepts de base des systèmes d'ordre fractionnaire, et rappelé d'abord les définitions de l'intégrale et de la dérivée d'ordres non entiers. Nous avons présenté une méthode simple et efficace permettant l'évaluation numérique de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire basée sur la définition de Grünwald-Letnikov. Nous avons évoqué deux formes de représentations des systèmes d'ordre non entier : la représentation par fonction de transfert et la représentation dans l'espace d'état. On a rappelé les différentes méthodes d'approximation largement utilisées pour la simulation et l'implémentation des systèmes d'ordre non entier. Nous avons présenté les performances améliorées des modèles d'ordre fractionnaire par rapport à ceux d'ordre entier, chose qui les avantagent dans les applications de commande. Des résultats importants sur la stabilité sont aussi évoqués, et seront utilisés dans le but de prouver la stabilité des schémas de commande adaptative d'ordre fractionnaire développés dans notre travail.



## Chapitre 2

### 2. Eléments de commande adaptative

#### 2.1 Introduction

La commande adaptative est une méthodologie de commande capable de traiter des systèmes incertains afin d'assurer des performances désirées. C'est aussi un ensemble de techniques pour l'ajustement automatique des régulateurs en temps réel, afin d'atteindre ou de maintenir un niveau souhaité de performances du système de commande lorsque les paramètres du modèle dynamique du processus sont inconnus et/ou varient dans le temps.

La recherche sur la commande adaptative a vu le jour au début des années 1950, elle a été motivée par la conception de pilotes automatiques d'avions pour une large fourchette d'altitudes et de vitesses. Il a été constaté qu'un gain constant ordinaire, une rétroaction linéaire peut bien fonctionner dans une condition particulière de fonctionnement. Cependant, des difficultés pouvaient être rencontrées lors du changement des conditions de fonctionnement. Un régulateur plus sophistiqué qui fonctionne bien sur une large gamme de conditions de fonctionnement était donc nécessaire. À cette époque, les travaux sur la commande de vol adaptative ont été caractérisés par beaucoup d'enthousiasme, un mauvais matériel et une théorie inexistante. L'intérêt pour la commande adaptative a été renouvelé dans les années 1970. Le progrès de la théorie de commande au cours de la décennie précédente ; notamment la théorie de l'espace d'état et la stabilité, les résultats importants dans la théorie du contrôle stochastique, la programmation dynamique introduite par [BEL57], [BEL61], la théorie de la commande duale introduite par [FEL60], [FEL61], [FEL65], sans oublier les développements majeurs dans l'identification des systèmes et l'estimation des paramètres [AST71], a contribué à une meilleure compréhension du contrôle adaptatif. Les progrès rapides et révolutionnaires de la microélectronique ont permis l'implémentation simple et non couteuse des régulateurs adaptatifs [AST83].

Depuis, le domaine de la commande adaptative s'est développé vigoureusement pour devenir l'un des plus riches en termes d'algorithmes et de techniques de conception. Plusieurs schémas de commande adaptative ont été développés ; selon que le processus est identifié ou non, ces schémas sont scindés en deux approches principales, à savoir :

- L'approche indirecte : dans laquelle l'évaluation des paramètres du régulateur passe par l'estimation en temps réel des paramètres du processus à commander.
- L'approche directe : dans laquelle, le processus à commander n'est pas identifié, et les paramètres du régulateur sont estimés directement selon un algorithme d'adaptation approprié.

La commande adaptative est obtenue par construction non linéaire, puisque l'expression de la commande est une fonction complexe de signaux mesurés et de gains variant dans le temps. Dans ce chapitre, nous essayerons de décrire les différentes techniques utilisées dans le domaine de la commande adaptative. En particulier, nous nous intéresserons à l'approche directe de la commande adaptative à modèle de référence (MRAC : Model Reference Adaptive Control) dont nous présenterons les bases théoriques nécessaires à notre travail de recherche.

## 2.2 Schémas de commande adaptative

Dans cette section, nous allons présenter trois schémas de principe de commande adaptative développés dans la littérature : commande adaptative à gains préprogrammés, les régulateurs auto-ajustables (STR : Self Tuning Regulator), et les systèmes adaptatifs à modèle de référence (MRAS : Model Reference Adaptive System). Nous avons essayé de suivre leur évolution historique en traitant principalement le MRAS en temps continu et le STR en temps discret.

### 2.2.1 Commande adaptative à gains préprogrammés

Il est parfois possible de trouver des variables auxiliaires (appelées aussi variables de planification) qui sont bien corrélées aux changements de dynamique du système. On peut ainsi réduire les effets des variations des paramètres en changeant les paramètres du régulateur en fonction des variables auxiliaires (Fig.2.1).

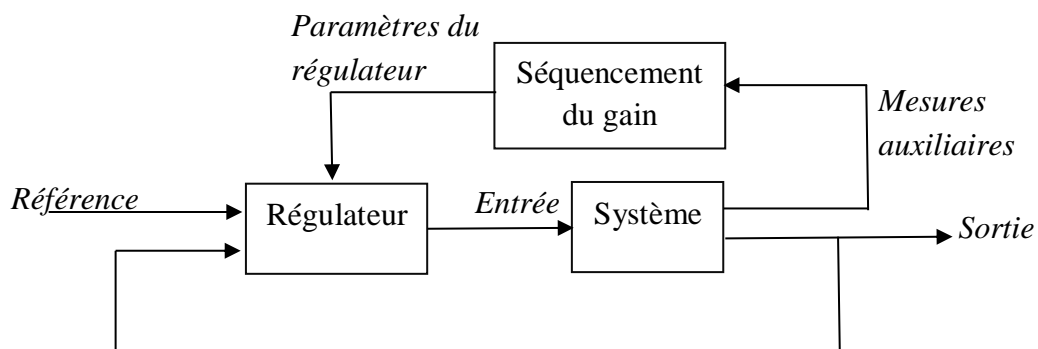
Le problème clé dans la conception de systèmes avec séquençement de gain est de trouver des variables de planification appropriées. Ceci est normalement fait en se basant sur la connaissance physique du système à commander.

Une fois les variables auxiliaires obtenues, les paramètres du régulateur sont déterminés aux différentes conditions de fonctionnement en utilisant une méthode de synthèse appropriée. La stabilité et les performances du système sont généralement évaluées par simulation. Une attention particulière est accordée à la transition entre les différentes conditions de fonctionnement. Le nombre de conditions de fonctionnement est augmenté si cela s'avère nécessaire, d'où l'inconvénient de la longueur du temps nécessaire pour la conception [AST83].

L'avantage de cette approche est que les gains du correcteur peuvent être modifiés aussi rapidement que les mesures auxiliaires répondent aux changements des paramètres. Cependant, les changements fréquents et rapides des gains du correcteur peuvent entraîner l'instabilité ; par conséquent, il existe une limite quant à la fréquence, et à la vitesse à laquelle les gains du régulateur peuvent être modifiés [IOA96].

Un autre inconvénient de ce schéma de commande est qu'il s'agit d'une compensation en boucle ouverte ; les paramètres du régulateur sont modifiés en boucle ouverte, sans retour des performances du système en boucle fermée. Cela rend la méthode impossible à utiliser si la dynamique du processus ou les perturbations ne sont pas connues avec précision.

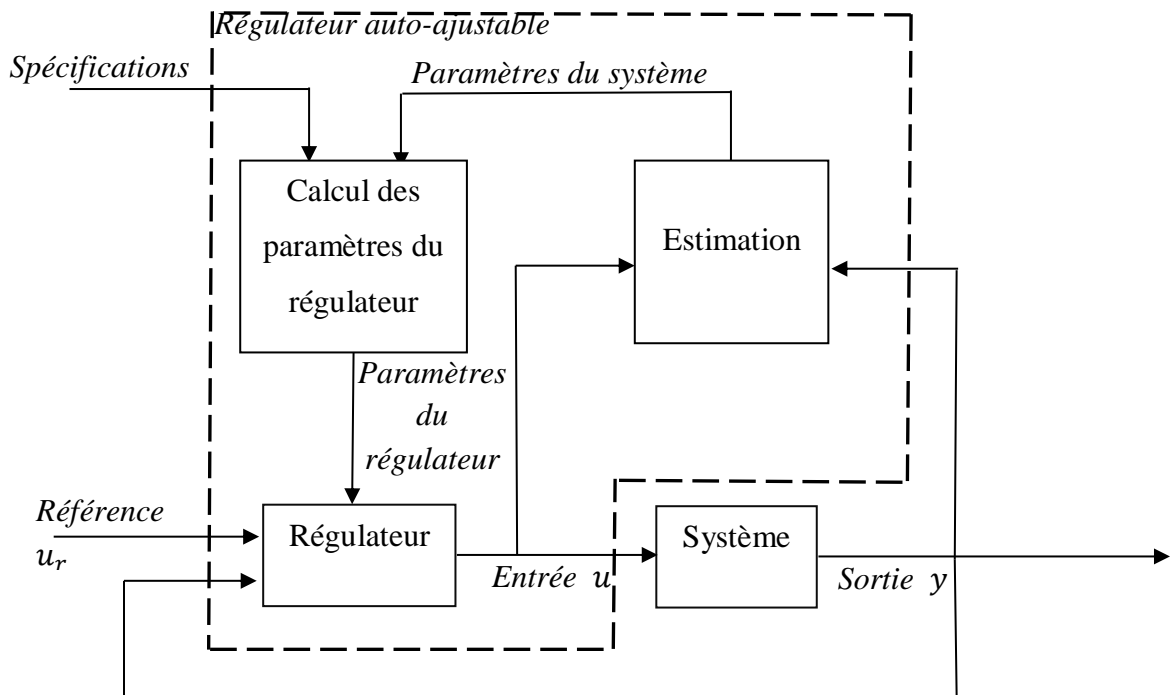
Malgré ses inconvénients, la commande adaptative à gains préprogrammés demeure une technique populaire largement utilisée dans plusieurs applications industrielles (voir [FER13], [GNO10], [MCR73]).



**Fig. 2.1** Commande adaptative par séquençement du gain

### 2.2.2 Régulateurs auto-ajustables (STR)

Une autre approche de la commande adaptative est la commande auto-ajustable, elle est appelée ainsi à cause du fait que le régulateur ajuste automatiquement ses paramètres afin d'obtenir les propriétés désirées en boucle-fermée. Un tel système est illustré dans la figure 2.2.



**Fig. 2.2** Commande adaptative avec régulateur auto-ajustable

L'architecture de la commande auto-ajustable contient deux boucles : une boucle interne du régulateur et une boucle externe d'ajustement de ses paramètres. La boucle externe est composée d'un estimateur des paramètres du processus, et d'un bloc pour le calcul des paramètres du régulateur. Les paramètres du système sont estimés et utilisés dans le calcul des paramètres du régulateur. Pour obtenir de bonnes estimations, il peut être également nécessaire d'introduire des signaux de perturbation. Cette fonction n'est pas illustrée à la figure 2.2 afin de simplifier la figure.

Le régulateur auto-ajustable a été initialement développé pour le problème de commande stochastique à variance minimale [AST73]. Du fait que l'approche est très flexible dans le choix du régulateur et de l'estimateur, de nombreuses combinaisons ont vu le jour. Par exemple : dans [BOR74], les auteurs ont décrit un régulateur auto-ajustable à variance minimale utilisant un estimateur des moindres carrés, des régulateurs auto-

ajustables par placement de pôles ont été étudiés par de nombreux auteurs à titre d'exemple : [WOU77], [AST80], la commande linéaire quadratique gaussienne LQG (Linear Quadratic Gaussian) est la base des régulateurs auto-ajustables présenté dans [AST82].

Le régulateur auto-ajustable illustré à la figure (2.2) est appelé STR explicite ou STR basé sur l'estimation explicite d'un modèle du processus. Il est parfois possible de reparamétriser le processus pour qu'il puisse être exprimé en fonction des paramètres du régulateur. Cela donne une simplification significative de l'algorithme, car le bloc de calcul des paramètres du régulateur sera éliminé. Un tel régulateur est appelé un STR implicite car il est basé sur l'estimation implicite du modèle du processus.

Dans ce qui suit, nous présenterons une méthode algébrique simple de conception d'un régulateur STR. En premier lieu, nous exposerons le problème de conception du régulateur pour des systèmes à paramètres connus. Ensuite, un algorithme pour la synthèse du régulateur adaptatif sera donné.

### 2.2.2.1 Conception du régulateur pour des systèmes à paramètres connus

On considère un processus décrit par un système à une entrée et une sortie. On traitera dans ce point particulier des systèmes discrets. Puisque la méthode de conception est purement algébrique [AST95], nous pouvons étudier simultanément des systèmes continus (que nous traitons principalement dans notre travail) en écrivant :

$$Dy(t) = Nu(t) \quad (2.1)$$

où  $D$  et  $N$  sont des polynômes fonctions, soit de l'opérateur différentiel  $s = \frac{d}{dt}$ , soit de l'opérateur de décalage en avance  $q$ . On suppose que  $D$  et  $N$  sont premiers entre eux. De plus,  $D$  est supposé monique, i.e. le coefficient du plus haut degré dans  $D$  vaut 1.

$u$  est le signal de commande et  $y$  le signal de sortie. On désire trouver un régulateur tel que le système suit le signal de référence donné par :

$$D_m y_m(t) = N_m u_r \quad (2.2)$$

où  $D_m$  et  $N_m$  sont des polynômes.

Une loi de commande linéaire générale peut être décrite par :

$$Ru(t) = Tu_r(t) - Sy(t) \quad (2.3)$$

où  $R$ ,  $S$  et  $T$  sont des polynômes.

Cette loi de commande représente une contre réaction négative avec une fonction de transfert  $-\frac{S}{R}$  et une action directe avec une fonction de transfert  $\frac{T}{R}$ .

L'élimination de  $u(t)$  entre (2.1) et (2.3) donne l'équation du système en boucle fermée suivante :

$$(DR + NS)y(t) = NTu_r(t) \quad (2.4)$$

Les zéros du processus donnés par  $N = 0$  seront alors les zéros de la boucle fermée sauf s'ils sont compensés par les pôles correspondants de la boucle fermée. Les zéros instables ou mal amortis ne peuvent pas être compensés. Le polynôme  $N$  est factorisé comme suit :

$$N = N^+N^- \quad (2.5)$$

où  $N^+$  est un polynôme monique qui contient les facteurs qui peuvent être compensés et  $N^-$  un polynôme qui contient les facteurs restants.

De (2.4), il suit que le polynôme caractéristique est :

$$DR + NS = D_r \quad (2.6)$$

L'idée clé de la méthode de conception est de spécifier le polynôme désiré en boucle fermée  $D_r$ . Les polynômes  $R$  et  $S$  peuvent être déterminés à partir de l'équation (2.6), qui joue un rôle fondamental en Algèbre, elle est appelée *l'équation diophantienne*. L'équation a toujours des solutions si les polynômes  $D$  et  $N$  n'ont pas de facteurs communs.

Le polynôme  $D_r$  peut être conçu de façon à avoir trois types de facteurs : les zéros compensés du processus, les pôles désirés du modèle, et les pôles de l'observateur. Soit  $N^+$ ,  $D_m$ ,  $D_0$  des polynômes qui dénotent ces trois facteurs respectivement.

$$DR + NS = N^+D_mD_0 \quad (2.7)$$

Parce que  $N^+$  divise  $N$ , il s'ensuit que  $N^+$  divise  $R$ , d'où :

$$R = N^+ R_1 \quad (2.8)$$

L'équation (2.6) peut être réécrite comme suit :

$$DR_1 + N^- S = D_0 D_m \quad (2.9)$$

En exigeant que la réponse du système en boucle fermée aux signaux de référence soit spécifiée par (2.2), donc que (2.4) soit égale à (2.2), on aura :

$$N_m = N^- N_m^+ \quad (2.10)$$

$$T = A_0 N_m^+ \quad (2.11)$$

Les spécifications doivent être telles que  $N^-$  est facteur de  $N_m$ . Autrement, il n'y a pas de solution au problème de conception.

Pour compléter la solution du problème, il reste à donner les conditions garantissant l'existence de solutions de (2.7) donnant une loi de commande causale.

Pour obtenir un régulateur causal dans le cas discret ou propre dans le cas continu, il faut satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \deg S &\leq \deg R \\ \deg T &\leq \deg R \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les conditions de causalité (2.12) peuvent s'écrire (pour plus de détails, voir [AST95]) :

$$\begin{aligned} \deg D_r &\geq 2\deg D - 1 \\ \deg D_m - \deg N_m &\geq \deg D - \deg N = d_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'équation diophantienne (2.6) possède de nombreuses solutions. Nous pouvons choisir la solution qui donne le régulateur du plus petit degré. Nous l'appelons la solution de degré minimal résumée dans l'algorithme suivant :

**Algorithme 1 : Placement de pôles de degré minimal****Données :** Polynômes  $D, N$ **Spécification :** Polynômes  $D_m, N_m$  et  $D_0$ **Condition de compatibilité :**

$$\deg D_m = \deg D$$

$$\deg N_m = \deg N$$

$$\deg D_0 = \deg D - \deg N^+ - 1$$

$$N_m = N^- N_m^+$$

**Etape 1 :** Factoriser  $N$  selon (2.5)**Etape 2 :** Trouver une solution  $R_1$  et  $S$  avec  $S < \deg D$  à partir de (2.9)**Etape 3 :** A partir de (2.8) et (2.11), calculer le signal de commande en utilisant (2.3)**2.2.2.2 Conception du régulateur STR explicite**

La loi de commande (2.3) ne peut pas être réalisée si les paramètres du modèle (2.1) sont inconnus. Cependant, ces derniers peuvent être estimés et plusieurs méthodes récursives peuvent être utilisées pour le faire.

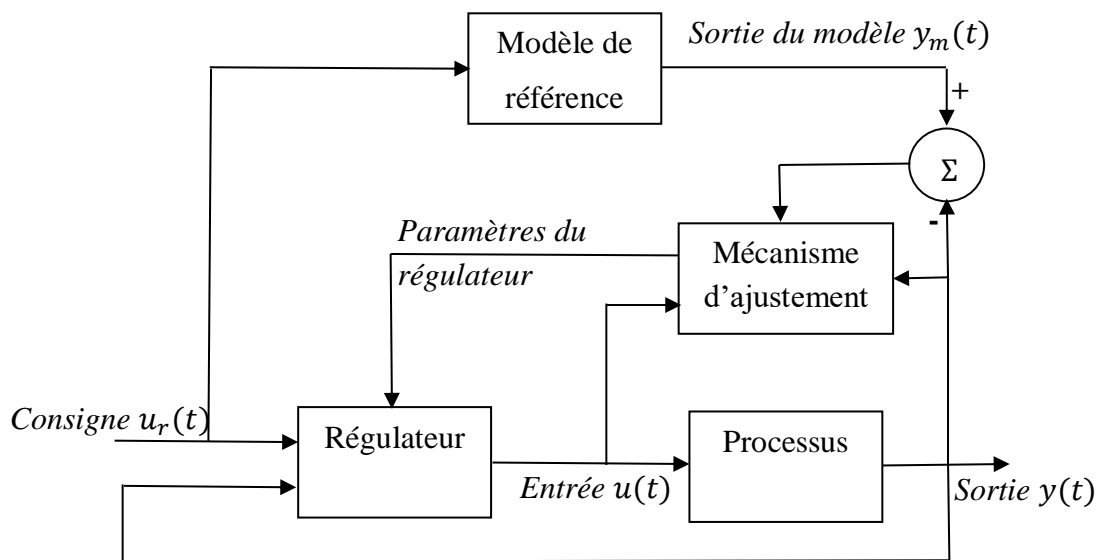
Un STR explicite basé sur un placement de pôles peut être exprimé comme suit :

**Algorithme 2 Régulateur auto ajustable explicite****Etape 1 :** Estimer les coefficients des polynômes  $D$  et  $N$  dans (2) récursivement en utilisant une des méthodes d'estimation.**Etape 2 :** Substituer  $D$  et  $N$  par les estimations obtenues à l'étape 1, et résoudre (2.9) pour obtenir  $R_1$  et  $S$ . Calculer  $R$  par (2.8) et  $T$  par (2.11).**Etape 3 :** Calculez le signal de commande à partir de (2.3).

Répétez les étapes 1 à 3 à chaque période d'échantillonnage.

### 2.2.3 Commande adaptative à modèle de référence

La commande adaptative à modèle de référence MRAC (Model Reference Adaptive Control) est une des commandes adaptatives les plus connues. Cette commande dont le schéma est illustré à la figure (2.3) a été dérivée de la commande à modèle de référence MRC (Model Reference Control). Ce schéma a été développé à l'origine par Whitaker et ses collègues en 1958 [WHI58] pour résoudre le problème de conception d'autopilotes pour les avions, les spécifications sont données sous forme d'un modèle de référence qui décrit comment la sortie du processus devrait idéalement répondre au signal de consigne. Notons que le modèle de référence fait partie du système de commande. Le régulateur peut être considéré comme composé de deux boucles. La boucle interne est une boucle de commande ordinaire composée du processus et du régulateur. Les paramètres du régulateur sont ajustés par la boucle externe, de telle sorte que l'erreur entre la sortie du modèle de référence et la sortie du processus devienne petite. La boucle externe est donc aussi une boucle du régulateur, le problème clé est de déterminer le mécanisme d'ajustement afin d'obtenir un système stable qui amène l'erreur à zéro. Ce dernier peut être obtenu de deux manières : en utilisant *la méthode du gradient* ou en appliquant *la théorie de la stabilité*.



**Fig. 2.3** Commande adaptative à modèle de référence

Le système adaptatif à modèle de référence MRAS (Model Reference Adaptive System) illustré à la figure (2.3) est appelé schéma direct car les paramètres du régulateur sont mis à jour directement. Il y a aussi d'autres schémas MRAS où les paramètres du

régulateur sont mis à jour indirectement et qui sont appelés schémas indirectes (voir [NAR79], [GYO18]).

Il ressort clairement des figures (2.2) et (2.3) que le MRAS et le STR sont étroitement liés. Les deux systèmes ont deux boucles de réaction (feedback). La boucle interne est une boucle de contre-réaction (feedback) ordinaire composée du processus et du régulateur, le régulateur possède des paramètres de régulation qui sont ajustés par la boucle externe. Les ajustements sont basés sur les retours de mesures d'entrées et de sorties du processus. Les méthodes de conception de la boucle intérieure et les techniques utilisées pour ajuster les paramètres de la boucle externe peuvent cependant être différentes. Le MRAS direct est étroitement lié au STR implicite et le MRAS indirect au STR explicite (pour plus détails, voir [LAN79], [LAN11]).

## 2.3 Schémas de commande MRAC directe

### 2.3.1 Commande MRAC avec loi d'adaptation MIT

La loi de MIT est l'approche originale pour la commande MRAC. Cette loi a été développé au *laboratoire d'instrumentation* de l'université de *M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology)* d'où dérive son nom.

#### 2.3.1.1 Loi MIT

Afin de représenter la loi MIT, on considère un système en boucle fermée dans lequel le régulateur possède un vecteur  $\theta$  de paramètres ajustables. La réponse désirée en boucle fermée est spécifiée par la sortie  $y_m$  du modèle de référence.

Soit  $e$  l'erreur entre la sortie  $y$  de la boucle fermée et celle du modèle de référence  $y_m$ . L'ajustement des paramètres est fait de façon à minimiser une fonction coût  $J$  définie par :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \quad (2.14)$$

Afin de minimiser  $J$ , il est logique de faire varier les paramètres dans la direction négative du gradient de  $J$ , soit :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\delta J}{\delta \theta} = -\gamma e \frac{\delta e}{\delta \theta} \quad (2.15)$$

L'équation (2.15) est la fameuse règle dite du MIT.

Le terme  $\frac{\delta e}{\delta \theta}$  est crucial et appelé 'dérivée de sensibilité', il exprime l'influence des paramètres ajustables sur l'erreur,  $\gamma$  représente le gain d'adaptation.

Il est souvent supposé que les paramètres du régulateur varient moins rapidement que les autres variables dans le système. Par conséquent, la dérivée de sensibilité peut être calculée en supposant que  $\theta$  est constant.

Il existe d'autres alternatives à la définition de la fonction coût  $J$ , à titre d'exemple :

$$J(\theta) = |e| \quad (2.16)$$

La méthode du gradient donne :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\delta e}{\delta \theta} \text{sign}(e) \quad (2.17)$$

Le premier MRAS mis en œuvre était basé sur la formule (2.17). Il y a cependant de nombreuses autres possibilités, par exemple ce qu'on appelle l'*algorithme du sign-sign* donné par :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \text{sign}\left(\frac{\delta e}{\delta \theta}\right) \text{sign}(e) \quad (2.18)$$

Le problème de commande par modèle de référence peut être décrit comme suit :

Considérons la fonction de transfert  $W_m(s)$  du modèle de référence spécifiant les performances souhaitées, et soit  $G_c(s, \theta)$  la fonction de transfert du processus en boucle fermée, où  $\theta$  représente le vecteur des paramètres réglables. De plus, soit  $u_r$  le signal de commande, ainsi l'erreur entre la sortie  $y$  de la boucle fermée et celle du modèle de référence  $y_m$  est donné par :

$$e(t) = (G_c(s, \theta) - W_m(s))u_r(t) \quad (2.19)$$

Le système adaptatif à modèle de référence essaie de varier les paramètres  $\theta$  du régulateur afin que l'erreur définie par (2.19) tende vers zéro. La règle du MIT donné par :

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e \quad (2.20)$$

Où  $\varphi = -\frac{\delta e}{\delta \theta}$  ; peut être interprétée comme une méthode du gradient pour minimiser l'erreur.

Le choix du gain d'adaptation  $\gamma$  est critique et dépend des amplitudes des signaux. L'algorithme normalisé :

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \frac{\varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} \quad (2.21)$$

est moins sensible aux niveaux des signaux.

Les systèmes obtenus avec la règle de MIT fonctionne comme prévu pour de petits gains d'adaptation. Un comportement très complexe peut être obtenu pour des gains d'adaptation élevés.

### 2.3.1.2 Réalisation du régulateur MRAC

La méthode de conception du régulateur peut être résumée comme suit :

1. Trouver une structure du régulateur qui permet une poursuite parfaite de la sortie.
2. Calculer l'erreur de modèle.
3. Utiliser la loi d'ajustement des paramètres (2.20) ou la loi normalisée (2.21).

On suppose que le processus est décrit par le modèle continu suivant :

$$Dy(t) = n_0 Nu(t) \quad (2.22)$$

où  $D$  et  $N$  sont des polynômes de l'opérateur différentiel  $s$  supposés ne pas avoir de facteurs communs et le polynôme  $N$  est monique et a tous ses zéros dans le demi-plan gauche. Le paramètre  $n_0$  est dite *gain instantané*.

On suppose qu'on désire trouver un régulateur tel que la sortie du système suit le signal de référence donné par (2.2), un régulateur linéaire général peut être décrit par (2.3), où  $R, S$

et  $T$  sont des polynômes de l'opérateur différentiel  $s$ , de degrés  $k$ ,  $l$  et  $m$  respectivement tels que :

$$\begin{aligned} R(s) &= s^k + r_1 s^{k-1} + \dots + r_k \\ S(s) &= s_0 s^l + s_1 s^{l-1} + \dots + s_l \\ T(s) &= t_0 s^m + t_1 s^{m-1} + \dots + t_m \end{aligned} \quad (2.23)$$

$u_c$  est le signal de référence. Puisque le polynôme  $N$  est stable, les pôles correspondant peuvent être compensés par le régulateur. Cela correspond à  $R = R_1 N$ .

Le système en boucle fermée obtenu quand le régulateur est appliqué au processus (2.22) est décrit par :

$$(DR_1 + n_0 S)y = n_0 T u_r \quad (2.24)$$

Si le polynôme  $T$  est choisi tel que  $T = t_0 D_0$ , où  $D_0$  est un polynôme monique stable et  $R_1$  et  $S$  satisfont :

$$DR_1 + n_0 S = D_0 D_m \quad (2.25)$$

Il est possible de réaliser une poursuite de modèle parfaite avec le modèle :

$$D_m y_m(t) = n_0 t_0 u_r \quad (2.26)$$

A partir des équations (2.22) et (2.25), il vient que :

$$D_0 D_m y = DR_1 y + n_0 S y = R_1 n_0 N u + n_0 S y \quad (2.27)$$

En introduisant l'erreur  $e = y - y_m$ , il vient à partir de (2.26) et (2.27) que :

$$D_0 D_m e = D_0 D_m (y - y_m) = n_0 (R u + S y - T u_r) \quad (2.28)$$

Ou bien :

$$e = \frac{n_0}{D_0 D_m} (R u + S y - T u_r) \quad (2.29)$$

Soit  $\theta^*$  le vecteur des vrais paramètres du régulateur :

$$\theta^* = [r_1 \dots r_k \quad s_0 \dots s_l \quad t_0 \dots t_m] \quad (2.30)$$

L'erreur pourra s'écrire comme suit :

$$e = \varphi^T \theta^* \quad (2.31)$$

Où  $\varphi$  représente le vecteur de régression défini par :

$$\begin{aligned} \varphi^T &= - \left[ \frac{\delta e}{\delta r_1} \quad \frac{\delta e}{\delta r_2} \quad \dots \quad \frac{\delta e}{\delta r_k} \quad \frac{\delta e}{\delta s_0} \quad \frac{\delta e}{\delta s_1} \quad \dots \quad \frac{\delta e}{\delta s_l} \quad \frac{\delta e}{\delta t_0} \quad \frac{\delta e}{\delta t_1} \quad \dots \quad \frac{\delta e}{\delta t_m} \right] \\ &= \frac{n_0}{D_0 D_m} [s^{k-1}u \quad \dots \quad u \quad s^l y \quad \dots \quad y \quad - s^m u_r \quad \dots \quad - u_r] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Les polynômes  $R, S$  et  $T$  doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \deg D_m - \deg N_m &\geq \deg D - \deg N \\ \deg D_0 &\geq 2 \deg D - \deg N_m - \deg N - 1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ces deux conditions sont toujours vérifiées, même dans le cas où  $D_0 = 1$ , car on utilise un modèle tel que  $\deg D_m > \deg D$

$$k = \deg R = \deg R_1 + \deg N = \deg D_m + \deg N - \deg D \quad (2.34)$$

$$l = \deg S \leq \deg R \quad (2.35)$$

Donc on prendra :

$$\deg S = \deg R$$

Ou bien :

$$\deg S = \deg R - 1$$

Et

$$m = \deg T = \deg N_m$$

Généralement, on prend  $\deg S = \deg R - 1$  pour que le filtre  $S/R$  soit causal.

## 2.3.2 Conception de la commande MRAC en utilisant la théorie de Lyapunov

Il n'y a aucune garantie qu'un régulateur adaptatif basé sur la règle MIT donne un système stable en boucle fermée. Dans ce qui suit, nous présenterons une autre méthode de conception de régulateurs adaptatifs pouvant garantir la stabilité du système. Pour ce faire, nous commençons par présenter la théorie de stabilité de Lyapunov (appelée *méthode directe de Lyapunov* ou encore *seconde méthode de Lyapunov*) pour les systèmes variant dans le temps, pouvant être utilisée pour concevoir des régulateurs adaptatifs.

### 2.3.2.1 Théorie de Lyapunov pour les systèmes variants dans le temps

Les contributions fondamentales à la théorie de la stabilité des systèmes non linéaires ont été réalisées par le mathématicien russe Lyapunov à la fin du dix-neuvième siècle.

On considère les équations différentielles à paramètres variants dans le temps de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (2.36)$$

L'origine est un point d'équilibre pour l'équation (2.36) si  $f(0, t) = 0, \forall t \geq 0$ . Il est supposé que  $f$  est telle que des solutions existent pour tout  $t \geq t_0$ . Pour garantir cela, on suppose que  $f$  est continue par morceaux en  $t$  et localement Lipschitz en  $x$  dans un voisinage de  $x(t) = 0$ . Nous étudions maintenant la stabilité de la solution  $x(t) = 0$ .

#### Définition 2.1 : Stabilité au sens de Lyapunov

La solution  $x(t) = 0$  de l'équation (2.36) est uniformément stable si pour  $\varepsilon > 0$  il existe un nombre  $\delta(\varepsilon) > 0$  indépendant de  $t_0$  tel que :

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (2.37)$$

La solution est uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et il existe  $c > 0$  indépendant de  $t_0$ , tel que  $x(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  uniformément en  $t_0$ , pour tout  $\|x(t_0)\| < c$ .

Pour énoncer le théorème de stabilité [AST95] pour les systèmes représentés par l'équation (2.36), nous devons d'abord voir la définition 1.1 des fonctions dites de classe  $K$  (introduite au premier chapitre).

### **Théorème 2.1 : Théorème de stabilité de Lyapunov**

Soit  $x = 0$  un point d'équilibre de l'équation (2.36) et  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ . Soit  $V$  une fonction continuellement différentiable telle que :

$$\begin{aligned} g_1(\|x\|) &\leq V(x, t) \leq g_2(\|x\|) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -g_3(\|x\|) \end{aligned}$$

Pour  $\forall t \geq 0$ , où  $g_1, g_2$  et  $g_3$  sont des fonction de classe  $K$ . alors  $x = 0$  est uniformément asymptotiquement stable.

Lors de l'utilisation de la théorie de Lyapunov sur les problèmes de commande adaptative, nous trouvons souvent que  $\frac{dV}{dt}$  est seulement semi-défini négatif. Cela implique que des conditions supplémentaires doivent être imposées au système. Le lemme suivant donne un résultat utile.

### **Lemme 2.1 : Lemme de Barbalat**

Si  $g$  est une fonction d'une variable réelle  $t$  définie et uniformément continue pour  $t \geq 0$ , et si la limite de l'intégrale

$$\int_0^t g(s) ds$$

quand  $t$  tend vers l'infini existe et est un nombre fini, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

Une conséquence du lemme de Barbalat donne le résultat du lemme 2.2 suivant :

### **Lemme 2.2**

Si  $g, \dot{g} \in \mathcal{L}_\infty$ , et  $g \in \mathcal{L}_p$  pour un certain  $p \in [1, \infty)$ , alors  $g(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Maintenant, nous allons montrer comment la théorie de stabilité de Lyapunov peut être utilisée afin de concevoir un algorithme d'ajustement de paramètres dans un système de commande adaptative. Pour ce faire, nous devons d'abord déduire une équation différentielle pour l'erreur,  $e = y - y_m$  qui contient les paramètres ajustables. Nous essayons ensuite de trouver une fonction de Lyapunov et un mécanisme d'adaptation tel que l'erreur passe à zéro. En utilisant la théorie de Lyapunov pour les systèmes adaptatifs, nous constatons que  $\frac{dV}{dt}$  est généralement seulement semi-défini négatif. La procédure consiste à déterminer l'équation d'erreur et une fonction de Lyapunov avec une dérivée seconde bornée.

### 2.3.2.2 MRAC directe basé sur l'approche SPR-Lyapunov

Le concept de fonctions de transfert réelles positives PR (Positive Real) et strictement réelles positives SPR (Strictly Positive Real) joue un rôle important dans l'analyse de stabilité d'une grande classe de systèmes non linéaires, qui comprend également les systèmes adaptatifs.

Dans cette section, nous allons décrire une méthode de conception d'un schéma MRAC direct avec une loi d'adaptation basée sur l'approche SPR-Lyapunov. Cette approche a dominé la littérature sur la commande adaptative pour des systèmes continus dont le degré relatif  $n^* = 1$ , en raison de la simplicité de conception et d'analyse de stabilité. Nous exposerons la méthode de conception de commande par modèle de référence (MRC) pour des systèmes à paramètres connus. Cette dernière sera utilisée par la suite afin d'aboutir à un schéma de commande adaptative par modèle de référence (MRAC) dans le cas où les paramètres du processus sont inconnus. Pour ce faire, d'abord, nous présentons quelques définitions et résultats nécessaires pour l'élaboration de la loi d'adaptation SPR-Lyapunov (voir [IOA96]).

#### Définition 2.2 : Fonction de transfert PR

*Une fonction rationnelle  $G(s)$  de la variable complexe  $s = \sigma + j\omega$  est dite PR si*

- (i)  *$G(s)$  est réelle pour tout  $s$  réel.*
- (ii)  *$\text{Re}[G(s)] \geq 0$  pour tout  $\text{Re}[s] > 0$ .*

**Définition 2.3 : Fonction de transfert SPR**

Supposons que  $G(s)$  n'est pas identiquement nulle pour tout  $s$ . Alors  $G(s)$  est SPR si  $G(s - \epsilon)$  est SP pour certain  $\epsilon > 0$ .

Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes dans le domaine fréquentiel pour qu'une fonction de transfert soit SPR.

**Théorème 2.2 [IOA87]**

Supposons que la fonction rationnelle  $G(s)$  de la variable complexe  $s = \sigma + j\omega$  est réelle pour  $s$  réel et non identiquement nulle pour tout  $s$ . Soit  $n^*$  le degré relatif de  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  avec  $|n^*| \leq 1$ , alors  $G(s)$  est SPR si et seulement si :

- (iii)  $G(s)$  est analytique dans  $Re(s) \geq 0$ .
- (iv)  $Re[G(j\omega)] > 0, \forall \omega \in (-\infty, +\infty)$ .
- (v) (a) quand  $n^* = 1$ ,  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^2 Re[G(j\omega)] > 0$   
 (b) quand  $n^* = -1$ ,  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{G(j\omega)}{j\omega} > 0$

Il faut noter que quand  $n^* = 0$ , (i) et (ii) dans le théorème 2.2 sont nécessaires et suffisants pour que  $G(s)$  soit SPR.

Certaines propriétés utiles des fonctions SPR sont données par le corollaire suivant :

**Corollaire 2.1**

- (i)  $G(s)$  est SPR si et seulement si  $\frac{1}{G(s)}$  est SPR.
- (ii) Si  $G(s)$  est SPR, alors,  $|n^*| \leq 1$ , et les zéros et les pôles de  $G(s)$  se trouvent dans  $Re[s] < 0$ .
- (iii) Si  $|n^*| > 1$ , alors  $G(s)$  n'est pas PR.

Le lien essentiel entre les fonctions de transfert SPR et l'existence d'une fonction de Lyapunov pour établir la stabilité est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 2.3 (Meyer-Kalman-Yakubovich : MKY) [MEY65]**

Etant donné une matrice  $A$  stable, les vecteurs  $B, C$  et un scalaire  $d \geq 0$ , nous avons ce qui suit :

Si

$$G(s) = d + C^T(sI - A)^{-1}B$$

est SPR, alors pour tout  $L = L^T > 0$  donné, il existe un scalaire  $v$ , un vecteur  $q$  et un  $P = P^T$  tels que :

$$\begin{aligned} A^T P + P A^T &= -q q^T - v L \\ P B - C &= \pm q \sqrt{2d} \end{aligned}$$

Dans de nombreuses applications des concepts SPR aux systèmes adaptatifs, la fonction de transfert  $G(s)$  implique des compensations de pôles et de zéros stables, ce qui implique que le système associé au triplet  $(A, B, C)$  est incontrôlable ou non observable. Dans ces situations, le lemme MKY est le lemme approprié à utiliser.

**2.3.2.2.1 Régulateur MRC pour des systèmes à paramètres connus**

Nous formulons dans cette section le problème MRC pour une classe générale de systèmes linéaires invariants dans le temps à une entrée et une sortie LTI SISO (Linear Time Invariant Single Input Single Output) et nous le résolvons dans le cas où les paramètres du processus sont connus avec exactitude.

Considérons le processus LTI SISO décrit dans l'espace d'état par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = C^T x \end{cases} \quad (2.38)$$

où  $x \in \mathcal{R}^n; y, u \in \mathcal{R}^1$  et  $A, B, C$  ont des dimensions appropriées.

La fonction de transfert du processus est donnée par :

$$y = G(s)u \quad (2.39)$$

avec  $G(s)$  exprimée sous la forme :

$$G(s) = k_p \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.40)$$

où  $N(s), D(s)$  sont des polynômes moniques et  $k_p$  est une constante appelée *gain à hautes fréquences*.

Le modèle de référence sélectionné par le concepteur pour décrire les caractéristiques désirées du processus, est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_r, & x_m(0) = x_{m0} \\ y_m = C_m^T x_m \end{cases} \quad (2.41)$$

où  $x_m \in \mathcal{R}^{p_m}$ , avec  $p_m$  entier ;  $y_m, u_r \in \mathcal{R}^1$  et  $u_r$  est l'entrée de référence. La fonction de transfert du modèle de référence est donnée par :

$$y_m = W_m(s) u_r \quad (2.42)$$

avec  $W_m(s)$  exprimée sous la forme :

$$W_m(s) = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)} \quad (2.43)$$

où  $N_m(s), D_m(s)$  sont des polynômes moniques et  $k_m$  est une constante.

L'objectif de la commande MRC est de déterminer l'entrée de commande  $u$  telle que tous les signaux sont bornés et la sortie du processus  $y$  suit la sortie du modèle de référence  $y_m$  aussi près que possible pour n'importe quelle entrée de référence  $u_r(t)$ . Pour ce faire, on suppose que le processus et le modèle de référence satisfont les hypothèses suivantes :

### ***Hypothèses concernant le processus***

- P1.**  $N(s)$  est Hurwitz et monique de degré  $m_p$ .
- P2.** La borne supérieur  $n$  du degré  $n_p$  de  $D(s)$  est connue.
- P3.** Le degré relatif  $n^* = n_p - m_p$  est connu.
- P4.** Le signe de gain à hautes fréquences  $k_p$  est connu.

**Hypothèses concernant le modèle de référence**

**M1.**  $N_m(s), D_m(s)$  sont des polynômes moniques Hurwitz de degré  $q_m, p_m$  respectivement, où  $p_m \leq n$ .

**M2.** Le degré relatif  $n_m^* = p_m - q_m$  de  $W_m(s)$  est le même que celui de  $G(s)$ , c'est-à-dire :  $n_m^* = n^*$ .

En plus des hypothèses **P1** à **P4** et **M1**, **M2**, supposons également que les paramètres du processus, c'est-à-dire les coefficients de  $G(s)$  sont connus exactement. Parce que le processus est linéaire invariant dans le temps et connu, la conception du schéma MRC est réalisé en utilisant la théorie des systèmes linéaires.

Considérons la loi de commande [IOA96] :

$$u = \theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \theta_2^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \theta_3^* y + c_0^* u_r \quad (2.44)$$

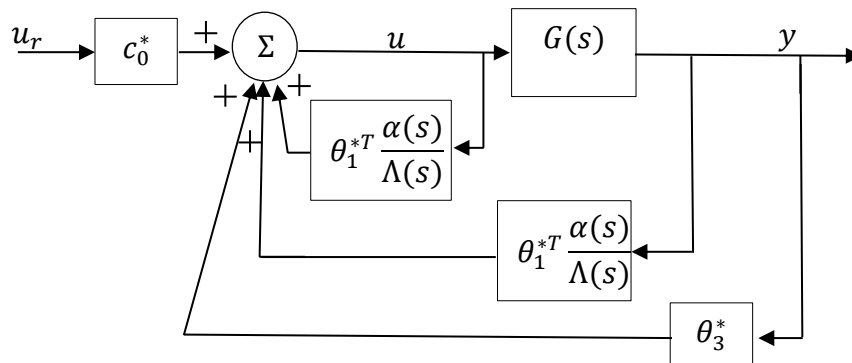
représentée sur la figure (2.4), où

$$\begin{aligned} \alpha(s) &\triangleq \alpha_{n-2}(s) = [s^{n-2}, s^{n-3}, \dots, s, 1]^T \text{ pour } n \geq 2 \\ \alpha(s) &\triangleq 0 \text{ pour } n = 1 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$c_0^*, \theta_3^* \in \mathcal{R}^1; \theta_1^*, \theta_2^* \in \mathcal{R}^{n-1}$  sont des paramètres constants à concevoir et  $\Lambda(s)$  est un polynôme Hurwitz monique arbitraire de degré  $n - 1$  qui contient  $N_m(s)$  comme facteur :

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s)N_m(s) \quad (2.46)$$

ce qui implique que  $\Lambda_0(s)$  est un polynôme monique, Hurwitz de degré  $n_0 = n - 1 - q_m$ .



**Fig. 2.4** Structure de la commande MRC

Le vecteur de paramètres du régulateur  $\theta^* \in \mathcal{R}^{2n}$  est choisi tel que la fonction de transfert de  $u_r$  à  $y$  soit égale à  $W_m(s)$ .

La fonction de transfert de la boucle fermée est :

$$y = G_c(s)u_r \quad (2.47)$$

avec

$$G_c(s) = \frac{c_0^* k_p N(s) \Lambda^2(s)}{\Lambda(s)[(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s))D(s) - k_p N(s)(\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))]} \quad (2.48)$$

Nous pouvons maintenant atteindre l'objectif de commande si nous sélectionnons les paramètres du régulateur  $\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, c_0^*$  de sorte que les pôles en boucle fermée soient stables et la fonction de transfert de la boucle fermée vérifie  $G_c(s) = W_m(s)$ , c'est-à-dire :

$$\frac{c_0^* k_p N(s) \Lambda^2(s)}{\Lambda(s)[(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s))D(s) - k_p N(s)(\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))]} = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)} \quad (2.49)$$

est satisfaite pour tout  $s \in \mathcal{C}$ . Parce que le degré du dénominateur de  $G_c(s)$  est  $n_p + 2n - 2$  et celui de  $D_m$  est  $p_m \leq n$ , pour que (2.49) tienne,  $n_p + 2n - 2 - p_m$  compensations de zéro pôle doivent se faire dans  $G_c(s)$ . Et puisque  $N(s)$  est Hurwitz (par hypothèse) et  $\Lambda(s) = \Lambda_0(s)N_m(s)$  est conçu pour être Hurwitz, il s'ensuit que tous les zéros de  $G_c(s)$  sont stables et donc toute compensation peut seulement se faire dans  $\mathcal{C}^-$ . En choisissant :

$$c_0^* = \frac{k_m}{k_p} \quad (2.50)$$

et en utilisant  $\Lambda(s) = \Lambda_0(s)N_m(s)$ , l'équation (2.49) devient :

$$(\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha)D - k_p N(\theta_2^{*T} \alpha + \theta_3^* \Lambda) = N \Lambda_0 D_m \quad (2.51)$$

ou

$$\theta_1^{*T} \alpha(s)D(s) + k_p(\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))N(s) = \Lambda(s)D(s) - N(s)\Lambda_0(s)D_m(s) \quad (2.52)$$

En égalant les coefficients des puissance de  $s$  des deux côtés de (2.52), on peut exprimer (2.52) en terme d'équation algébrique :

$$S\bar{\theta}^* = p \quad (2.53)$$

où  $\bar{\theta}^* = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^*]^T$ ,  $S$  est une matrice de dimension  $(n + n_p - 1) \times (2n - 1)$  qui dépend des coefficients de  $D, k_p N$  et  $\Lambda$ , et  $p$  est un vecteur de taille  $n + n_p - 1$  avec les coefficients de  $\Lambda D - N\Lambda_0 D_m$ .

Enfin, la réalisation dans l'espace d'état de la loi de commande (2.44) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = F\omega_1 + gu, & \omega_1(0) = 0 \\ \dot{\omega}_2 = F\omega_2 + gy, & \omega_2(0) = 0 \\ u = \theta^{*T}\omega \end{cases} \quad (2.54)$$

où  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{R}^{n-1}$ ,  $\theta^* = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^*, c_0^*]^T$ ,  $\omega = [\omega_1^T, \omega_2^T, y_p, r]^T$ , et  $(F, g)$  est la réalisation dans l'espace d'état de  $\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}$ , c'est-à-dire  $(sI - F)^{-1}g = \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}$ .

**Lemme 2.4** [IOA96]

*Soient les degrés de  $D, N, \Lambda, \Lambda_0$  et  $D_m$  tels que spécifiés dans (2.52). Alors (i) La solution  $\bar{\theta}^*$  de (2.52) ou (2.53) existe toujours. (ii) De plus, si  $D, N$  sont premiers et  $n = n_p$ , alors la solution  $\bar{\theta}^*$  est unique.*

**Remarque 2.1**

Pour la conception de l'entrée de commande (2.50), on a supposé que  $n \geq n_p$ . Parce que le modèle du processus est connu avec exactitude, nous n'avons pas besoin de supposer une borne supérieure pour le degré du processus, c'est-à-dire, parce que  $n_p$  est connu  $n$  peut être pris égal à  $n_p$ . On utilise  $n \geq n_p$  exprès afin d'utiliser le résultat dans le cas où les paramètres du processus sont inconnus et seulement la borne supérieure de  $n_p$  est connue.

### 2.3.2.2.2 Régulateur MRAC pour des systèmes à paramètres inconnus

Soit la classe de processus LTI SISO représenté par (2.40), dont le degré relatif est  $n^* = 1$ . Et soit le modèle de référence représenté par (2.43) choisi de façon à avoir le même degré relatif que le processus. On suppose que  $G(s)$  et  $W_m(s)$  satisfont respectivement les

hypothèses **P1** à **P4** et **M1** à **M2**. De plus,  $W_m(s)$  est conçu pour être strictement réelle positive (SPR : Strictly Positive Real).

Il a été montré précédemment que la loi de commande (2.54), où  $\theta^* = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^*, c_0^*]^T$  calculé à partir des équations (2.50) et (2.51) répond aux objectifs définis par la commande MRC. Parce que les paramètres du processus sont inconnus, le vecteur des paramètres du régulateur  $\theta^*$  ne peut être calculé à partir des équations correspondantes et par conséquent, (2.54) ne peut pas être implémentée. Une approche raisonnable à suivre dans ce cas est de remplacer (2.54) par la loi de commande suivante :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = F\omega_1 + gu, & \omega_1(0) = 0 \\ \dot{\omega}_2 = F\omega_2 + gy, & \omega_2(0) = 0 \\ u = \theta^T \omega \end{cases} \quad (2.55)$$

où  $\theta(t)$  est l'estimée de  $\theta^*$  à l'instant  $t$  qui doit être générée par une loi adaptative appropriée. Pour ce faire, nous obtenons d'abord une représentation composite dans l'espace d'état du processus et du régulateur :

$$\begin{cases} \dot{Y}_c = A_0 Y_c + B_c u, & Y_c(0) = Y_0 \\ y_p = C_c^T Y_c \\ u = \theta^T \omega \end{cases} \quad (2.56)$$

où  $Y_c = [x^T, \omega_1^T, \omega_2^T]^T$ .

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ gC^T & 0 & F \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} B \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, C_c^T = [C^T, 0, 0] \quad (2.57)$$

Après, on ajoute et on soustrait l'entrée  $B\theta^{*T}\omega$  pour obtenir :

$$\dot{Y}_c = A_0 Y_c + B_c \theta^{*T} \omega + B_c (u - \theta^{*T} \omega) \quad (2.58)$$

Si nous absorbons maintenant le terme  $B\theta^{*T}\omega$  dans la partie homogène de (2.58), on se retrouve avec la représentation :

$$\begin{cases} \dot{Y}_c = A_c Y_c + B_c c_0^* u_r + B_c (u - \theta^{*T} \omega), & Y_c(0) = Y_0 \\ y = C_c^T Y_c \end{cases} \quad (2.59)$$

où :

$$A_c = \begin{bmatrix} A + B\theta_3^* C^T & B\theta_1^{*T} & B\theta_2^{*T} \\ g\theta_3^* C^T & F + g\theta_1^{*T} & g\theta_2^{*T} \\ gC^T & 0 & F \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

L'équation (2.59) est la même que l'équation de la boucle fermée dans le cas des paramètres connus à l'exception du terme additionnel  $B_c(u - \theta^{*T}\omega)$  qui dépend du choix de l'entrée  $u$ , quand  $u = \theta^{*T}\omega$ , nous avons :

$$\begin{cases} \dot{Y}_c = A_c Y_c + B_c c_0^* u_r, & Y_c(0) = Y_0 \\ y = C_c^T Y_c \end{cases} \quad (2.61)$$

et par conséquent :

$$C_c^T (sI - A_c)^{-1} B_c c_0^* = W_m(s) \quad (2.62)$$

Et donc, le modèle de référence peut être réalisé par les matrices d'état  $(A_c, B_c c_0^*, C_c^T)$  et décrit par la représentation d'état non minimale :

$$\begin{cases} \dot{Y}_m = A_c Y_m + B_c c_0^* u_r, & Y_m(0) = Y_{m0} \\ y_m = C_c^T Y_m \end{cases} \quad (2.63)$$

où  $Y_m$  est l'état de la représentation non minimale du modèle de référence.

En définissant  $e = Y_c - Y_m$  et  $e_1 = y - y_m$ , on obtient l'équation d'erreur suivante :

$$\begin{cases} \dot{e} = A_c e + B_c (u - \theta^{*T}\omega), & e(0) = e_0 \\ e_1 = C_c^T e \end{cases} \quad (2.64)$$

De (2.62) et (2.64), nous obtenons que :

$$e_1 = W_m(s) \rho^* (u - \theta^{*T}\omega) \quad (2.65)$$

où  $\rho^* = \frac{1}{c_0^*}$ .

En substituant la loi de commande (2.55) dans (2.64), on trouve :

$$\begin{cases} \dot{e} = A_c e + \bar{B}_c \rho^* \tilde{\theta}^T \omega, & e(0) = e_0 \\ e_1 = C_c^T e \end{cases} \quad (2.66)$$

où

$$\bar{B}_c = B_c c_0^*$$

$$e_1 = W_m(s)\rho^* \tilde{\theta}^T \omega \quad (2.67)$$

qui relie l'erreur des paramètre  $\tilde{\theta} \triangleq \theta(t) - \theta^*$  avec l'erreur de poursuite  $e_1$ .

Du fait que  $W_m(s) = C_c^T (sI - A_c)^{-1} B_c c_0^*$  est une fonction SPR et  $A_c$  est stable, l'équation (2.66) est une forme appropriée pour l'application de l'approche de conception SPR-Lyapunov.

On procède donc en proposant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\tilde{\theta}, e) = \frac{e^T P_c e}{2} + \frac{\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}}{2} |\rho^*| \quad (2.68)$$

où  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  et  $P_c = P_c^T > 0$  satisfait les équations algébriques :

$$\begin{cases} P_c A_c + A_c^T P_c = -q q^T - v_c L_c \\ P_c \bar{B}_c = C_c \end{cases} \quad (2.69)$$

où  $q$  est un vecteur,  $L_c = L_c^T > 0$  et  $v_c > 0$  est une petite constante, qui sont impliqués par le lemme MKY.

La dérivée temporelle  $\dot{V}$  de  $V$  donne :

$$\dot{V} = -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e + e^T P_c \bar{B}_c \rho^* \tilde{\theta}^T \omega + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} |\rho^*| \quad (2.70)$$

Parce que  $e^T P_c \bar{B}_c = e_1$  et  $\rho^* = |\rho^*| \text{sgn}(\rho^*)$ , on peut obtenir  $\dot{V} \leq 0$  en choisissant la loi d'adaptation :

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = -\Gamma e_1 \omega \text{sgn}(\rho^*) \quad (2.71)$$

qui mène à :

$$\dot{V} = -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e \quad (2.72)$$

L'équation (2.68) et (2.72) implique que  $V \in \mathcal{L}_\infty$  et donc  $e, \tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$ .

Parce que  $e = Y_c - Y_m$  et  $Y_m \in \mathcal{L}_\infty$ , on a  $Y_c \in \mathcal{L}_\infty$ , ce qui implique que  $y, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}_\infty$ . Parce que  $u = \theta^T \omega$  et  $\theta, \omega \in \mathcal{L}_\infty$ , nous avons aussi  $u \in \mathcal{L}_\infty$ . Par conséquent, tous les

signaux de la boucle fermée du processus sont bornés. Il reste à montrer que l'erreur de poursuite  $e_1 = y - y_m$  tend vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$ .

A partir de (2.68) et (2.72) nous établissons que  $e$  et donc  $e_1 \in \mathcal{L}_2$ . En outre, en utilisant  $\theta, \omega, e \in \mathcal{L}_\infty$  dans (2.66) nous aurons que  $\dot{e}, \dot{e}_1 \in \mathcal{L}_\infty$ . Par conséquent  $e_1, \dot{e}_1 \in \mathcal{L}_\infty$  et  $e_1 \in \mathcal{L}_2$ , qui par le lemme 2.2 implique que  $e_1 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé de présenter les méthodes de commande adaptative ainsi que les éléments de base nécessaires à la compréhension et à la conception des systèmes de commande adaptatifs concernés par notre travail de recherche. Nous nous sommes surtout penché sur l'étude des méthodes directe de commande adaptative, notamment la commande MRAC directe. Nous avons montré qu'il était possible de concevoir des lois d'ajustement des paramètres par deux méthodes principales qui sont la méthode du gradient, et la méthode basée sur la théorie de Lyapunov. Plus particulièrement, nous avons porté un intérêt majeur au schéma de commande MRAC directe basé sur l'approche SPR-Lyapunov qui fera l'objet d'une généralisation au cas de processus décrits par des modèles d'ordre fractionnaire et sera l'une des contributions majeures de notre travail de recherche.

Le prochain chapitre sera consacré à l'étude de la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire pouvant apporter une amélioration des performances de la boucle de commande adaptative.



## Chapitre 3

### 3. Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire

#### 3.1 Introduction

Les systèmes d'ordre fractionnaire attirent de plus en plus les chercheurs dans différents domaines de la science et de l'ingénierie ([MAT03], [MA09], [ELS03]). La commande d'ordre fractionnaire est une généralisation de la théorie classique de la commande d'ordre entier, son intérêt majeur est d'améliorer les performances du système de commande en utilisant les concepts de la dérivation d'ordre non entier et des systèmes d'ordre fractionnaire.

Les structures de commande d'ordre fractionnaire les plus connues sont : le régulateur CRONE [OUS91], le régulateur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre Fractionnaire [POD99A] et la commande adaptative d'ordre fractionnaire [LAD08]. La commande adaptative est l'une des techniques de commande les plus populaires dans les applications industrielles. Cette commande consiste à adapter le régulateur en ligne avec les variations du processus commandé afin d'assurer un degré de performances constant. La raison principale qui a encouragé les chercheurs à évoluer vers la commande adaptative d'ordre fractionnaire et essentiellement à la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire (FOMRAC : Fractional Order Model Reference Adaptive Control) est que la commande MRAC est basée sur le choix d'un modèle de référence qui spécifie les performances désirées en boucle fermée, et plusieurs travaux de recherches ont prouvé les très bonnes performances des systèmes d'ordre fractionnaire comparés à ceux d'ordre entier ([OUS95], [LAD16]).

De nombreuses structures de commande MRAC d'ordre fractionnaire ont été développées dans la littérature [LAD12]. Une commande adaptative indirecte par modèle de référence a été introduite pour commander une classe de systèmes d'ordre fractionnaire dans

[CHE16]. Dans [VIN02] et [LAD03], les auteurs ont étudié l'utilisation à la fois d'une loi d'adaptation ainsi qu'un modèle de référence d'ordre fractionnaire. L'utilisation d'un modèle d'ordre fractionnaire et l'introduction d'un filtre dérivateur d'ordre fractionnaire à la sortie du processus ont été proposées dans [LAD06A].

Dans ce chapitre, nous présenterons la stratégie FOMRAC introduite dans [LAD03], qui se ramène à un schéma de commande MRAC avec un modèle d'ordre fractionnaire et une loi d'adaptation comprenant une intégration d'ordre fractionnaire.

Dans notre travail de recherche, nous avons étudié l'applications de la commande FOMRAC sur deux processus industriels, la première application concerne la commande de vitesse d'un véhicule électrique [BAL19], et la deuxième application que nous allons présenter dans ce chapitre et qui traite le problème de commande du niveau d'eau dans un réservoir conique, en vue d'illustrer l'efficacité de cette stratégie de commande [BAL18].

## 3.2 Stratégie de la commande FOMRAC

Nous nous intéressons ici à la commande MRAC directe basée sur la loi d'adaptation MIT que nous avons présentée dans la section 2.3.1.

Nous considérons un modèle de référence d'ordre fractionnaire, qui sera implémenté en utilisant la méthode d'approximation de la fonction des singularités présentée à la section 1.6.3.2.

Soit  $G(s)$  la fonction de transfert du système à commander définie par (2.22), et soit  $G_m(s)$  la fonction de transfert du modèle de référence d'ordre fractionnaire choisie avec :

$$G_m(s) = \frac{N_m(s)}{D_m(s)} \quad (3.1)$$

Notons  $G_m^*(s)$  l'approximation d'ordre entier de  $G_m(s)$ , obtenue par la méthode de la fonction des singularités telle que :

$$G_m^*(s) = \frac{N_m^*(s)}{D_m^*(s)} \quad (3.2)$$

Nous utiliserons le polynôme caractéristique approximé  $D_m^*(s)$  au lieu de  $D_m(s)$  dans l'équation (2.27) et nous aurons :

$$D_0 D_m^* y(t) = n_0 (Ru(t) + Sy(t)) \quad (3.3)$$

Aussi, dans la loi d'ajustement de paramètres du régulateur, on utilisera la loi d'adaptation d'ordre fractionnaire au lieu de (2.21) donnée par :

$$\frac{d^m \theta}{dt^m} = \gamma \frac{\varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} \quad (3.4)$$

et donc :

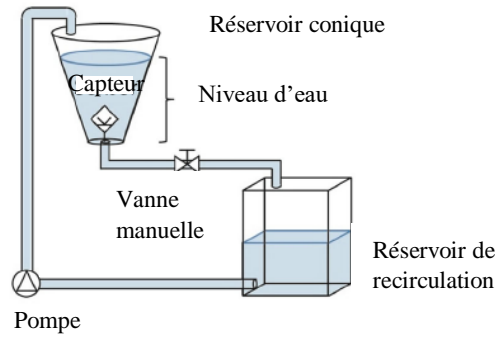
$$\theta = I^m \left( \gamma \frac{\varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} \right) \quad (3.5)$$

La commande FOMRAC est basé sur le choix d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire qui spécifie les performances souhaitées en boucle fermée. De plus, cette stratégie de commande introduit une intégration d'ordre fractionnaire dans la phase de mise à jour des paramètres du correcteur.

### 3.3 Application à la commande du niveau d'un réservoir conique non-linéaire

Dans cette section, nous proposons de commander un système dynamique non-linéaire avec la stratégie FOMRAC en vue d'améliorer les performances du système. Nous traiterons le problème de commande du niveau d'eau dans un réservoir conique [BAL18], qui a été largement étudié dans la littérature, et plusieurs techniques de commande ont été employées, notamment la commande prédictive [WAR12] et les régulateurs d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  [JAU16].

La disposition du système de réservoir conique est illustrée à la figure 3.1, l'eau est pompée du bas du réservoir de recirculation vers la partie supérieure du réservoir conique au moyen d'une pompe entraînée par un moteur à induction de vitesse variable entraînée lui-même par un variateur de fréquence.



**Fig 3.1** Configuration du réservoir conique

D'après [JAU16], le modèle non linéaire du réservoir conique est représenté par l'équation suivante :

$$\dot{h} = \frac{5.43f - 78.23 + \mu\sqrt{h}}{0.65h^2 + 11.4h + 17.1} = g(h, f) \quad (3.6)$$

avec  $\mu = 20.63$ ,  $f$  est l'entrée du système et représente la fréquence du réseau électrique exprimée en pourcentage de la fréquence nominale (50Hz) et varie dans l'intervalle [0% 100%],  $h$  est la sortie du système et représente le niveau d'eau à l'intérieur du réservoir conique exprimé en  $cm$ ,  $g(h, f)$  est une fonction non linéaire de ces deux variables montrant clairement les non-linéarités du système réservoir conique.

Le système est linéarisé autour de trois points de fonctionnement  $(h_{op}, f_{op})$ , ces approximations sont données par :

$$\dot{h} = W(h - h_{op}) + Z(f - f_{op}) \quad (3.7)$$

avec  $W = \left. \frac{\partial g(h, f)}{\partial h} \right|_{(h_{op}, f_{op})}$  et  $Z = \left. \frac{\partial g(h, f)}{\partial f} \right|_{(h_{op}, f_{op})}$ ,

Pour déterminer les points de fonctionnement, la plage totale de fonctionnement de 15 cm à 60 cm est divisée en trois segments (haut, moyen, bas), comme illustré dans le tableau 3.1.

**Tableau 3.1:** Points de fonctionnement et paramètres des modèles linéarisés

	<b>Niveau bas</b>	<b>Niveau moyen</b>	<b>Niveau haut</b>
<b>Intervalle (cm)</b>	15-30	30-45	45-60
<b><math>h_{op}</math>(cm)</b>	22.5	37.5	52.5
<b><math>f_{op}</math>(%)</b>	32.42	37.66	41.92
<b><math>W</math></b>	-0.0036	-0.0012	-0.0006
<b><math>Z</math></b>	0.009	0.004	0.0022

Dans ce premier travail, nous essayons de commander le système non linéaire autour d'un seul point de fonctionnement (niveau bas). Ainsi, le système linéarisé est représenté par l'équation (3.7), avec  $W = 0.0036$  et  $Z = 0.009$ . En posant  $y(t) = h - h_{op}$  et  $u(t) = f - f_{op}$ , on obtient la fonction de transfert du système suivante :

$$G(s) = \frac{0.009}{(s+0.0036)} \quad (3.8)$$

Afin d'évaluer les performances de la stratégie FOMRAC sur le système non linéaire, nous comparons ses résultats aux résultats obtenus avec une commande MRAC d'ordre entier. Pour cela, nous choisissons les fonctions de transfert du modèle de référence d'ordre entier et d'ordre fractionnaire respectivement comme suit :

$$G_m(s) = \frac{1}{(1+20s)} \quad (3.9)$$

et

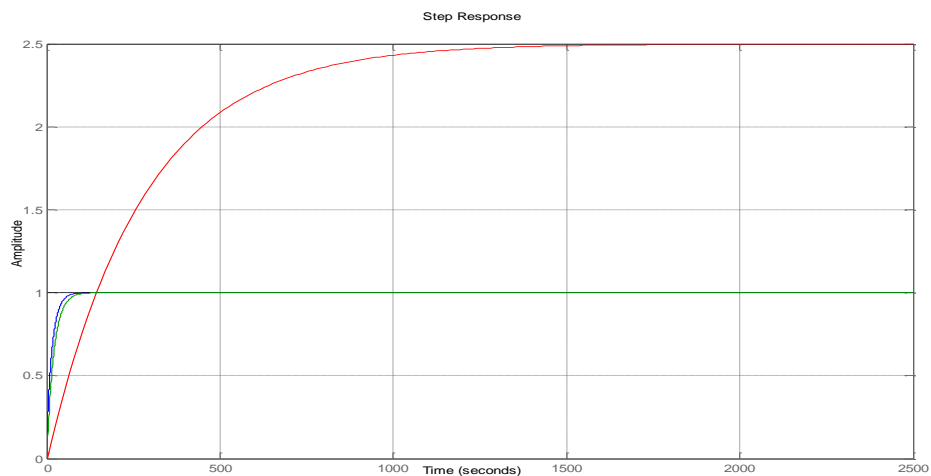
$$G_{mf}(s) = \frac{1}{(1+20s)^{0.6}} \quad (3.10)$$

$G_{mf}$  est approximée à un modèle d'ordre entier en utilisant la méthode de la fonction des singularités :

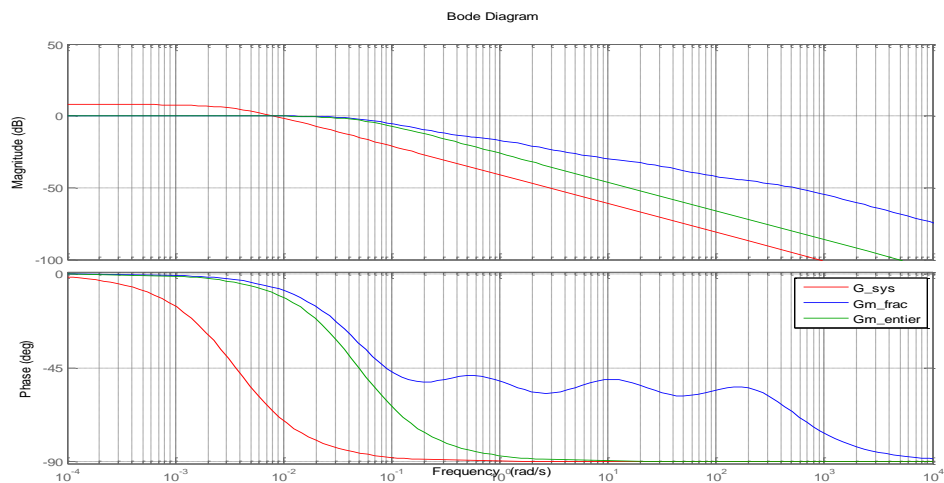
$$G_{mf} \approx \frac{0.004296 s^3 + 0.4979 s^2 + 3.063 s + 1}{0.002209 s^4 + 0.8095 s^3 + 15.79 s^2 + 17.23 s + 1}$$

La période d'échantillonnage est  $\Delta = 0.1 \text{ sec}$ . La réponse indicielle du modèle de référence d'ordre fractionnaire est comparée à celle du modèle d'ordre entier et celle du système en boucle ouverte dans la figure.3.2.

La Figure 3.3 illustre les courbes de Bode respectivement, du système en boucle ouverte, du modèle de référence d'ordre entier et du modèle de référence d'ordre fractionnaire.



**Fig. 3.2** Réponse indicielle du système en boucle ouverte (rouge), réponse indicielle du modèle de référence d'ordre entier (vert), réponse indicielle du modèle de référence d'ordre fractionnaire (bleu)



**Fig. 3.3** Tracé de Bode du transfert du système (rouge), du transfert du modèle de référence d'ordre entier (vert), et du transfert du modèle de référence d'ordre fractionnaire (bleu)

Sur la figure 3.2, nous voyons clairement que le modèle d'ordre fractionnaire est plus rapide que le modèle d'ordre entier, ceci est aussi confirmé sur la figure 3.3, où on voit que le modèle de référence d'ordre fractionnaire a une bande passante plus large.

Afin de tester l'efficacité et d'évaluer les performances de chaque régulateur (MRAC et FOMRAC), une consigne  $u_c(t)$  est appliquée au système, cette dernière consiste en des échelons de différentes amplitudes décrites dans le tableau 3.2.

**Tableau 3.2 :** La consigne du réservoir conique

t	[0 1000]	[1000 2000]	[2000 3000]
$u_c(t)$	17	28	15

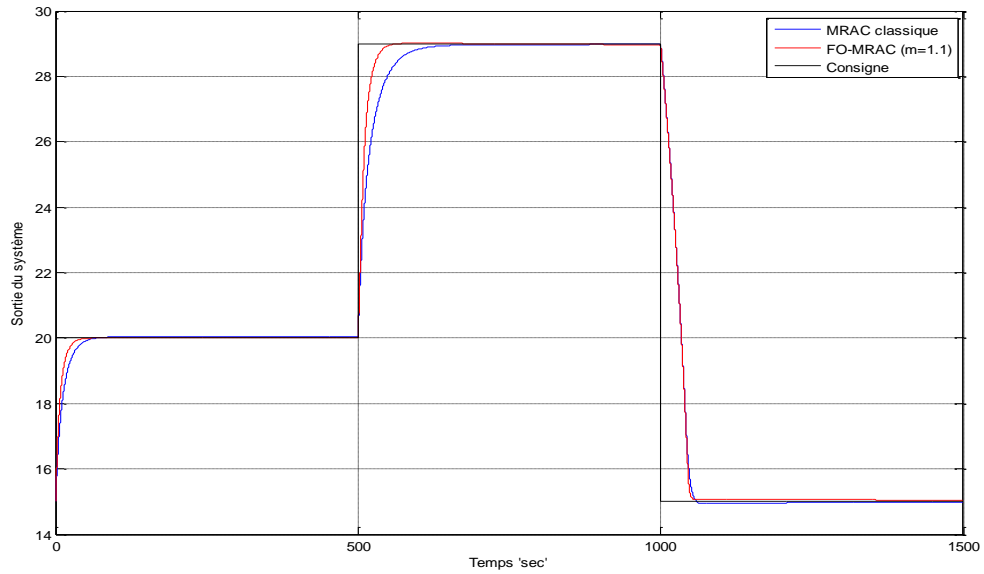
Aussi, pour évaluer et comparer les performances de chaque méthode de commande, des indices de performance sur l'erreur et sur la commande sont calculés à partir de (3.11) :

$$\begin{cases} J_e = \sum_{k=0}^N e^2(k\Delta) \\ J_u = \sum_{k=0}^N u^2(k\Delta) \end{cases} \quad (3.11)$$

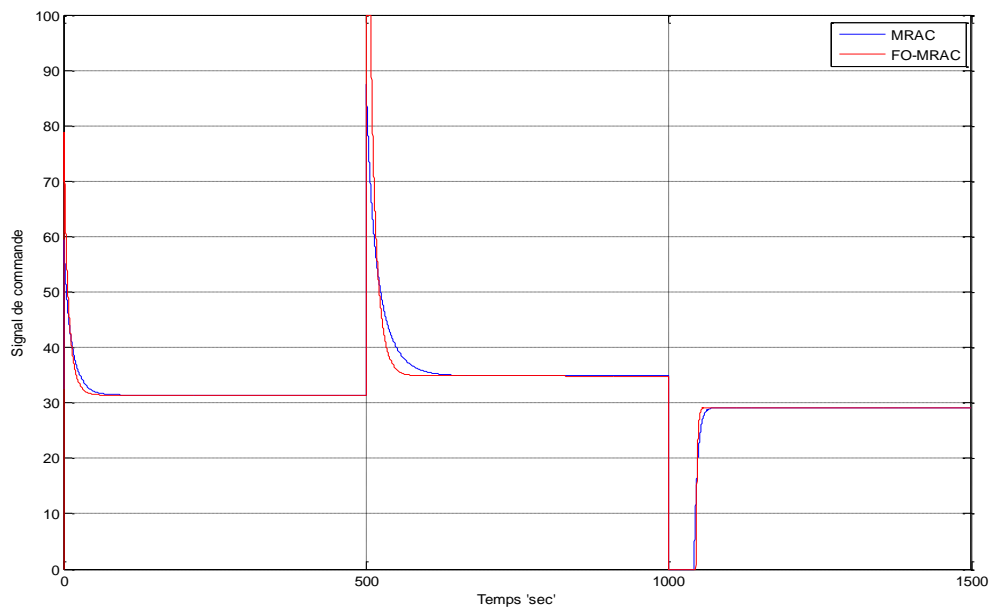
où  $N$  est le nombre d'échantillons,  $e(k\Delta) = y(k\Delta) - u_c(k\Delta)$

### 3.3.1 Etude dans le cas idéal (sans perturbations)

La sortie du système non linéaire ainsi que le signal de commande issus de la commande MRAC classique et de la stratégie FOMRAC sont illustrés respectivement, à la figure 3.4 et 3.5.



**Fig. 3.4** Réponse du système avec MRAC classique et avec la stratégie FOMRAC



**Fig. 3.5** Signal de commande issu du MRAC classique et de la stratégie FOMRAC

À partir des résultats obtenus, nous remarquons que la sortie du système suit le signal de référence, et ce même lors des changements brusques des valeurs de la consigne.

De meilleurs résultats sont obtenus en utilisant la stratégie FOMRAC, où nous avons la fonction coût de l'erreur quadratique la plus faible, tandis que, le MRAC présente la fonction coût le plus faible de consommation d'énergie de commande. Le système est plus rapide et plus précis avec la stratégie FOMRAC.

Afin d'étudier l'influence de l'ordre fractionnaire  $m$  sur les performances du système de commande, nous faisons varier sa valeur de 0.1 à 1.5, les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 3.3.

**Tableau 3.3 :** Valeurs des fonctions coût par rapport à  $m$

Stratégie FOMRAC			MRAC classique	
$m$	$J_e$	$J_u$	$J_e$	$J_u$
0.1	$5,6025.10^3$	$1,6313.10^7$	$6,6484.10^3$	$1,6096.10^7$
0.2	$5,6011.10^3$	$1,6313.10^7$		
0.3	$5,5988.10^3$	$1,6313.10^7$		
0.4	$5,5948.10^3$	$1,6314.10^7$		
0.5	$5,5879.10^3$	$1,6315.10^7$		
0.6	$5,5758.10^3$	$1,6318.10^7$		
0.7	$5,5550.10^3$	$1,6322.10^7$		
0.8	$5,5207.10^3$	$1,6331.10^7$		
0.9	$5,4667.10^3$	$1,6346.10^7$		
1.0	$5,6033.10^3$	$1,6313.10^7$		
1.1	$5,3649.10^3$	$1,6424.10^7$		
1.2	$5,5223.10^3$	$1,6332.10^7$		
1.3	$5,4757.10^3$	$1,6348.10^7$		
1.4	$5,4264.10^3$	$1,6377.10^7$		
1.5	$5,4376.10^3$	$1,6369.10^7$		

D'après les résultats, le coût minimum de l'erreur est obtenu pour  $m = 1.1$ , où le coût de consommation d'énergie de commande est le plus grand. La valeur de la fonction coût de l'erreur quadratique est meilleure pour la stratégie FOMRAC alors que le critère  $J_u$  est meilleur dans le cas du MRAC d'ordre entier (classique), cela signifie que la stratégie FOMRAC améliore le suivi du signal de référence au moyen d'un effort énergétique d'entrée plus important. D'après le tableau 3.3, on constate l'existence d'un compromis entre la fonction coût d'énergie de commande et la fonction coût de l'erreur de poursuite. Le schéma FOMRAC adopté permet la résolution de ce compromis en choisissant la valeur  $m$  appropriée.

Il est également intéressant de noter que le gain d'adaptation  $\gamma$  est très petit pour tous les ordres fractionnaires  $m$  (inférieur à  $10^{-6}$ ) comparativement au MRAC d'ordre entier ( $\gamma = 0.01$ ), ce qui améliore la stabilité relative du système de commande adaptative.

### 3.3.2 Etude en présence de bruit de mesure

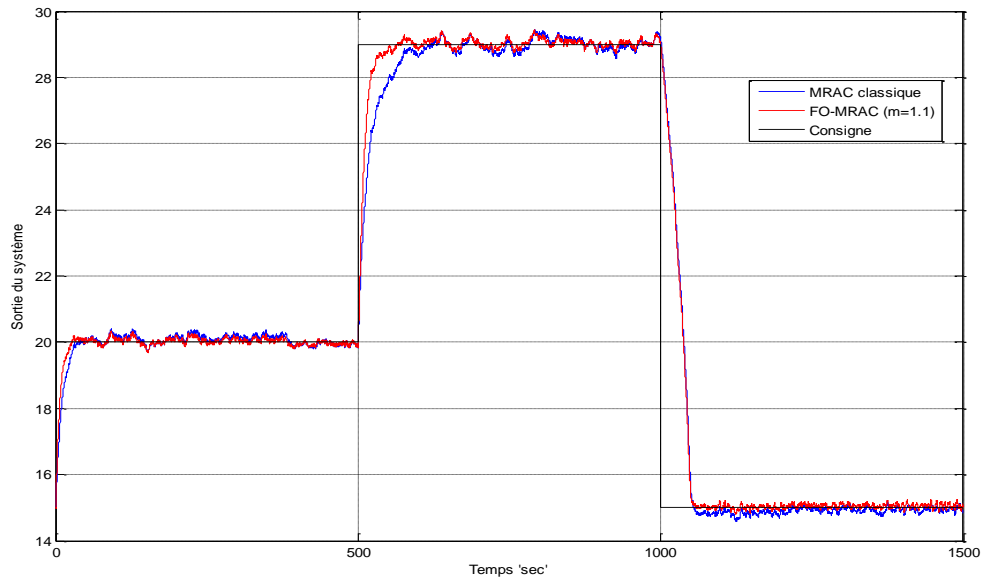
Afin de tester la robustesse de ces régulateurs dans le cas où la mesure est entachée de bruit, nous avons injecté un bruit en sortie (signal aléatoire) de moyenne nulle et d'écart type égal à 0.03. Nous étudions l'influence de l'ordre d'intégration fractionnaire  $m$  sur les performances du système de commande FOMRAC, et ce en présence de bruit de mesure en faisant varier  $m$  de 0.1 à 1.5, les résultats sont regroupés dans le tableau 3.4.

**Tableau 3.4** Valeurs des fonctions coûts par rapport à l'ordre fractionnaire  $m$  en présence de bruits.

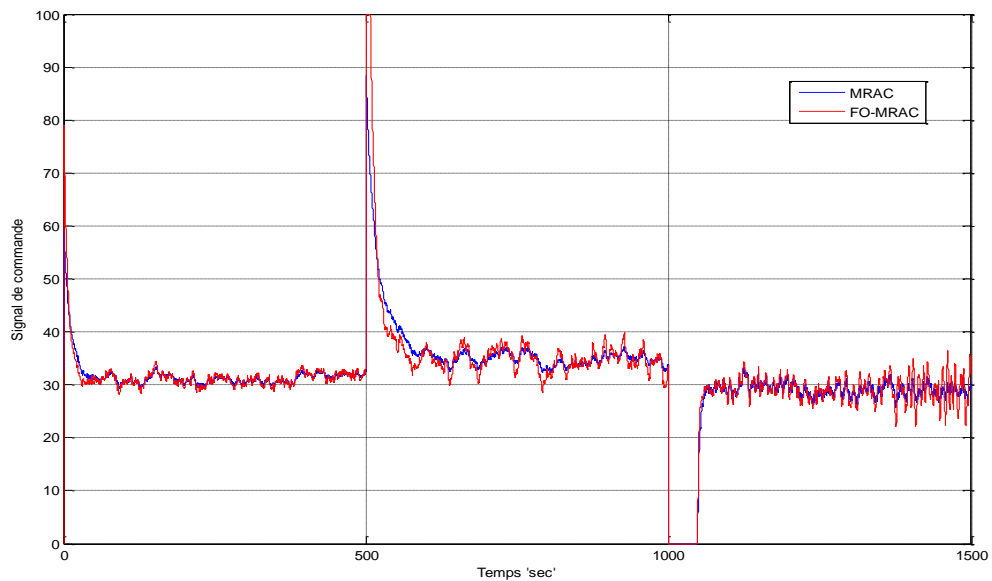
Stratégie FOMRAC			MRAC classique $\gamma=0.01$	
$m$	$J_e$	$J_u$	$J_e$	$J_u$
0.1	$7,0855 \cdot 10^3$	$1,6168 \cdot 10^7$	$8,1872 \cdot 10^3$	$1,5961 \cdot 10^7$
0.2	$7,0839 \cdot 10^3$	$1,6168 \cdot 10^7$		
0.3	$7,0812 \cdot 10^3$	$1,6168 \cdot 10^7$		
0.4	$7,0763 \cdot 10^3$	$1,6169 \cdot 10^7$		
0.5	$7,0673 \cdot 10^3$	$1,6170 \cdot 10^7$		
0.6	$7,0509 \cdot 10^3$	$1,6173 \cdot 10^7$		
0.7	$7,0215 \cdot 10^3$	$1,6177 \cdot 10^7$		
0.8	$6,9698 \cdot 10^3$	$1,6185 \cdot 10^7$		
0.9	$6,8811 \cdot 10^3$	$1,6201 \cdot 10^7$		
1.0	$7,0863 \cdot 10^3$	$1,6167 \cdot 10^7$		
1.1	$6,5166 \cdot 10^3$	$1,6305 \cdot 10^7$		
1.2	$6,9527 \cdot 10^3$	$1,6186 \cdot 10^7$		
1.3	$6,8560 \cdot 10^3$	$1,6202 \cdot 10^7$		
1.4	$6,6940 \cdot 10^3$	$1,6235 \cdot 10^7$		
1.5	$6,7269 \cdot 10^3$	$1,6226 \cdot 10^7$		

A partir du tableau 3.4, on voit que, vis-à-vis du bruit de mesure, la commande FOMRAC est plus robuste comparée au schéma MRAC classique, du fait qu'on obtient toujours le coût d'erreur le plus faible, et ce pour toutes les valeurs prises de l'ordre fractionnaire d'intégration  $m$ . L'erreur de plus faible coût est obtenue pour  $m = 1.1$ .

Les figures 3.6 et 3.7 illustrent respectivement la sortie du système et le signal de commande pour les deux stratégies appliquées MRAC et FOMRAC.



**Fig. 3.6** Réponse du système en présence de bruit de mesure, avec MRAC classique et stratégie FOMRAC proposée



**Fig. 3.7** Signal de commande issu des schémas de commande MRAC classique et FOMRAC en présence de bruit de mesure

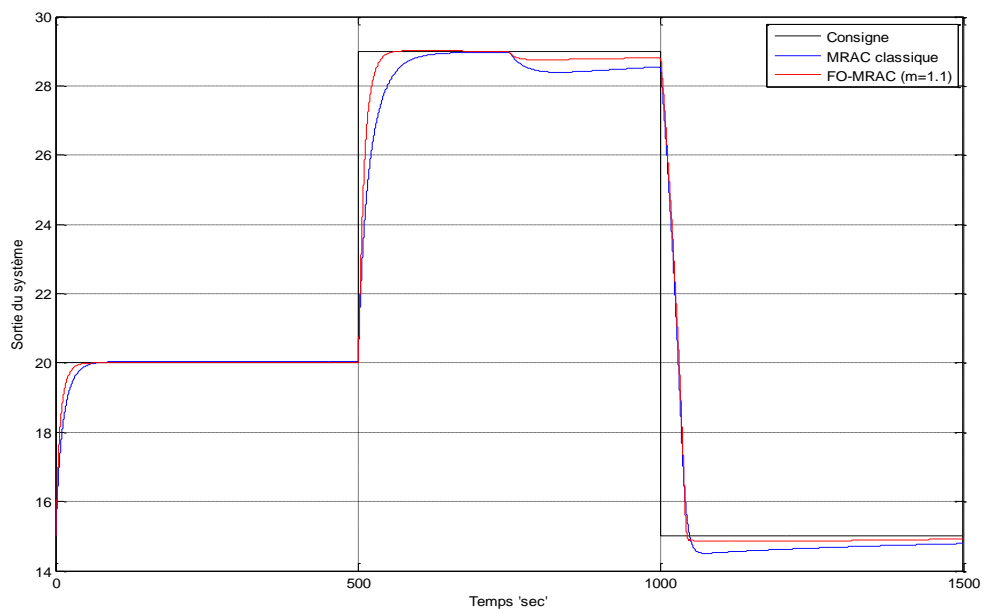
### 3.3.3 Etude en cas de variations paramétriques

Dans la suite nous testerons la robustesse des lois de commande proposées vis-à-vis des variations paramétriques du modèle. Nous considérons à partir de l'instant 750 sec, un ensemble de variations sur les valeurs des paramètres dans l'équation (3.8). Les résultats obtenus avec le MRAC classique et avec le stratégie FOMRAC sont exposés dans le tableau 3.5.

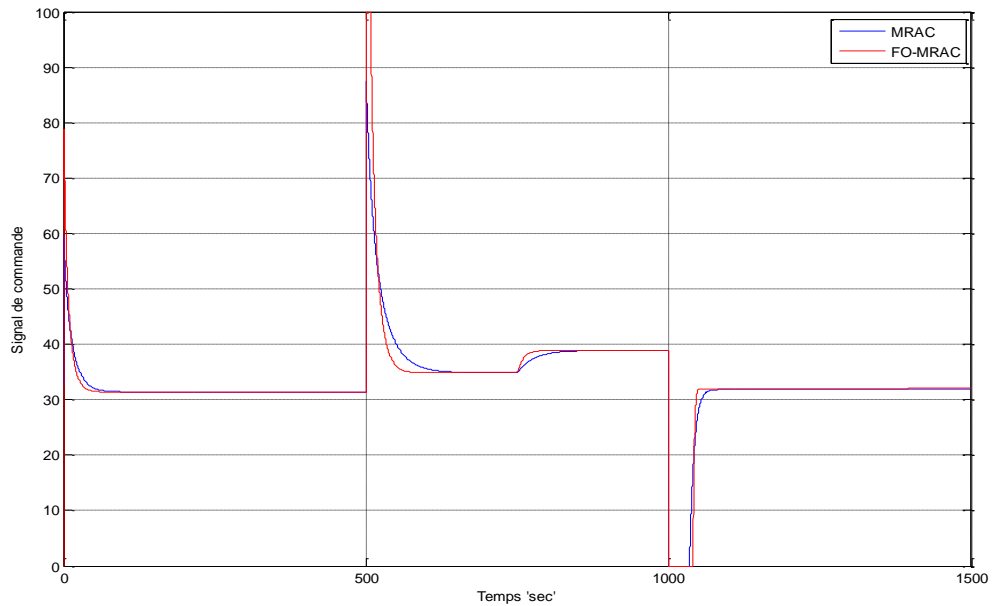
Les réponses du système issues des deux stratégies de commande appliquées en cas de variation paramétrique de 20% sont exposées dans la figure 3.8. Les signaux de commande du MRAC classique et du FOMRAC sont illustrés sur la figure 3.9.

**Tableau 3.5 :** Valeurs des fonctions coûts par rapport aux variations paramétriques

Variation paramétrique %	MRAC classique		FOMRAC ( $m=1.1$ ) $\gamma=1e-6$	
	$J_e$	$J_u$	$J_e$	$J_u$
<b>05</b>	$7,0704 \cdot 10^3$	$1,6455 \cdot 10^7$	$5,1362 \cdot 10^3$	$1,6799 \cdot 10^7$
<b>10</b>	$7,5511 \cdot 10^3$	$1,6821 \cdot 10^7$	$5,2820 \cdot 10^3$	$1,7185 \cdot 10^7$
<b>20</b>	$8,6130 \cdot 10^3$	$1,7576 \cdot 10^7$	$5,6738 \cdot 10^3$	$1,7986 \cdot 10^7$
<b>40</b>	$1,0710 \cdot 10^4$	$1,9198 \cdot 10^7$	$8,4025 \cdot 10^3$	$1,9453 \cdot 10^7$
<b>60</b>	$1,2275 \cdot 10^4$	$2,1001 \cdot 10^7$	$1,0011 \cdot 10^4$	$2,1207 \cdot 10^7$



**Fig. 3.8** Réponse du système avec MRAC classique et avec la stratégie FOMRAC



**Fig. 3.9** Signal de commande issu du MRAC classique et de la stratégie FOMRAC

D'après les résultats obtenus en simulation, nous voyons que la sortie du système est affectée par la variation paramétrique à l'instant 750 sec, après cela, le système essaie de suivre le signal de référence, et arrive à maintenir plus ou moins les performances souhaitées. Cependant, il est également remarquable qu'avec une stratégie FOMRAC, le signal d'erreur a la plus faible amplitude.

À partir du tableau 3.5, on remarque qu'en présence de variation paramétrique, le schéma FOMRAC a toujours le coût de l'erreur quadratique le plus faible, d'où on conclut que la commande FOMRAC est beaucoup plus robuste que la commande MRAC classique.

Enfin, les résultats obtenus en simulation illustrent l'efficacité du schéma de commande FOMRAC et confirment sa robustesse surtout en présence de bruits de mesure ou de variations paramétriques.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la commande adaptative d'ordre fractionnaire, plus particulièrement, nous avons présenté une approche directe par modèle de référence. Cette dernière se repose sur le choix d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire, et utilise une loi d'adaptation contenant une intégrale d'ordre fractionnaire, et ce dans le but d'améliorer les performances du système de commande en bénéficiant des concepts des opérateurs d'ordre non entier et des systèmes d'ordre fractionnaire.

Afin d'évaluer les performances de cette stratégie de commande, un exemple d'application a été présenté. Ce dernier concerne la commande du niveau d'eau dans un réservoir conique dont le modèle est non linéaire. Pour ce faire, un régulateur adaptatif par modèle de référence d'ordre entier (MRAC) et celui proposé d'ordre fractionnaire (FOMRAC) ont été appliqués au système non linéaire et leurs performances comparées. À partir des résultats obtenus en simulation, nous avons conclu que le régulateur FOMRAC présente les meilleures performances, et notamment en présence de bruits de mesures et de variations paramétriques. Les résultats de la simulation illustrent l'efficacité du schéma de commande proposé.



## Chapitre 4

### **4. Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire (FOMRAC) pour une classe de système d'ordre fractionnaire**

#### **4.1 Introduction**

Les schémas de commande adaptative basés sur la commande MRAC ont été très attractifs pour la communauté d'ingénierie de contrôle pour son potentiel d'applicabilité élevé, comme l'illustrent de nombreux travaux de recherches récents dans divers domaines de l'ingénierie. D'autre part, un certain nombre de chercheurs ont également montré que les modèles d'ordre fractionnaire décrivent les systèmes mieux que les modèles classiques d'ordre entier. Par exemple, dans [NAS18], les auteurs abordent l'identification dans le domaine temporel d'impédance électrochimique en utilisant la modélisation d'ordre fractionnaire. Dans [POD99], on obtient la diffusion de chaleur à travers un solide semi-infini qui est un autre système typique d'ordre fractionnaire, où le débit de chaleur est égal à la demi-dérivée de la température. Même en bio-ingénierie, un modèle d'ordre fractionnaire est proposé pour modéliser les cellules immunitaires influencées par les cellules cancéreuses dans [UCA19].

Concernant la commande adaptative des systèmes d'ordre fractionnaire à base de modèle de référence, on peut citer [BOU19] et [SHI14], dans lesquelles les auteurs proposent une conception de commande adaptative d'ordre fractionnaire pour une classe de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire. Dans [CHE16], les auteurs présentent une commande adaptative indirecte par modèle de référence pour une classe de systèmes d'ordre fractionnaire linéaire.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la commande des systèmes décrits par des modèles d'ordre fractionnaire. Plus particulièrement nous présenterons une de nos principales contributions [BAL20], qui concerne l'introduction et la synthèse d'un schéma de commande adaptative directe par modèle de référence d'ordre fractionnaire, pour une classe de systèmes d'ordre fractionnaire qui sont décrits par des fonctions de transfert commensurables et avec des paramètres inconnus, où les seuls signaux disponibles sont l'entrée et la sortie du système. La structure de la loi de commande s'inspire du travail de [IOA96] pour la synthèse de commande adaptative des systèmes d'ordre entier. Il a été généralisé et adapté pour traiter la classe de systèmes d'ordre fractionnaire précités.

Par rapport aux travaux précédents, notre méthode de commande adaptative est destinée à commander des systèmes d'ordre fractionnaire décrits par des fonctions de transfert de degré arbitraire, contrairement à [BOU19] et [SHI14] où les auteurs commandent des systèmes fractionnaires décrits par des fonctions de transfert de degré 1. Par rapport à [CHE16] qui a proposé un schéma MRAC indirect, notre méthode est un contrôleur adaptatif direct sans identification du procédé à commander.

## 4.2 Position du problème

Nous considérons le procédé représenté par la fonction de transfert commensurable d'ordre fractionnaire avec degré relatif  $\gamma$

$$y(t) = G(s)u = k_p \frac{N(s)}{D(s)} u \quad (4.1)$$

avec

$$G(s) = k_p \frac{s^{(n-1)\gamma} + b_{n-2}s^{(n-2)\gamma} + \dots + b_1 s^\gamma + b_0}{s^{n\gamma} + a_{n-1}s^{(n-1)\gamma} + a_{n-2}s^{(n-2)\gamma} + \dots + a_1 s^\gamma + a_0} \quad (4.2)$$

où  $(n\gamma)$  représente le degré fractionnaire du système défini par (4.1),  $n$  est un entier,  $\gamma$  est un nombre réel tel que  $0 < \gamma < 1$ ,  $b_0, \dots, b_{n-2}, a_0, \dots, a_{n-1}, k_p$  sont des nombres réels inconnus,  $u(t) \in \mathfrak{R}$  et  $y(t) \in \mathfrak{R}$  sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie.

En prenant le modèle de référence suivant :

$$\begin{aligned}
y_m &= W(s)r = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)} r \\
&= k_m \cdot \frac{s^{(q-1)\gamma + \beta_{q-2}} s^{(q-2)\gamma + \dots + \beta_0}}{s^{q\gamma + \alpha_{q-1}} s^{(q-1)\gamma + \dots + \alpha_0}}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$q\gamma$  est le degré fractionnaire du modèle de référence,  $q$  est un nombre entier,  $\beta_0, \dots, \beta_{q-2}, \alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}, k_m$  sont les paramètres du modèle de référence,  $r \in \mathfrak{R}$  et  $y_m \in \mathfrak{R}$  sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie du modèle de référence.

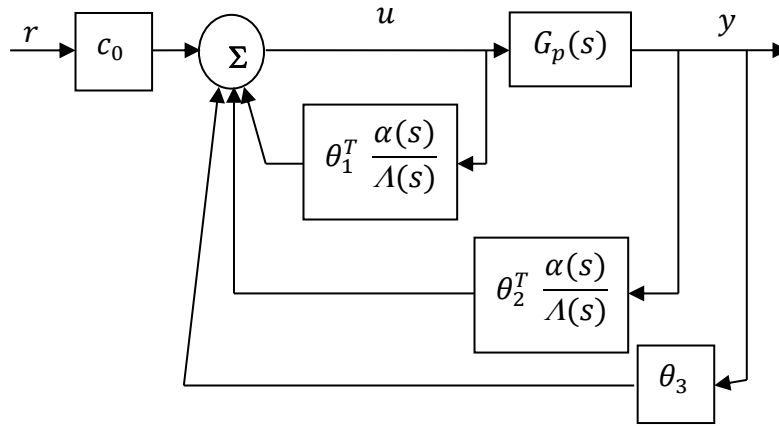
L'objectif est de déterminer le signal de commande  $u(t)$  tel que  $y(t)$  suive asymptotiquement la sortie du modèle de référence d'ordre fractionnaire souhaitée  $y_m$  sous les hypothèses suivantes:

#### ***Hypothèses 4.1***

1. Le signe de  $k_p$  est connu.
2.  $G(s)$  est à phase minimale, donc  $N(s)$  est Hurwitz.
3. Les degrés relatifs du système à commander et du modèle de référence sont tous deux égaux à  $\gamma$ . Et le degré le plus élevé du modèle de référence n'est pas plus grand que celui du système à commander.
4.  $D(s), N(s), D_m(s), N_m(s)$  Sont des polynômes moniques.
5.  $W(s)$  est strictement réelle positive pour  $\gamma = 1$ .

### **4.3 Résultat principal**

L'objectif principal de ce travail est de concevoir un schéma de commande adaptative FOMRAC qui peut stabiliser la classe de systèmes d'ordre fractionnaire (4.1) et le forcer à suivre le comportement du modèle de référence (4.3). La structure de la commande adaptative proposée est illustrée dans la figure 4.1. Les propriétés de sa stabilité sont énoncées dans le théorème suivant.



**Fig. 4.1** Structure de la commande adaptative FOMRAC proposée

### ***Théorème 4.1***

*Considérons la classe de systèmes d'ordre fractionnaire donnée par (4.1), et soit le modèle de référence donné par (4.3) sous les hypothèses mentionnées, alors la loi de commande définie par*

$$u(t) = \theta^T(t)\omega(t) \quad (4.4)$$

*avec la loi d'adaptation*

$$D^\gamma \theta = -\Gamma e_1 \omega \text{sign}(\rho^*) \quad (4.5)$$

*garantit que tous les signaux en boucle fermée sont bornés, et l'erreur de poursuite tend asymptotiquement vers zéro.*

*Avec,  $e_1 = y - y_m$ ,  $\rho^* = k_p/k_m$ ,  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  est une matrice de gain,*

$$\theta = [\theta_1^T \quad \theta_2^T \quad \theta_3^T \quad c_0]^T \quad \theta_1, \theta_2 \in R^{n-1}, \theta_3, c_0 \in R$$

$$\omega(t) = [\omega_1(t) \quad \omega_2(t) \quad y(t) \quad r(t)]^T$$

$$\omega_1(t) = \alpha_{(n-2)\gamma}(s)\Lambda^{-1}(s)[u](t)$$

$$\omega_2(t) = \alpha_{(n-2)\gamma}(s)\Lambda^{-1}(s)[y](t)$$

$$\alpha_{n-2}(s) = [1 \quad s^\gamma \quad \dots \quad s^{(n-3)\gamma} \quad s^{(n-2)\gamma}]^T$$

$$\Lambda(s) = \lambda_0 + \lambda_1 s^\gamma + \dots + \lambda_{n-2} s^{(n-2)\gamma} + s^{(n-1)\gamma} = N_m \Lambda_0$$

*avec  $\Lambda$  est Hurwitz.*

**Preuve du théorème 4.1**

Tout d'abord, on suppose que le système défini par (4.1) est représenté dans l'espace d'état par les matrices d'états  $(A, B, C)$ , avec:

$$\begin{cases} D^\gamma x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C^T x(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

avec  $x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}, y \in \mathfrak{R}$ , et donc:

$$y = C^T (s^\gamma I_n - A)^{-1} B u \quad (4.7)$$

Soit la loi de commande définie par :

$$\begin{cases} D^\gamma \omega_1 = F \omega_1 + g u, & \omega_1(0) = 0 \\ D^\gamma \omega_2 = F \omega_2 + g y, & \omega_2(0) = 0 \\ u = \theta^{*T} \omega \end{cases} \quad (4.8)$$

Avec :

$$\omega = [\omega_1^T, \omega_2^T, y, r], \theta^{*T} = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^{*T}, c_0^*] \quad (4.9)$$

où  $(F, g)$  est la réalisation dans l'espace d'état de  $\alpha(s)/\Lambda(s)$ , i.e.,  $(s^\gamma I - F)^{-1} g = \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}$ .

$$\begin{cases} \alpha(s) \triangleq \alpha_{n-2}(s) = [s^{\gamma(n-2)}, s^{\gamma(n-3)}, \dots, s^\gamma, 1]^T & \text{si } n \geq 2 \\ \alpha(s) \triangleq 0 & \text{si } n = 1 \end{cases} \quad (4.10)$$

$\Lambda(s)$  est un polynôme monique Hurwitz arbitraire de degré  $(n-1)\gamma$  qui contient  $N_m(s)$  comme facteur:

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) N_m(s) \quad (4.11)$$

Les paramètres du système à commander sont inconnus, la loi de commande est donnée par (4.12), le vecteur  $\theta$  est l'estimation de  $\theta^*$  et sera généré par une loi adaptative appropriée.

Tout d'abord, nous obtenons une représentation composite dans l'espace d'états du processus et du régulateur :

$$\begin{cases} D^\gamma Y_c = A_0 Y_c + B_c u, & Y_c(0) = Y_0 \\ y = C_c^T Y_c \\ u = \theta^T \omega \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $Y_c = [x^T, \omega_1^T, \omega_2^T]^T$  et,

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ gC^T & 0 & F \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} B \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, C_c^T = [C^T, 0, 0] \quad (4.13)$$

Ensuite, nous ajoutons et soustrayons  $B_c \theta^{*T} \omega$  pour obtenir:

$$D^\nu Y_c = A_0 Y_c + B_c \theta^{*T} \omega + B_c (u - \theta^{*T} \omega) \quad (4.14)$$

En absorbant le terme  $B_c \theta^{*T} \omega$  dans la partie homogène de (4.14), on obtient la représentation :

$$\begin{cases} D^\nu Y_c = A_c Y_c + B_c c_0^* r + B_c (u - \theta^{*T} \omega), & Y_c(0) = Y_{c0} \\ y = C_c^T Y_c \end{cases} \quad (4.15)$$

où

$$A_c = \begin{bmatrix} A + B\theta_3^{*T} C^T & B\theta_1^{*T} & B\theta_2^{*T} \\ g\theta_3^{*T} C^T & F + g\theta_1^{*T} & g\theta_2^{*T} \\ gC^T & 0 & F \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Quand  $u = \theta^{*T} \omega$ , on a :

$$\begin{cases} D^\nu Y_c = A_c Y_c + B_c c_0^* r, & Y_c(0) = Y_{c0} \\ y = C_c^T Y_c \end{cases} \quad (4.17)$$

Le vecteur de paramètres du régulateur  $\theta^*$  est à choisir de telle sorte que la fonction de transfert de  $r$  vers  $y$  soit égale à  $W_m(s)$ , cela implique que:

$$C_c^T (sI - A_c)^{-1} B_c c_0^* = W_m(s) \quad (4.18)$$

Et ainsi, le modèle de référence peut être réalisé dans l'espace d'état par les matrices  $(A_c, B_c c_0^*, C_c)$  avec:

$$\begin{cases} D^\nu Y_m = A_c Y_m + B_c c_0^* r, & Y_m(0) = Y_{m0} \\ y_m = C_c^T Y_m \end{cases} \quad (4.19)$$

où  $Y_m$  est l'état de la représentation non minimale du modèle de référence. Aussi, la fonction de transfert de la boucle fermée de  $r$  à  $y$  est décrit par:

$$y = G_c(s)r \quad (4.20)$$

Où

$$G_c(s) = \frac{c_0^* k_p N(s) \Lambda^2(s)}{\Lambda(s) \left[ (\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) D(s) - k_p N(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s)) \right]} \quad (4.21)$$

Pour atteindre l'objectif de commande, nous sélectionnons les paramètres du régulateur  $\theta^*$  de sorte que:

$$W(s) = G_c(s) \quad (4.22)$$

$$k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)} = \frac{c_0^* k_p N(s) \Lambda^2(s)}{\Lambda(s) \left[ (\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) D(s) - k_p N(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s)) \right]}$$

Parce que  $N(s)$  est Hurwitz par hypothèse et  $\Lambda(s) = N_m(s) \Lambda_0(s)$  est conçu pour être Hurwitz, cela rend tous les zéros de  $G_c(s)$  stables, et donc toute simplification ne peut se produire que dans  $\mathcal{C}^-$ .

En choisissant  $c_0^* = k_m/k_p$ , on obtient l'équation de l'erreur:

$$\begin{cases} D^\gamma e = A_c e + B_c (u - \theta^{*T} \omega), & e(0) = e_0 \\ e_1 = C_c^T e \end{cases} \quad (4.23)$$

De (4.17) et (4.19), on trouve :

$$e_1 = W(s) \rho^* (u - \theta^{*T} \omega) \quad (4.24)$$

où  $\rho^* = \frac{1}{c_0^*}$ . En remplaçant la loi de commande dans (4.19), on obtient :

$$\begin{cases} D^\gamma e = A_c e + \bar{B}_c \rho^* \tilde{\theta}^T \omega, & e(0) = e_0 \\ e_1 = C_c^T e \end{cases} \quad (4.25)$$

avec,

$$\bar{B}_c = B_c c_0^*, \tilde{\theta} \triangleq \theta(t) - \theta^* \quad (4.26)$$

$$e_1 = W(s) \rho^* \tilde{\theta}^T \omega \quad (4.27)$$

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V(\tilde{\theta}, e) = \frac{e^T P_c e}{2} + \frac{\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}}{2} |\rho^*| \quad (4.28)$$

où  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  et  $P_c = P_c^T > 0$  satisfont les équations algébriques :

$$\begin{cases} P_c A_c + A_c^T P_c = -q q^T - v_c L_c \\ P_c \bar{B}_c = C_c \end{cases} \quad (4.29)$$

avec  $q$  un vecteur,  $L_c = L_c^T > 0$  et  $v_c > 0$  une petite constante, qui sont impliquées par le lemme 2.3 (MKY).

L'hypothèse (4) a pour conséquence que la fonction de transfert  $W(s)$  est strictement réelle positive quand  $\gamma = 1$ , et parceque dans ce cas  $W(s) = C_c^T (sI - A_c)^{-1} \bar{B}_c$ , l'équation (4.29) est vérifiée selon le lemme 2.3.

A partir du lemme 1.1 présenté à la section 1.5.3.2, la dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\gamma V$  sera donnée par :

$$D^\gamma V = D^\gamma \left( \frac{e^T P_c e}{2} \right) + D^\gamma \left( \frac{\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}}{2} |\rho^*| \right) \quad (4.30)$$

Nous savons que :

$$\begin{aligned} D^\gamma \left( \frac{e^T P_c e}{2} \right) &\leq e^T P_c D^\gamma e \\ &\leq e^T P_c (A_c e + \bar{B}_c \rho^* \tilde{\theta}^T \omega) \end{aligned} \quad (4.31)$$

où

$$\begin{aligned} e^T P_c A_c e &= \frac{1}{2} (e^T P_c A_c e + e^T A_c^T P_c e) \\ &= \frac{1}{2} e^T (-q q^T - v_c L_c) e \end{aligned} \quad (4.32)$$

Donc,

$$D^\gamma \left( \frac{e^T P_c e}{2} \right) \leq -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e + e^T P_c \bar{B}_c \rho^* \tilde{\theta}^T \omega \quad (4.33)$$

et nous avons,

$$D^\gamma \left( \frac{\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}}{2} |\rho^*| \right) \leq \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} D^\gamma \tilde{\theta} |\rho^*| \quad (4.34)$$

alors :

$$D^\gamma V \leq -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e + e^T P_c \bar{B}_c \rho^* \tilde{\theta}^T \omega + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} D^\gamma \tilde{\theta} |\rho^*| \quad (4.35)$$

Parce que :

$$e^T P_c \bar{B}_c = e_1, \rho^* = |\rho^*| \operatorname{sgn}(\rho^*) \quad (4.36)$$

En choisissant la loi d'adaptation comme suit :

$$D^\gamma \tilde{\theta} = D^\gamma \theta = -\Gamma e_1 \omega \operatorname{sgn}(\rho^*) \quad (4.37)$$

on assure que:

$$D^\gamma V \leq -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e \quad (4.38)$$

En se basant sur le théorème 1.1 présenté à la section 1.5.3.2, nous concluons la stabilité asymptotique de Lyapunov, donc la sortie du système peut suivre la sortie référence asymptotiquement.

## 4.4 Exemples de simulation

Afin d'illustrer l'efficacité de l'approche de commande adaptative proposée pour la classe de systèmes d'ordre fractionnaire considérée, deux exemples de simulation sont présentés dans cette section.

### 4.4.1 Exemple 1

Considérons le système d'ordre fractionnaire instable défini par la fonction d'ordre fractionnaire commensurable suivante :

$$y = \frac{(s^\gamma + 3)}{s^{2\gamma} + 3s^\gamma - 10} u \quad (4.39)$$

avec  $\gamma=0.8$ , le modèle de référence est donné par la fonction de transfert d'ordre fractionnaire suivante:

$$y_m = \frac{4}{s^\gamma + 4} r \quad (4.40)$$

Nous fixons :

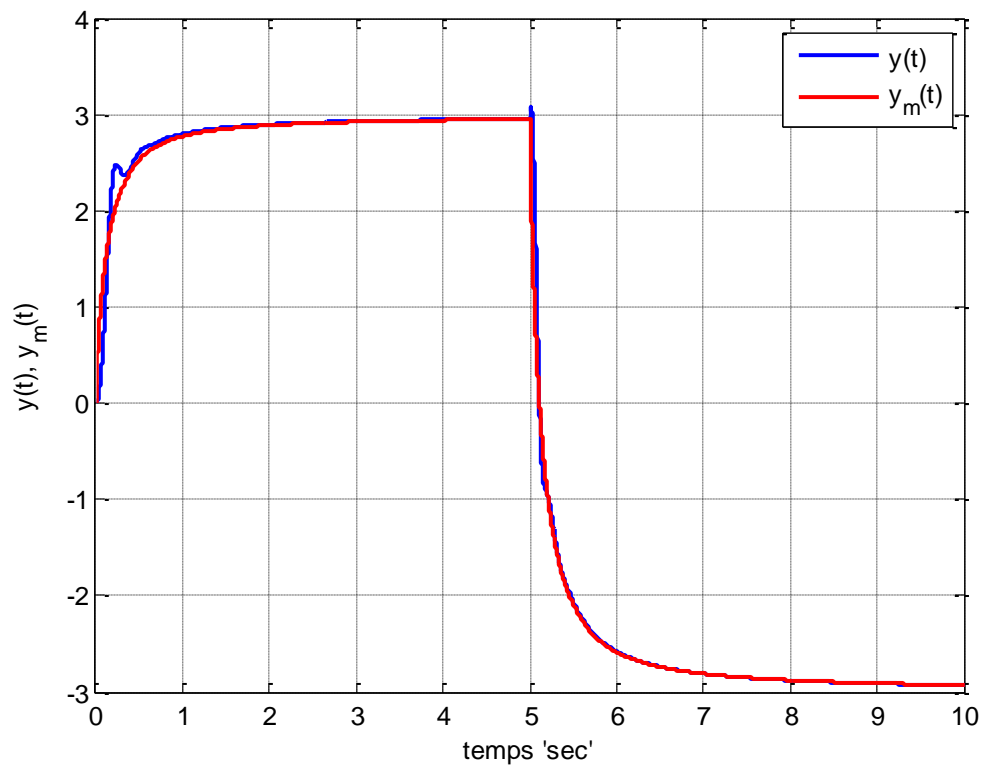
$$\Lambda(s) = s^\gamma + 4 \quad (4.41)$$

Ainsi, nous obtenons :

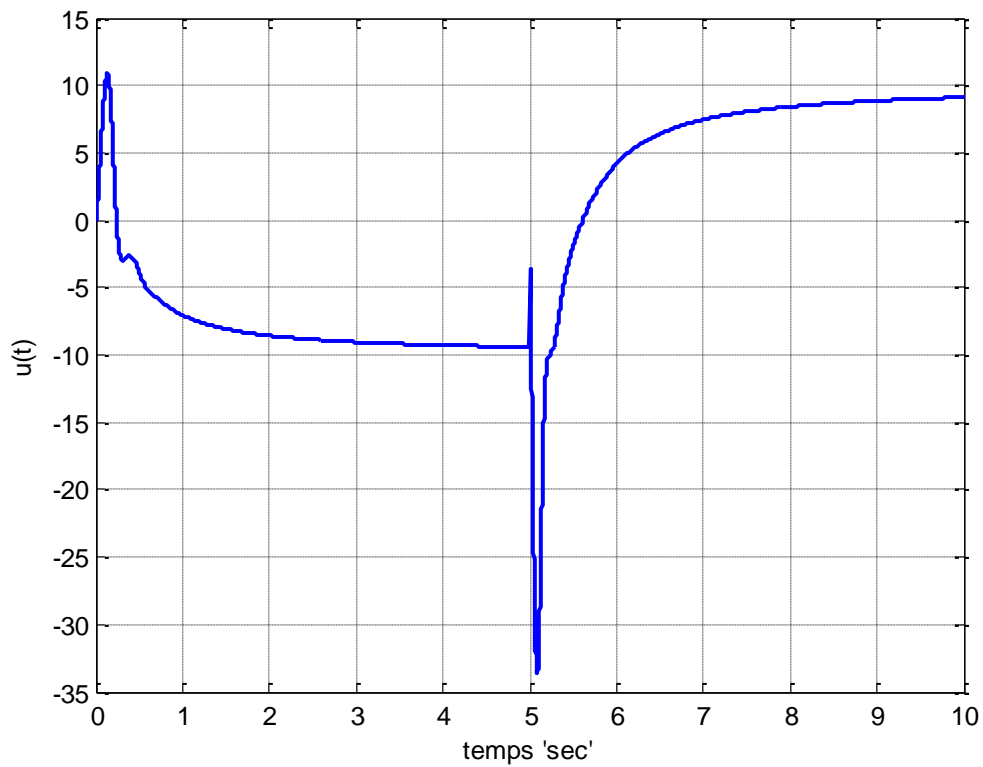
$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{s^\gamma + 4} u \\ \omega_2 &= \frac{1}{s^\gamma + 4} y \end{aligned} \quad (4.42)$$

En appliquant notre schéma de commande proposé au système (4.39), on retrouve la réponse temporelle du processus commandé ainsi que la sortie du modèle de référence illustrées sur la figure 4.1, où on observe clairement que la réponse du système suit rapidement la trajectoire de référence. Nous pouvons également voir que les performances favorables de commande sont toujours maintenues malgré le changement brusque du signal de référence.

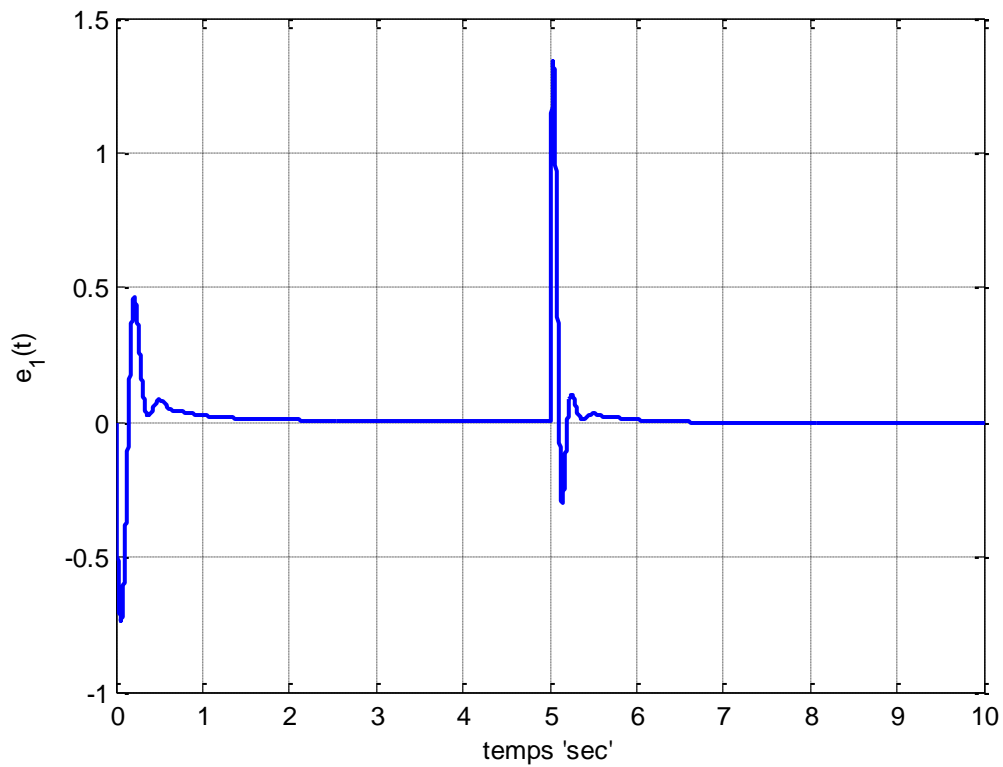
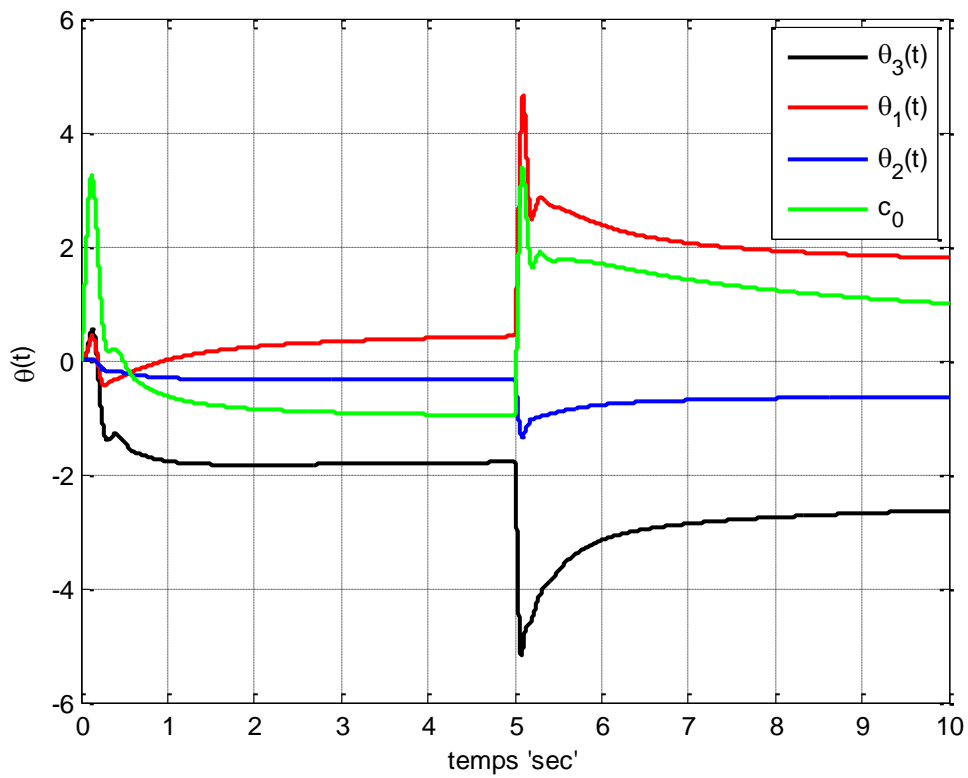
La figure 4.2 montre l'évolution du signal de commande, tandis que les figures 4.3 et 4.4 présentent respectivement le signal de commande, l'erreur de poursuite et les vecteurs de gain d'adaptation, où on voit l'adaptation en ligne des paramètres du régulateur de sorte que l'erreur de poursuite tende vers zéro.



**Fig. 4.2** Sortie du système commandé (bleu) et trajectoire de référence (rouge)



**Fig. 4.3** Signal de commande

**Fig. 4.4** Signal d'erreur de poursuite**Fig. 4.5** Gains d'adaptation

### 4.4.2 Exemple 2

Dans cet exemple, nous considérerons un système d'ordre fractionnaire avec des variations paramétriques de modèle, et ce afin de montrer l'efficacité du schéma de commande adaptative proposée. Considérons le système d'ordre fractionnaire commensurable décrit par la fonction de transfert suivante :

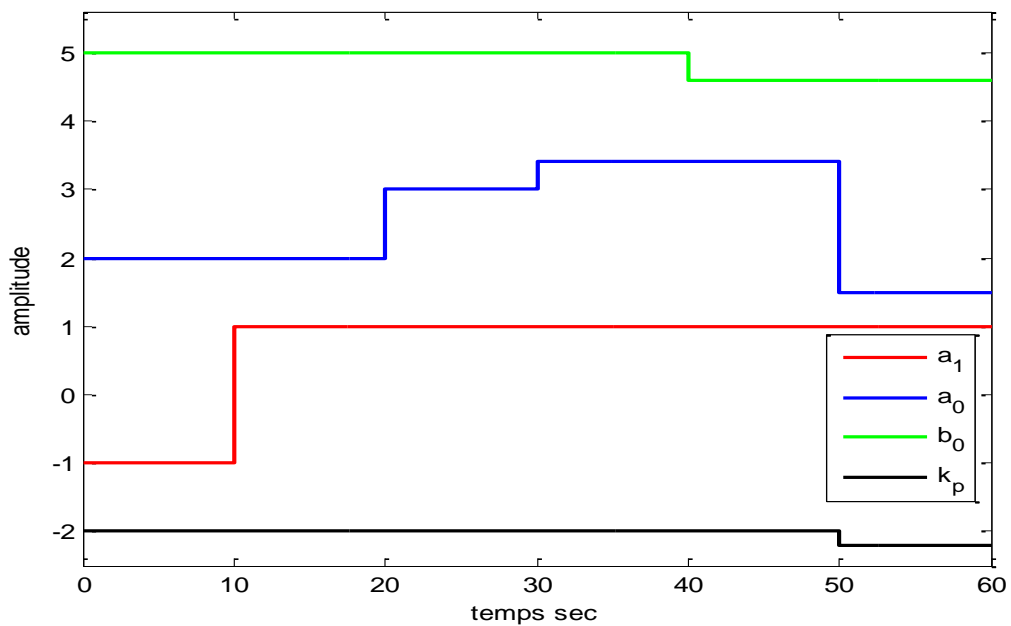
$$y = k_p \frac{s^\gamma + b_0}{s^{2\gamma} + a_1 s^\gamma + a_0} u \quad (4.43)$$

avec  $\gamma = 0.6$ , les paramètres  $b_0, a_0, a_1, k_p$  ne sont pas seulement inconnus pour le régulateur mais aussi peuvent changer lentement ou brusquement. La seule information disponible est le signe de  $k_p < 0$ . Soit le modèle de référence défini par :

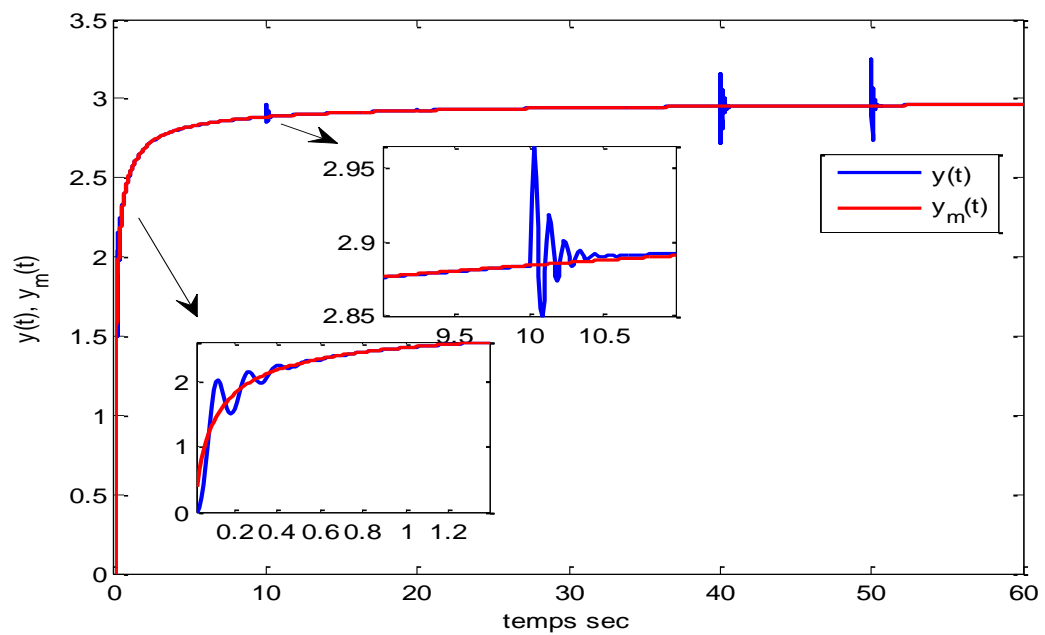
$$y_m = \frac{3}{s^\gamma + 3} r \quad (4.54)$$

L'évolution temporelle des valeurs des paramètres  $b_0, a_1, a_0, k_p$  du système est illustrée sur la figure 4.5.

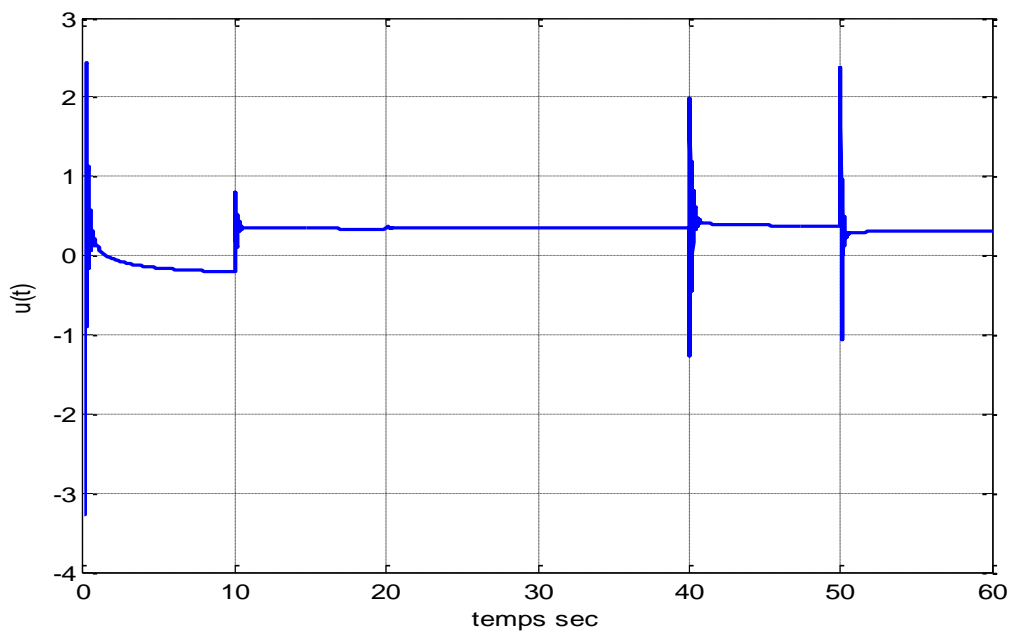
En appliquant le schéma de commande proposé au processus d'ordre fractionnaire et à paramètres variables, nous obtenons les résultats de simulation illustrés sur les figures 4.5 à 4.9.



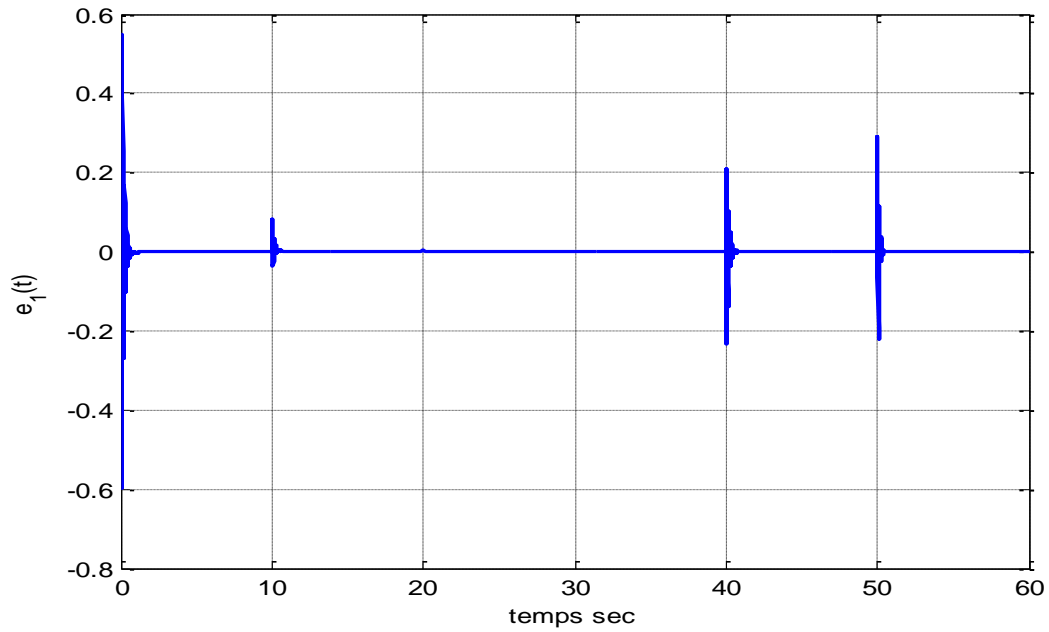
**Fig. 4.6** Evolution temporelle des paramètres du processus



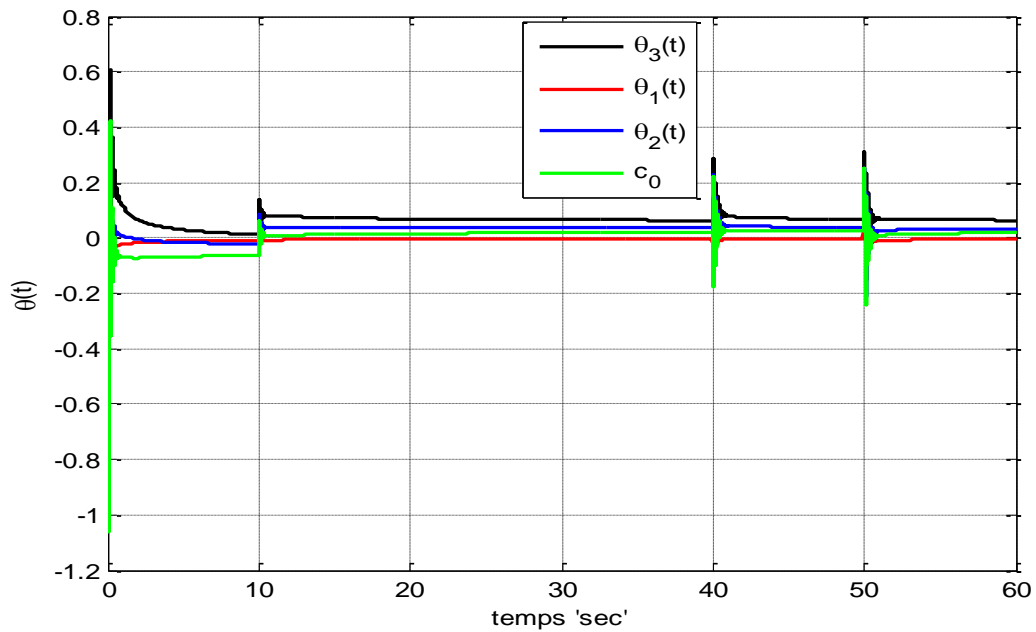
**Fig. 4.7** Sortie du système avec variations paramétriques (bleu) et trajectoire de référence (rouge)



**Fig. 4.8** Signal de commande



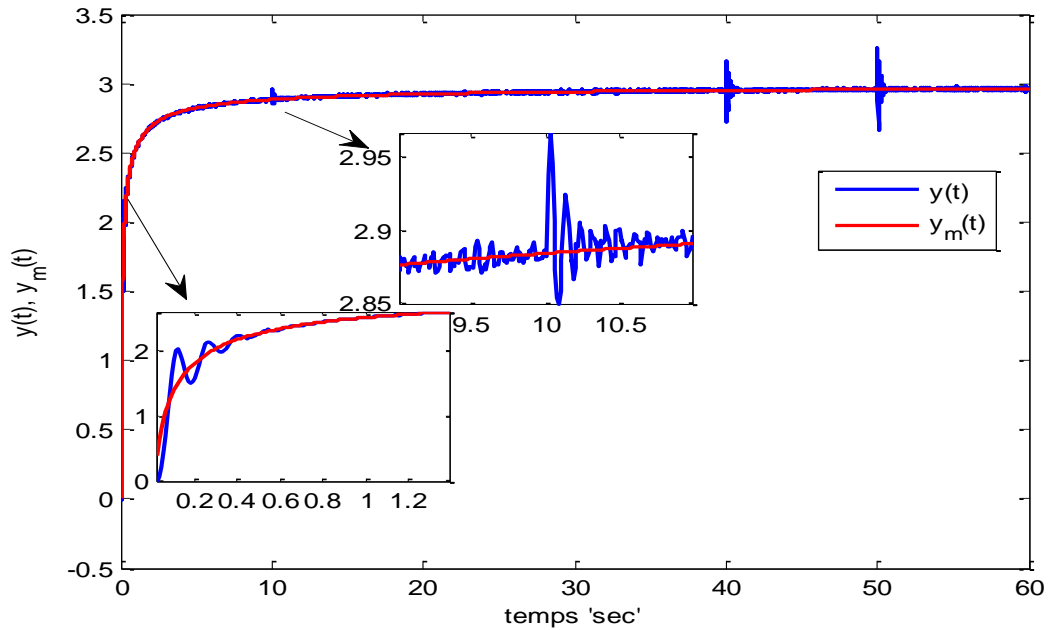
**Fig. 4.9** Erreur de poursuite



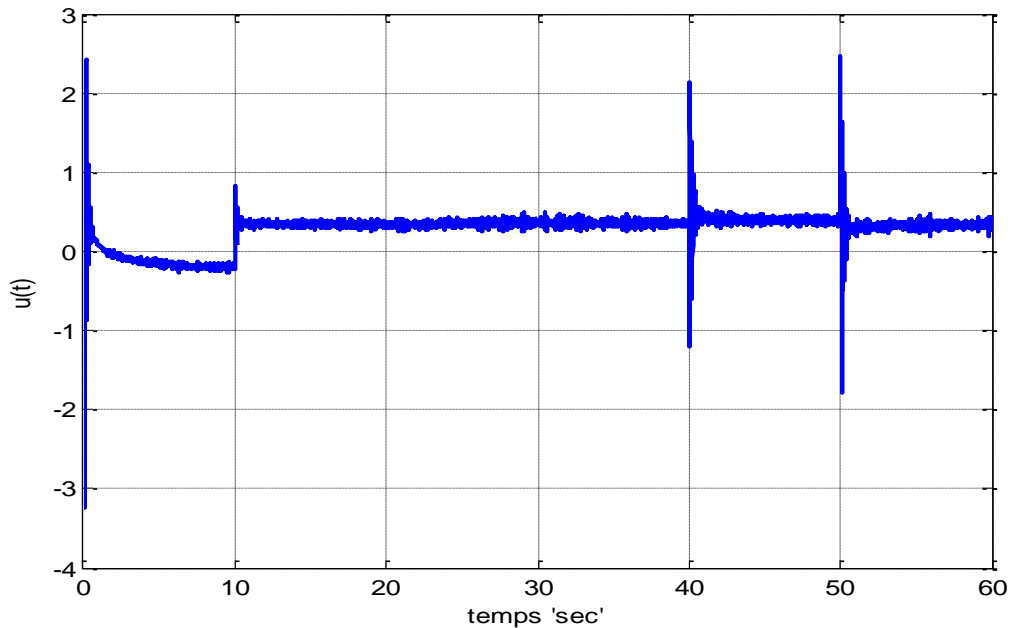
**Fig. 4.10** Gains d'adaptation

On peut clairement constater d'après la réponse du système illustrée sur la figure 4.6, que le système commandé est vraiment capable de suivre la trajectoire de référence malgré les variations paramétriques successives et soudaines. Ceci est aussi visible d'après les figures 4.8 et 4.10, où on voit nettement que les paramètres du régulateur s'adaptent constamment afin d'assurer la convergence du signal d'erreur de poursuite vers zéro.

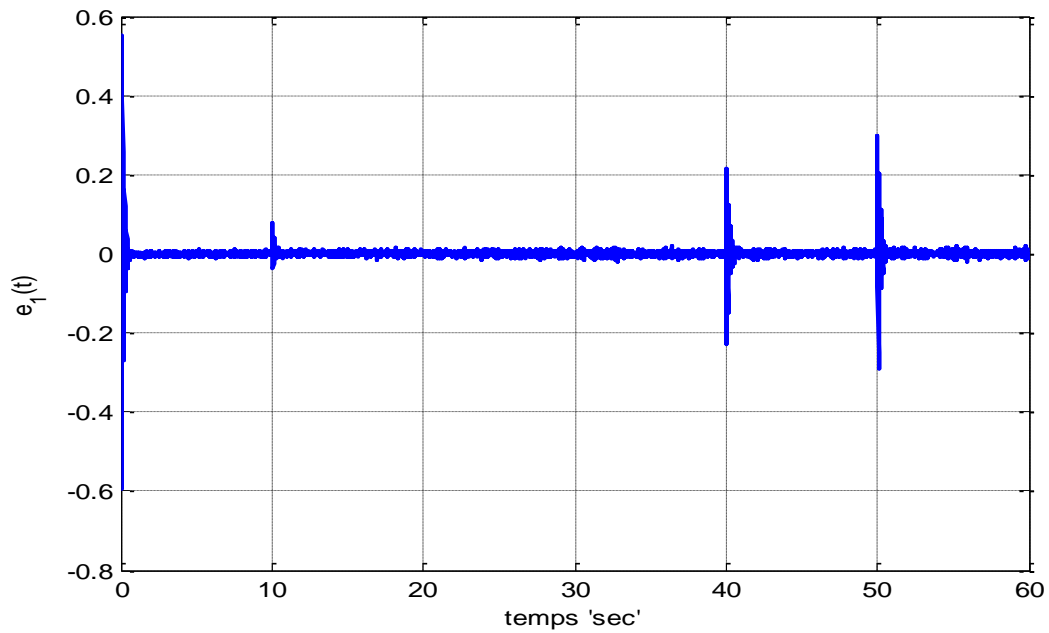
Afin de rendre la simulation plus réaliste, un bruit blanc additif (bruit de mesure) est inséré dans le système (4.43). Pour ce scénario, les résultats de la simulation sont donnés sur les figures 4.10 à 4.13.



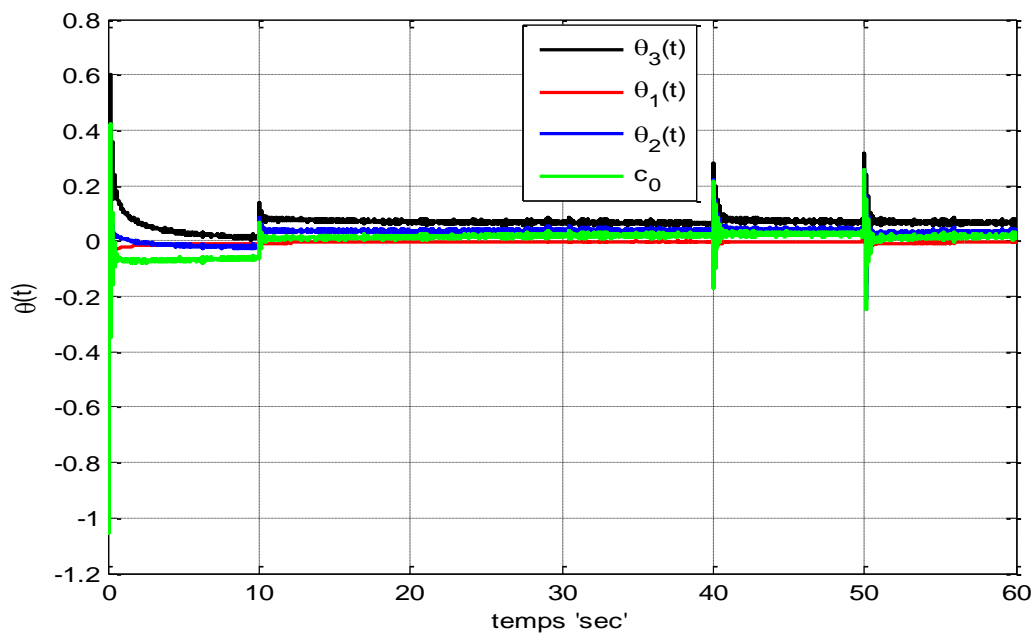
**Fig. 4.11** Sortie du système avec variations paramétriques et bruits de mesure (bleu) et trajectoire de référence (rouge)



**Fig. 4.12** Signal de commande en présence de bruit de mesure.



**Fig. 4.13** Erreur de poursuite en présence de bruit de mesure



**Fig. 4.14** Gains d'adaptation en présence de bruit de mesure

Ce deuxième exemple montre que même en cas de bruits additifs et variations paramétriques, le schéma de commande proposée conserve ses performances et sa capacité à stabiliser le processus et permet le suivi de la trajectoire de référence.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit un schéma de commande adaptative directe d'ordre fractionnaire pour une classe de systèmes d'entrée-sortie d'ordre fractionnaire commensurable et à paramètres inconnus. L'utilisation d'une loi d'adaptation d'ordre fractionnaire et d'une configuration MRAC, nous a permis de garantir la stabilité du système de commande et la convergence de la sortie vers la référence souhaitée. La stabilité de la boucle fermée est analysée et prouvée en utilisant une version étendue du théorème de Lyapunov aux systèmes d'ordre fractionnaire. Deux exemples numériques ont été présentés en simulation et les résultats obtenus illustrent et témoignent de l'efficacité et des performances du schéma de contrôle développé, même en présence de bruits de mesure et variations paramétrique du processus.



## Chapitre 5

### **5. Commande FOMRAC avec Tube de performance (FOTMRAC) des systèmes d'ordre fractionnaire**

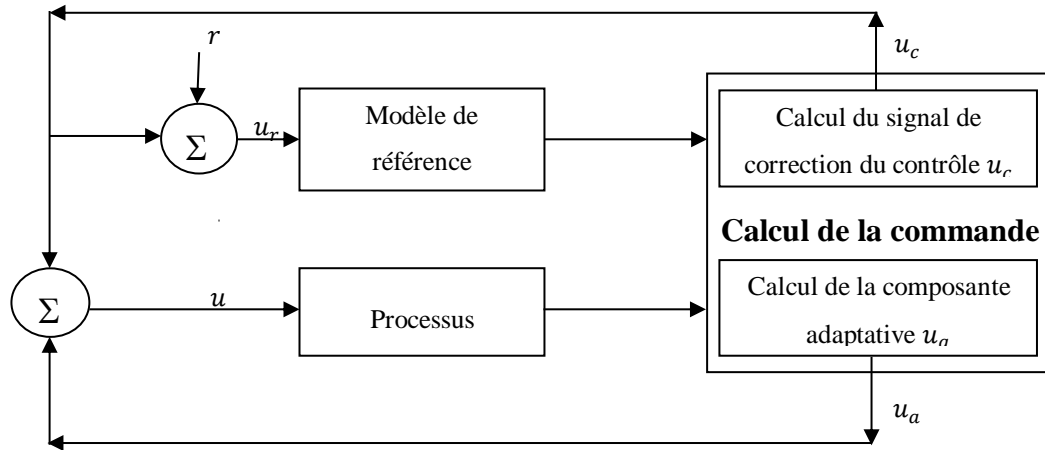
#### **5.1 Introduction**

Récemment, un nouveau concept de commande MRAC avec un tube de performances a été développé par [MIR11]. Cela s'appelle la commande adaptative par modèle de référence avec tube de performance (TMRAC : Tube Model Reference Adaptive Control), où l'objectif du contrôle n'est pas seulement de garantir la stabilité en boucle fermée, la robustesse et le suivi asymptotique, mais aussi d'optimiser le coût du contrôle par rapport à certains critères. Une application de ce nouveau schéma de contrôle adaptatif a été réalisée pour le contrôle du niveau d'eau d'un système de réservoir cylindrique dans [CHI15].

Le concept de la commande adaptative par modèle de référence avec tube de performance avec adaptation en temps réel du coût d'entrée de commande (TMRAC) a été proposé et développé par [MIR11], [MIR12] et [MIR13]. À l'opposé de l'approche standard de synthèse de commande adaptative dans laquelle les performances souhaitées de la boucle fermée du système de contrôle sont définies en utilisant un modèle de référence donnant une trajectoire unique prédéfinie, dans le schéma TMRAC, la référence n'est pas imposée comme une trajectoire unique mais comme un ensemble de trajectoires admissibles appelées modèle de référence avec tube de performance.

Dans le principe de commande détaillé par [MIR13], un contrôle de correction d'objectif est utilisé pour définir le signal d'entrée du modèle de référence qui peut varier dans une plage choisie comme représenté sur la Fig. 5.1. En faisant varier ce signal de commande dans l'intervalle autorisé, un ensemble de trajectoires admissibles est obtenu. Le signal de commande de rétroaction est ainsi amélioré avec la commande de correction d'objectif. La stratégie TMRAC qui en résulte a deux objectifs de commande : le premier est

la stabilité et le suivi asymptotique, tandis que le second est de satisfaire un objectif supplémentaire en performance qui peut inclure la diminution de l'énergie de commande nécessaire en faisant varier le signal de correction d'objectif dans la plage permise.



**Fig. 5.1** Configuration MRAC basée sur un tube de performances.

Dans ce chapitre, nous proposons deux nouveaux schémas de commande adaptative par model de référence avec tube de performance d'ordre fractionnaire (FOTMRAC : Fractional Order Adaptive Tube Model Reference Adaptive Control) pour commander deux classes différentes de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire. Le premier schéma de contrôle FOTMRAC est dédié à la commande d'une classe de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire représentés dans l'espace d'état où toutes les variables d'état sont mesurables, on utilise un contrôle par retour d'état, et nous fixons deux objectifs : le premier est de permettre aux états du système de suivre asymptotiquement les états d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire stable, et le deuxième objectif est de réduire le coût énergétique de la commande [BAL20A]. Le deuxième schéma de contrôle FOTMRAC proposé sera consacré au contrôle d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire représenté par une fonction de transfert d'ordre fractionnaire commensurable, où les seuls signaux mesurables sont l'entrée et la sortie du système.

Par rapport à la littérature [MIR13], [CHI15], notre principale contribution est la généralisation de la technique du tube de performance des systèmes d'ordre entier à une classe de systèmes plus large impliquant des dérivées d'ordre fractionnaire des variables d'états ou des entrées/sorties du système avec une amélioration des indices de performance.

La procédure de conception des deux schémas FOTMRAC proposés peut être résumée en deux grandes étapes. Dans la première, nous calculons une loi de contrôle garantissant la stabilité du système d'ordre fractionnaire bouclé et ce pour toute entrée de référence, ainsi que le suivi asymptotique de la trajectoire permise. Dans la deuxième étape, nous formulons un problème d'optimisation afin de calculer un signal de correction en ligne dans le but de minimiser le coût énergétique du contrôle. Sachant que cette deuxième étape n'est réalisable que seulement après avoir réussi la première étape de conception. Deux exemples numériques de simulation seront ensuite exposés afin d'illustrer l'efficacité des schémas de commande FOTMRAC proposés.

## 5.2 Commande FOTMRAC par retour d'état

Nous considérons la classe de systèmes représentée par le modèle d'état linéaire d'ordre fractionnaire suivant :

$$D^\gamma x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

avec  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  sont des matrices de paramètres constants inconnus,  $\gamma$  est un nombre réel tel que  $0 < \gamma < 1$ ,  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  et  $u(t) \in \mathfrak{R}^1$  sont respectivement le vecteur d'état et le signal d'entrée du système. Nous supposons que les variables d'état du système sont mesurables.

Le premier objectif de l'approche de commande proposée est de déterminer le signal de commande  $u(t)$  tel que  $x(t)$  suit asymptotiquement le modèle de référence d'ordre fractionnaire spécifié par :

$$D^\gamma x_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_r(t) \quad (5.2)$$

avec

$$u_r(t) = r(t) + u_c(t) \quad (5.3)$$

où  $A_m \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  est une matrice dont les valeurs propres sont à parties réelles négatives,  $B_m \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ ,  $x_m \in \mathfrak{R}^n$  et  $u_r \in \mathfrak{R}^1$  sont respectivement l'état et l'entrée du modèle de référence.

Ici,  $r(t) \in \mathfrak{R}^1$  est le signal d'entrée de référence, et  $u_c(t) \in \mathfrak{R}^1$  est le signal de correction du contrôle variant dans l'intervalle suivant :

$$u_c(t) \in [u_c^- \quad u_c^+] \quad (5.4)$$

En outre, par l'équation (5.3), nous définissons le signal d'entrée du modèle de référence d'ordre fractionnaire, qui peut varier dans un intervalle spécifié, et comme ça, nous n'aurons pas de trajectoire de référence unique mais un ensemble de trajectoires souhaitées admissibles qui constituent le tube de performance du modèle de référence. Dans de nombreuses applications, telles que les procédés industriels ou la commande de vol, il n'est pas nécessaire de suivre exactement une seule trajectoire de référence, mais un certain écart par rapport à celle-ci est autorisé.

Ensuite, un deuxième objectif est de trouver le signal de correction satisfaisant la condition (5.4) et minimisant la fonction coût suivante :

$$J(u_c) = \int_0^t u^2(\tau) d\tau \quad (5.5)$$

Afin de pouvoir garantir le premier objectif de la stratégie de contrôle adaptatif d'ordre fractionnaire proposée, nous supposons qu'il existe un vecteur constant  $\theta_x^* \in \mathfrak{R}^n$  et un scalaire constant non nul  $\theta_m^*$  tels que les conditions suivantes sont satisfaites:

$$A + B\theta_x^{*T} = A_m \quad (5.6)$$

$$B\theta_m^* = B_m \quad (5.7)$$

On suppose que la structure de  $A$  et  $B$  est connue et que la paire  $(A, B)$  est contrôlable. Aussi, on suppose que  $\theta_m^*$  est positif. Cette dernière hypothèse n'est pas restrictive parce que, premièrement, elle est généralement utilisée dans des conceptions similaires [IOA96], de plus, nous avons la possibilité de choisir  $A_m$  et  $B_m$  de manière à garantir l'existence de  $\theta_x^*$  et  $\theta_m^*$ . On note que si on considère des matrices  $A, B, A_m, B_m$  arbitraires, il se peut qu'il n'y aurait aucun  $\theta_x^*$  et  $\theta_m^*$  qui satisferaient (5.6) et (5.7).

Dans le cas où la structure de  $A$  et  $B$  est connue, on peut concevoir des matrices  $A_m$  et  $B_m$  de sorte que les conditions (5.6) et (5.7) soient satisfaites pour certains  $\theta_x^*$  et  $\theta_m^*$ . Dans

cette étude, on suppose l'existence des solutions  $\theta_x^*$  et  $\theta_m^*$ , cela veut dire que le contrôleur a la flexibilité structurelle suffisante afin de réaliser l'objectif du contrôle.

La commande proposée  $u(t)$  est la somme de deux signaux: un signal adaptatif  $u_a(t)$ , et un signal de correction d'objectif du contrôle  $u_c(t)$ ,

$$u(t) = u_a(t) + u_c(t) \quad (5.8)$$

En définissant l'erreur de poursuite  $e(t) = x(t) - x_m(t)$ , nous aurons :

$$\begin{aligned} D^\nu e(t) &= D^\nu x(t) - D^\nu x_m(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - (A_m x_m(t) + B_m u_r(t)) \\ &= (A_m - B\theta_x^{*T})x(t) + B(u_a(t) + u_c(t)) \\ &\quad - A_m x_m(t) - B_m(r(t) + u_c(t)) \\ &= A_m e(t) + B[u_a(t) - \theta_x^{*T} \omega(t) - \theta_c^* u_c(t)] \end{aligned} \quad (5.9)$$

avec

$$\begin{cases} \omega(t) = [x(t) \quad r(t)]^T, \\ \theta^* = [\theta_x^{*T} \quad \theta_m^*]^T, \\ \theta_c^* = \theta_m^* - 1, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$u_a(t) = \theta^T \omega(t) + \theta_c u_c(t) \quad (5.11)$$

$$\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \theta^*, \quad \tilde{\theta}_c(t) = \theta_c(t) - \theta_c^* \quad (5.12)$$

Et on aboutit à l'équation d'erreur d'ordre fractionnaire suivante :

$$D^\nu e(t) = A_m e(t) + B\tilde{\theta}(t)\omega(t) + B\tilde{\theta}_c(t)u_c(t) \quad (5.13)$$

Suite aux résultats de [MIR13], nous proposons le contrôle adaptatif défini par (5.8) et (5.11), avec les lois d'adaptation de gains suivantes :

$$\begin{cases} D^\nu \theta(t) = -\Lambda_1 \eta(t) - \Lambda_p D^\nu \eta(t), \\ \eta(t) = S(t)\omega(t), \\ S(t) = e^T(t)PB_m, \\ D^\nu \theta_c(t) = -\Lambda_c S(t)u_c(t) + \theta_{c0}(t), \end{cases} \quad (5.14)$$

où

$$\theta_{c0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\theta_c + 1| \geq \epsilon \\ \Lambda_c S(t) u_c(t) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.15)$$

est la fonction de projection,  $\Lambda_1 = \Lambda_1^T > 0$ ,  $\Lambda_p = \Lambda_p^T > 0$  et  $\Lambda_c > 0$  sont des paramètres de conception,  $\epsilon$  est une limite inférieure connue de  $|\theta_c^* + 1| = |\theta_m^*| = \theta_m^*$ ,  $P$  est la solution de l'équation de Lyapunov :

$$A_m^T P + P A_m + Q = 0, \quad Q = Q^T > 0 \quad (5.16)$$

Dans la section suivante, nous prouverons que la loi de contrôle proposée garantit la stabilité asymptotique du système en boucle fermée au sens de Lyapunov, pour tout choix de  $u_c \in [u_c^- \ u_c^+]$ , et comme ça le premier objectif de commande sera réalisé indépendamment du second.

Le second objectif du contrôle FOTMRAC proposé est de concevoir un mécanisme de mise à jour du signal de correction d'objectif  $u_c \in [u_c^- \ u_c^+]$  dans le but de minimiser le coût d'énergie de commande évalué par le critère d'optimisation (5.5).

De (5.5) et (5.8) nous trouvons  $J(u_c) = (u_a(t) + u_c(t))^2$ . Ainsi, pour tout  $\theta^T(t)$ ,  $\omega(t)$  et  $\theta_c(t)$  bornés, le critère d'optimisation (5.5) conduit à la solution suivante :

$$u_c^{opt}(t) = \begin{cases} -u_a(t) & \text{si } u_a \in [u_c^- \ u_c^+], \\ \text{argmin}(J(u_c^-), J(u_c^+)) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.17)$$

où  $J(u_c^-)$  et  $J(u_c^+)$  sont respectivement les valeurs de  $J(u_c) = (u_a(t) + u_c(t))^2$  lorsque  $u_c = u_c^-$  et  $u_c = u_c^+$ .

À partir des équations (5.8), (5.14) et (5.17) du contrôleur, il en résulte que les deux objectifs de commande sont atteints et évidemment, la solution au problème dans la première étape est indispensable dans la deuxième étape de conception.

### Remarque 5.1

On note que la solution du problème d'optimisation (5.5) dans le cas où  $u_a \in [u_c^- \ u_c^+]$  a la forme  $-(1 + \theta_c(t))^{-1} \theta^T(t) \omega(t)$ , donc le gain adaptatif  $\theta_c(t)$  a un point de singularité. Afin d'empêcher  $\theta_c(t)$  de prendre la valeur  $-1$ , nous suggérons l'algorithme de projection du paramètre pour la mise à jour de ce gain [IOA96].

### 5.2.1 Résultat principal

Dans cette section, nous présentons le résultat principal de ce travail de conception de la commande, et qui concerne l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov de la stratégie de contrôle FOTMRAC proposée.

#### *Théorème 5.1*

*Considérons la classe des systèmes d'ordre fractionnaire donnée par (5.1), et le modèle de référence choisi donné par (5.2), avec l'entrée de référence (5.3) et le signal de correction d'objectif du control satisfaisant (5.4). La loi de commande FOTMRAC donnée par (5.8) et (5.11) avec les lois d'adaptation des gains (5.14) et (5.17) garantit que tous les signaux en boucle fermée sont bornés, l'erreur de poursuite tend asymptotiquement vers zéro, et minimise également le coût de contrôle défini par (5.5).*

#### *Preuve du théorème 5.1*

Définissons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V = e^T(t)Pe(t) + \frac{1}{\theta_m^*} [\tilde{\eta}^T(t)\Lambda_1^{-1}\tilde{\eta}(t) + \Lambda_1^{-1}\tilde{\theta}_c^2(t)], \quad (5.18)$$

où

$$\tilde{\eta}(t) = \tilde{\theta} + \Lambda_p\eta(t) \quad (5.19)$$

La dérivée d'ordre fractionnaire  $\gamma$  de la fonction  $V$  nous donne :

$$D^\gamma V = D^\gamma[e^T(t)Pe(t)] + \frac{1}{\theta_m^*} (D^\gamma[\tilde{\eta}^T(t)\Lambda_1^{-1}\tilde{\eta}(t)] + \Lambda_1^{-1}D^\gamma[\tilde{\theta}_c^2(t)]) \quad (5.20)$$

En appliquant le lemme 1.1 pour chaque terme de (5.20), on obtient :

$$\begin{aligned} D^\gamma[e^T(t)Pe(t)] &\leq 2e^T(t)PD^\gamma e(t) \\ &\leq 2 \left[ e^T(t)PA_m e(t) + \frac{1}{\theta_m^*} [\tilde{\theta}^T\eta(t) + \tilde{\theta}_c S(t)u_c(t)] \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$D^\gamma[\tilde{\eta}^T(t)\Lambda_1^{-1}\tilde{\eta}(t)] \leq 2\tilde{\eta}^T(t)\Lambda_1^{-1}D^\gamma\tilde{\eta}(t) \quad (5.22)$$

Or

$$\begin{aligned} D^\nu \tilde{\eta}(t) &= D^\nu \theta + \Lambda_p D^\nu \eta(t) \\ &= -\Lambda_1 \eta(t) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} D^\nu [\tilde{\eta}^T(t) \Lambda_1^{-1} \tilde{\eta}(t)] &\leq 2[\tilde{\theta}^T(t) + \eta^T(t) \Lambda_p] \Lambda_1^{-1} [-\Lambda_1 \eta(t)] \\ &\leq -2[\tilde{\theta}^T(t) + \eta^T(t) \Lambda_p] \eta(t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} D^\nu [\tilde{\theta}_c^2(t)] &\leq 2\tilde{\theta}_c(t) D^\nu \tilde{\theta}_c(t) \\ &\leq 2\tilde{\theta}_c(t) [-\Lambda_c S(t) u_c(t) + \theta_{c0}(t)] \end{aligned} \quad (5.25)$$

À partir de (5.21), (5.24) et (5.25), on obtient :

$$\begin{aligned} D^\nu V &\leq 2e^T(t) P A_m e(t) + \frac{2}{\theta_m^*} [\tilde{\theta}^T \eta(t) + \tilde{\theta}_c S(t) u_c(t)] + \\ &\quad \frac{2}{\theta_m^*} [-\tilde{\theta}^T(t) \eta(t) - \eta^T(t) \Lambda_p \eta(t)] + \\ &\quad \frac{2\Lambda_c^{-1}}{\theta_m^*} [-\Lambda_c \tilde{\theta}_c(t) S(t) u_c(t) + \tilde{\theta}_c(t) \theta_{c0}(t)] \end{aligned} \quad (5.26)$$

D'où

$$D^\nu V \leq 2e^T(t) P A_m e(t) - \frac{2}{\theta_m^*} \eta^T(t) \Lambda_p \eta(t) + \frac{2}{\theta_m^* \Lambda_c} \tilde{\theta}_c(t) \theta_{c0}(t) \quad (5.27)$$

Parce que

$$\begin{aligned} 2e^T(t) P A_m e(t) &= e^T(t) P A_m e(t) + e^T(t) A_m^T P e(t) \\ &= e^T(t) [A_m^T P + P A_m] e(t) \\ &= -e^T(t) Q e(t) \end{aligned} \quad (5.28)$$

nous aurons

$$D^\nu V \leq -e^T(t) Q e(t) - \frac{2}{\theta_m^*} \eta^T(t) \Lambda_p \eta(t) + \frac{2}{\theta_m^* \Lambda_c} \tilde{\theta}_c(t) \theta_{c0}(t) \quad (5.29)$$

où le dernier terme satisfait  $\tilde{\theta}_c(t) \theta_{c0}(t) \leq 0$  d'après [IOA96].

À partir de (5.29), nous avons  $D^\nu V \leq 0$ , et donc la stabilité au sens de Lyapunov du schéma de contrôle proposé est prouvée pour tout  $u_c \in [u_c^- \quad u_c^+]$ . Par conséquent, l'objectif

de la première étape est accompli. Il est clair que choisir  $u_c^{opt}(t)$  satisfaisant (5.17) permet de minimiser le coût du contrôle défini par (5.5). Ainsi, les deux objectifs du contrôle sont atteints ; nous garantissons la stabilité de la boucle fermée, la convergence de la poursuite et aussi la minimisation du coût de contrôle. Les deux objectifs de contrôle sont atteints séparément, mais la solution de la première étape est nécessaire pour la solution de la deuxième.

## 5.2.2 Exemples de simulation

Dans cette section, nous proposons deux exemples numériques en simulation afin d'illustrer l'efficacité de la stratégie de contrôle adaptatif FOTMRAC proposée.

### 5.2.2.1 Exemple 1

Soit le système d'ordre fractionnaire instable défini par :

$$D^\gamma y(t) = ay(t) + bu(t), \quad y(0) = 0. \quad (5.30)$$

On suppose le modèle de référence représenté par :

$$\begin{aligned} D^\gamma y_m(t) &= a_m y_m(t) + b_m u_r(t) \\ u_r(t) &= r(t) + u_c(t), \end{aligned} \quad (5.31)$$

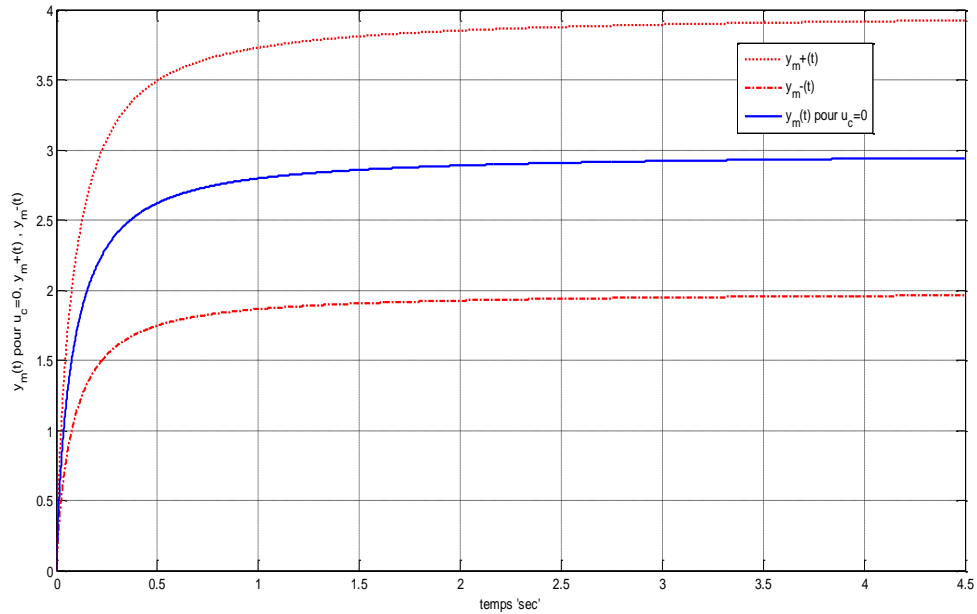
où  $a = 1, b = 0.5, a_m = -5, b_m = 5, u_c^- = -1, u_c^+ = +1, \gamma = 0.75$  et  $r(t)$  est un signal échelon d'amplitude +3.

Par le choix de  $a_m$  et  $b_m$ , nous décrivons les performances du modèle de référence. Dans cet exemple numérique, nous choisissons  $a_m$  pour être un pôle stable, et  $b_m$  de façon à avoir un gain unitaire.

Puisque le signal de référence  $r(t)$  est un échelon d'amplitude +3, on choisit  $[-1, 1]$  comme plage de variation de  $u_c(t)$ , et ainsi, nous définissons la plage admissible pour les trajectoires de référence.

Les variables  $y_m^+(t)$  et  $y_m^-(t)$  sur la figure 5.2 représentent respectivement la réponse du modèle de référence pour les entrées  $u_r(t) = r(t) + u_c^+$  et  $u_r(t) = r(t) + u_c^-$ . Ces

variables définissent le tube des trajectoires de référence. La réponse du modèle de référence pour  $u_c(t) = 0$  est aussi représenté sur la figure 5.2 (en bleu).



**Fig. 5.2** Réponse indicielle du système d'ordre 2 fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire  $\alpha$

Le contrôleur FOTMRAC (5.8) et (5.11) avec les lois d'adaptation des gains (5.14) et la solution du problème d'optimisation (5.17) est appliqué au système (5.30) avec les paramètres du contrôleur suivants :

$$\Lambda_1 = 9, \Lambda_p = 0.6, P = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

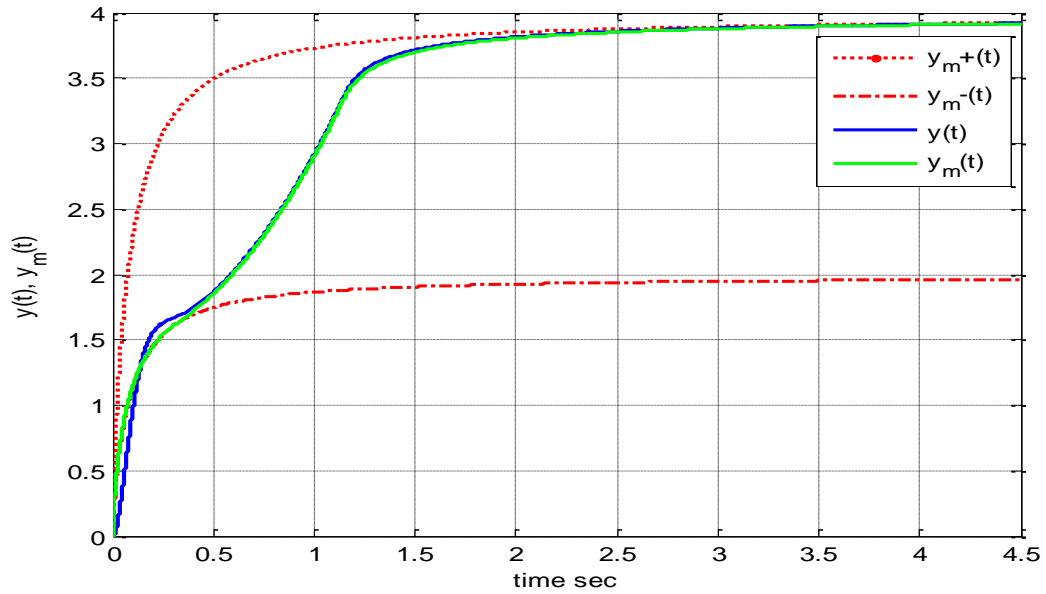
$P$  est la solution de l'équation de Lyapunov (5.16).

Pour les besoins de la simulation numérique, nous utilisons les approximations de Grünwald–Letnikov des opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire définies dans les équations (1.20) et (1.21), respectivement.

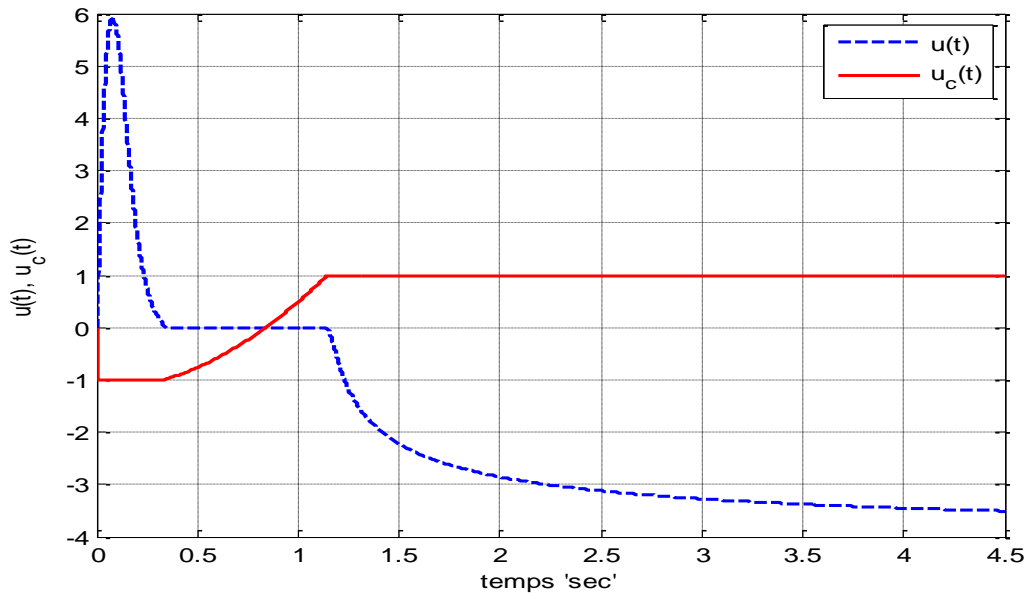
Notre simulation comprend deux cas où deux valeurs différentes pour l'entrée du modèle de référence  $r(t) = +3$  et  $r(t) = -3$  seront pris.

Nous prenons d'abord l'entrée du modèle de référence  $r(t) = +3$ . Les résultats de la simulation obtenus pour la sortie du système contrôlé et la trajectoire de référence se trouvant à l'intérieur du tube de performances sont présentés à la figure 5.3. Le signal de commande

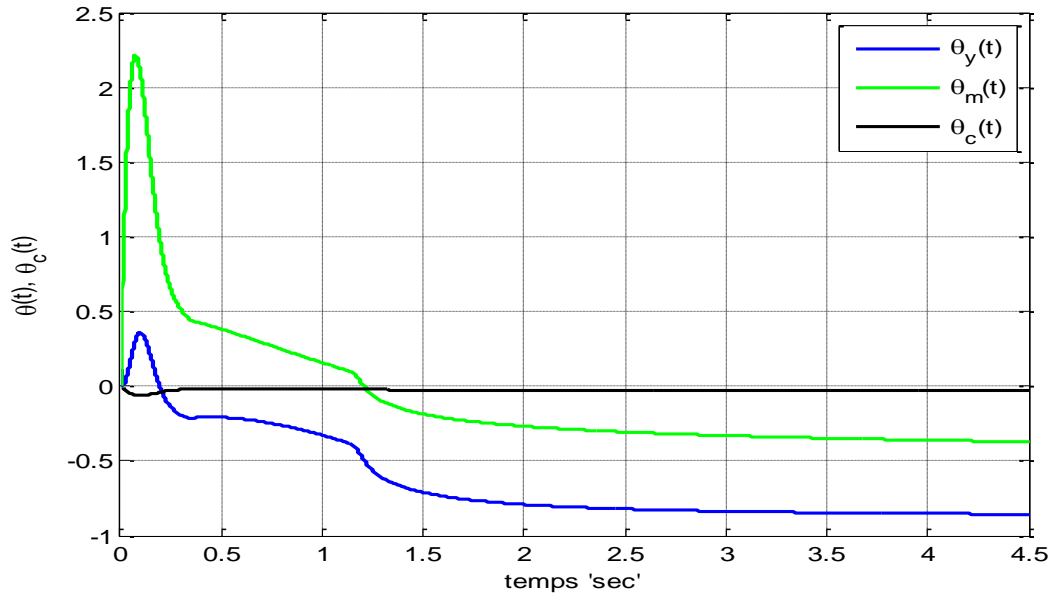
FOTMRAC, le signal de correction de l'objectif du contrôle et les vecteurs de gains adaptatifs sont respectivement représentés sur les figures 5.4 et 5.5.



**Fig. 5.3** Sortie du système commandé (bleu), trajectoire de référence (vert), tube de performances (rouge).

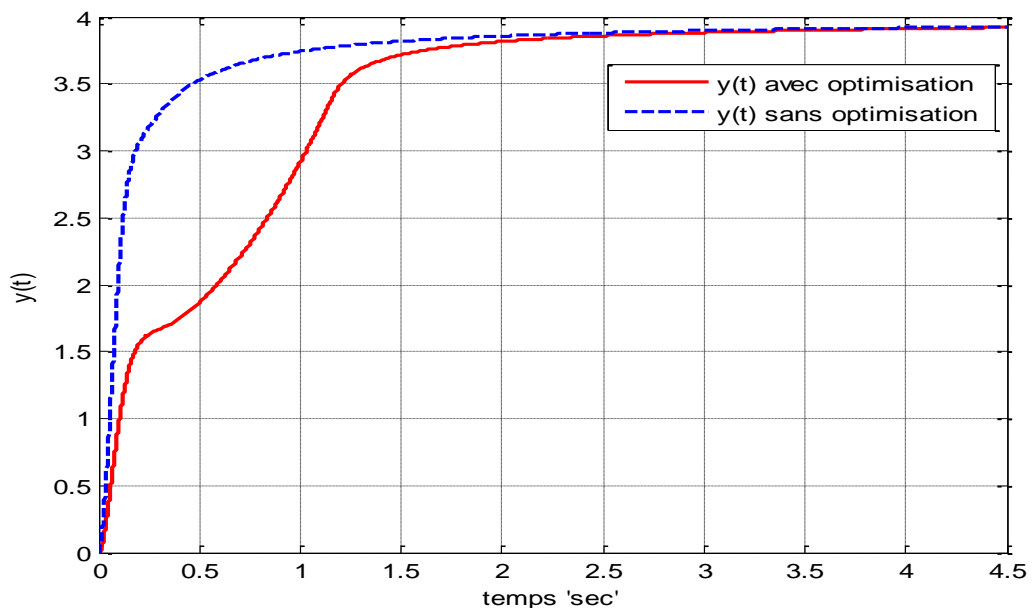


**Fig. 5.4** Signal de commande FOTMRAC (bleu) et signal de correction d'objectif de commande (rouge)

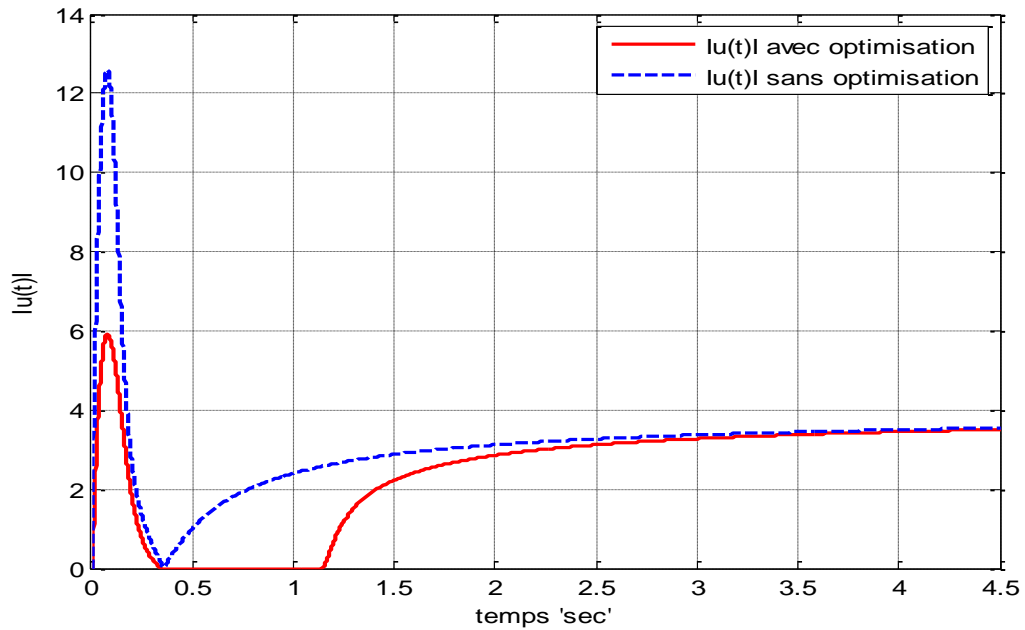


**Fig. 5.5** Vecteurs de gains adaptatifs

Afin de comparer les performances de la stratégie FOTMRAC proposée avec le schéma FOMRAC (c'est-à-dire,  $u_c = 0$  et  $\theta_c = 0$  dans (5.8) et (5.11)), nous ajustons la valeur de l'entrée du modèle de référence telle que les trajectoires atteignent la même valeur en régime permanent. Les sorties du système en boucle fermée pour les deux cas du contrôle adaptatif d'ordre fractionnaire (FOMRAC) avec optimisation et sans optimisation sont illustrées sur la figure 5.6, alors que les valeurs absolues des signaux de commande sont illustrées sur la figure 5.7.

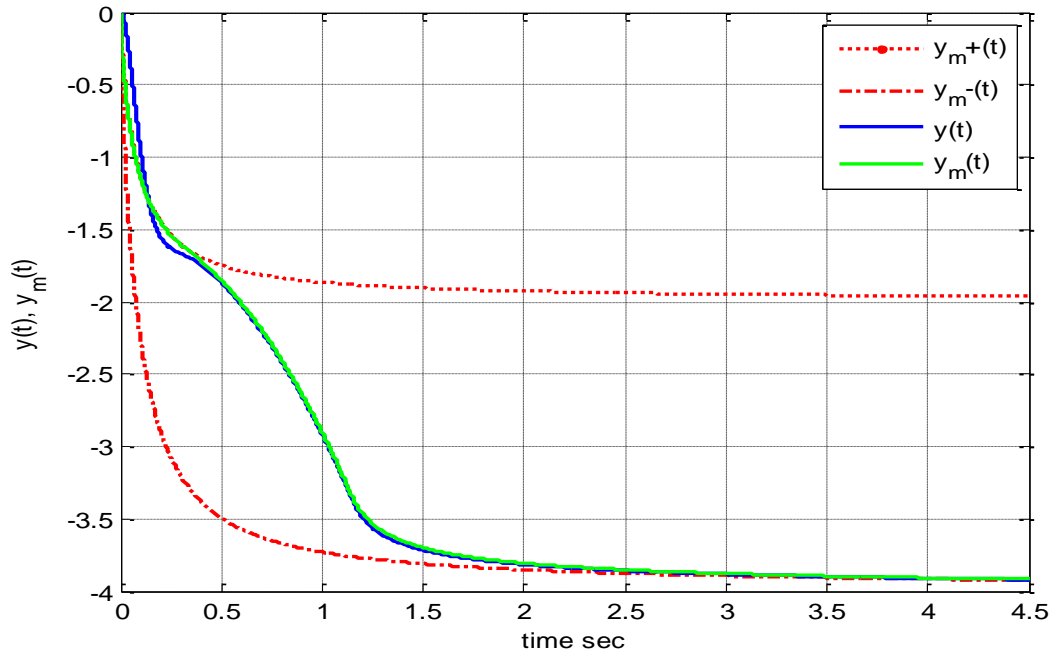


**Fig. 5.6** Sorties du système commandé en cas de commande FOTMRAC (rouge) et en cas de commande FOMRAC (bleu)

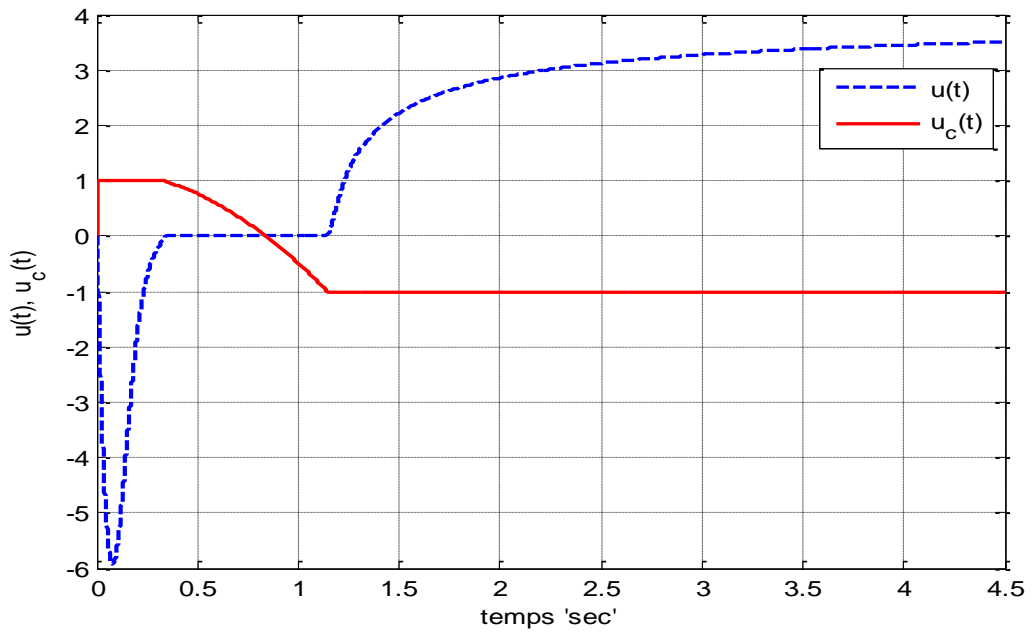


**Fig. 5.7** Valeurs absolues des signaux de commande en cas de FOTMRAC (rouge) et en cas de FOMRAC (bleu)

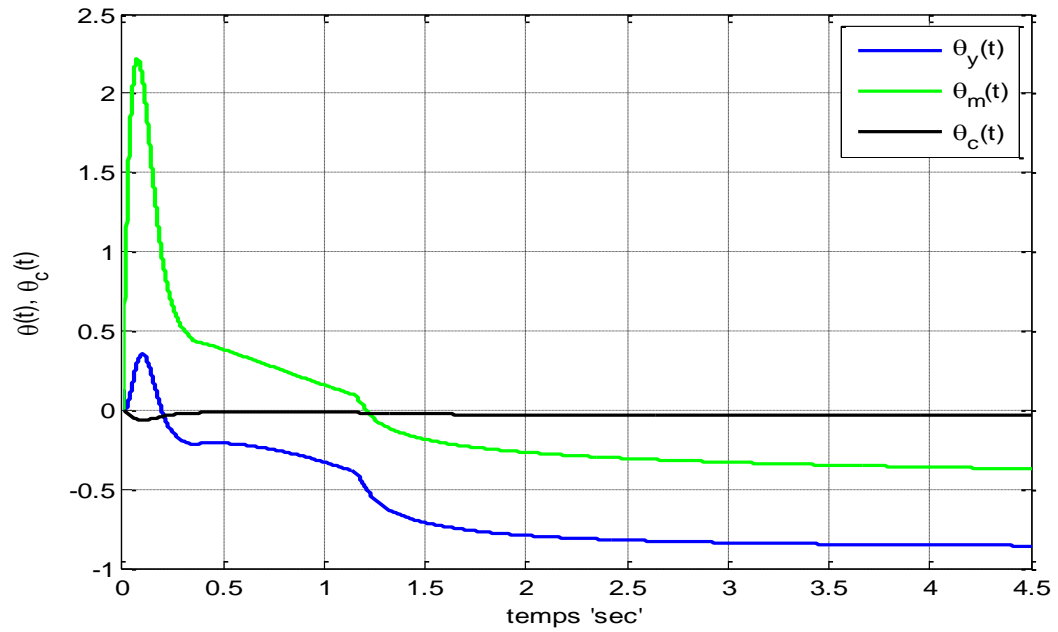
En prenant l'entrée du modèle de référence  $r(t) = -3$ , nous obtenons les résultats résumés dans les figures 5.8 jusqu'à 5.12, illustrant, respectivement, la sortie du système commandé et la trajectoire de référence compris dans le tube de performances (figure 5.8), le signal de commande FOTMRAC et le signal de correction d'objectif de commande (figure 5.9), les vecteurs des gains adaptatifs (figure 5.10), les sorties du système pour le cas de contrôle FOTMRAC et FOMRAC (figure 5.11), ainsi que leurs signaux de commande en valeur absolue (figure 5.12).



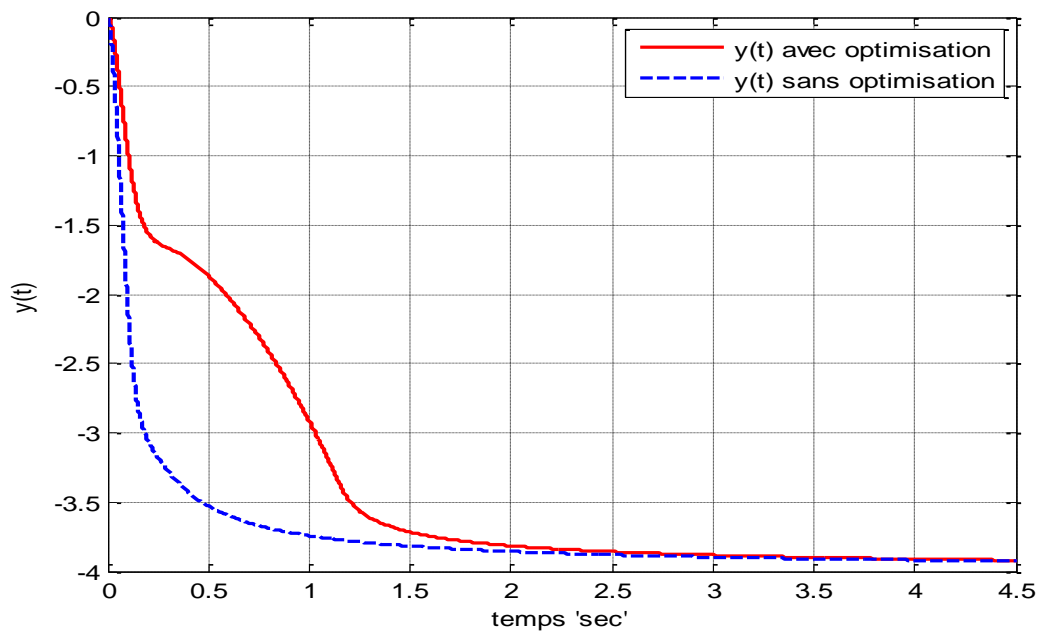
**Fig. 5.8** Sortie du système contrôlé (bleu), trajectoire de référence (vert), tube de performances (rouge), pour  $r(t) = -3$ .



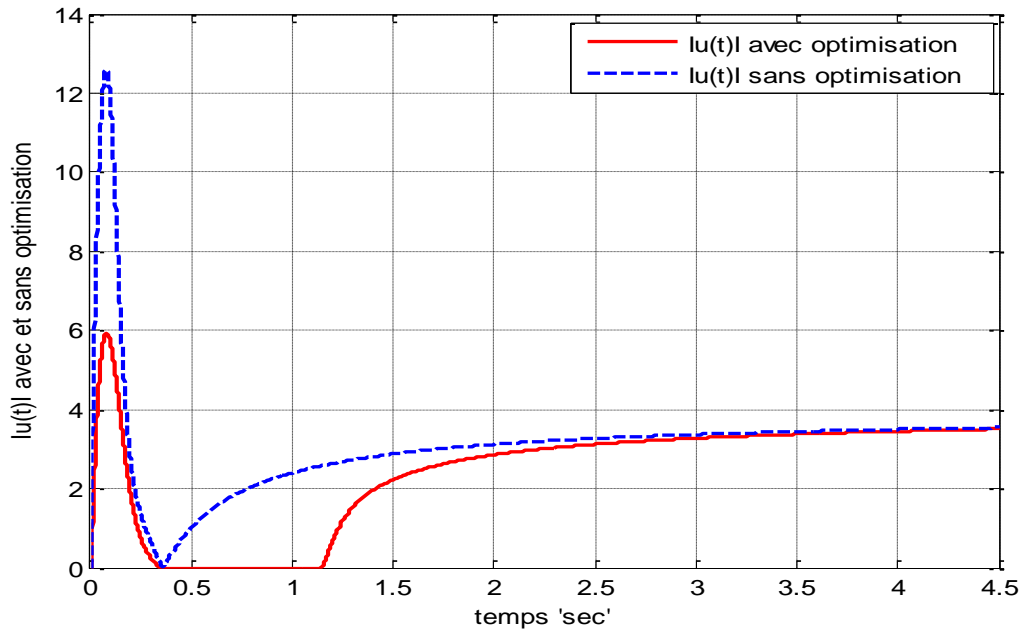
**Fig. 5.9** Signal de commande FOTMRAC (bleu) et signal de correction d'objectif du contrôle (rouge), pour  $r(t) = -3$ .



**Fig. 5.10** Vecteurs de gains adaptatifs



**Fig. 5.11** Sorties du système contrôlé en cas de commande FOTMRAC (rouge) et en cas de commande FOMRAC (bleu), pour  $r(t) = -3$



**Fig. 5.12** Valeurs absolues des signaux de commande en cas de FOTMRAC (rouge) et en cas de FOMRAC (bleu), pour  $r(t) = -3$

D'après ces résultats de simulation, il est clair que le signal de correction d'objectif est mis à jour à chaque instant, et varie dans l'intervalle prédéfini afin de réduire le critère de l'énergie de commande. Cela implique également que la trajectoire de référence est mise à jour en temps réel et reste à l'intérieure du tube de performance du modèle de référence prédéfini, tandis que la sortie du système suit parfaitement la trajectoire mise à jour.

Les figures 5.11 et 5.12 illustrent les réponses du système ainsi que la valeur absolue des signaux de commande  $|u(t)|$  respectivement pour le cas des deux stratégies FOTMRAC et FOMRAC appliquées. On remarque que le coût de commande est nettement plus bas avec un contrôle FOTMRAC (avec optimisation), et ainsi, nous avons la même réponse en régime permanent avec un minimum d'effort de commande.

Pour évaluer le critère quadratique  $J$  donné dans (5.5), on compare pour les deux cas (avec et sans optimisation) la valeur de la fonction coût, les résultats sont données dans le tableau 5.1.

**Tableau 5.1** : Evaluation de la fonction coût de commande

	<b>Commande FOTMRAC</b> (avec optimisation)	<b>Commande FOMRAC</b> (sans optimisation)
$J = \sum u^2(k)$	35171	54100

On observe que le coût de commande dans le cas du schéma FOTMRAC proposé est beaucoup plus faible (environ 35%) que dans le cas d'une commande FOMRAC.

### 5.2.2.2 Exemple 2

Considérons le système instable d'ordre fractionnaire SIMO défini par :

$$\begin{bmatrix} D^\gamma x_1(t) \\ D^\gamma x_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + B u(t) \quad (5.33)$$

où :  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ , et l'ordre  $\gamma = 0.8$ .

Notre objectif est de concevoir une loi de commande  $u(t)$  par retour d'état selon notre schéma FOTMRAC proposé, en vue de commander la première variable d'état  $x_1(t)$ . Dans cette objectif, nous choisissons le modèle de référence d'ordre fractionnaire stable suivant :

$$\begin{bmatrix} D^\gamma x_{m1}(t) \\ D^\gamma x_{m2}(t) \end{bmatrix} = A_m \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} + B_m u_r(t) \quad (5.34)$$

avec:

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_r(t) = r(t) + u_c(t) \quad (5.35)$$

Nous pennons les valeurs des paramètres du contrôleur comme suit :

$$P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \Lambda_p = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \Lambda_c = 2. \quad (5.36)$$

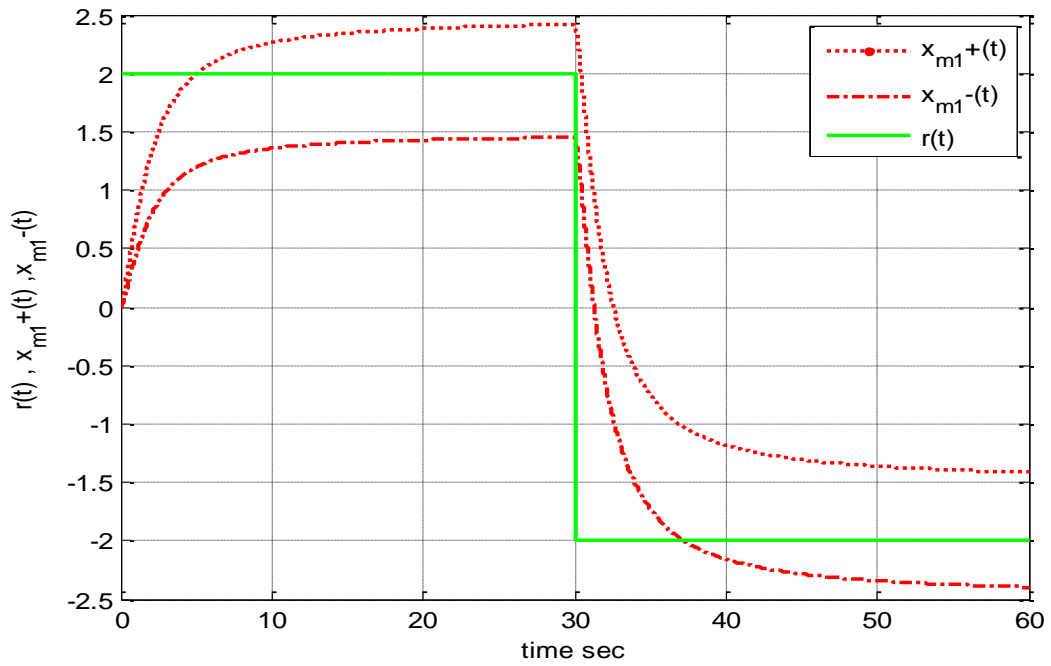
Le signal de référence  $r(t)$  est illustré sur la figure 5.13 (en vert). Les variables  $x_{m1}^+(t)$  et  $x_{m1}^-(t)$  sur la figure 5.13 représentent respectivement la première variable d'état du modèle de référence pour l'entrée  $u(t) = r(t) + u_c^+$  et  $u(t) = r(t) + u_c^-$ , où  $u_c^- = -0.5$  et  $u_c^+ = 0.5$ . Ces variables définissent le tube des trajectoires de référence admissibles (en rouge).

La figure 5.14 représente la sortie du système (en bleu), qui suit parfaitement la trajectoire du modèle de référence (en vert) à l'intérieur du tube de référence (en rouge). Cette trajectoire qui est mise à jour par la loi de commande adaptative de façon à minimiser l'effort de commande.

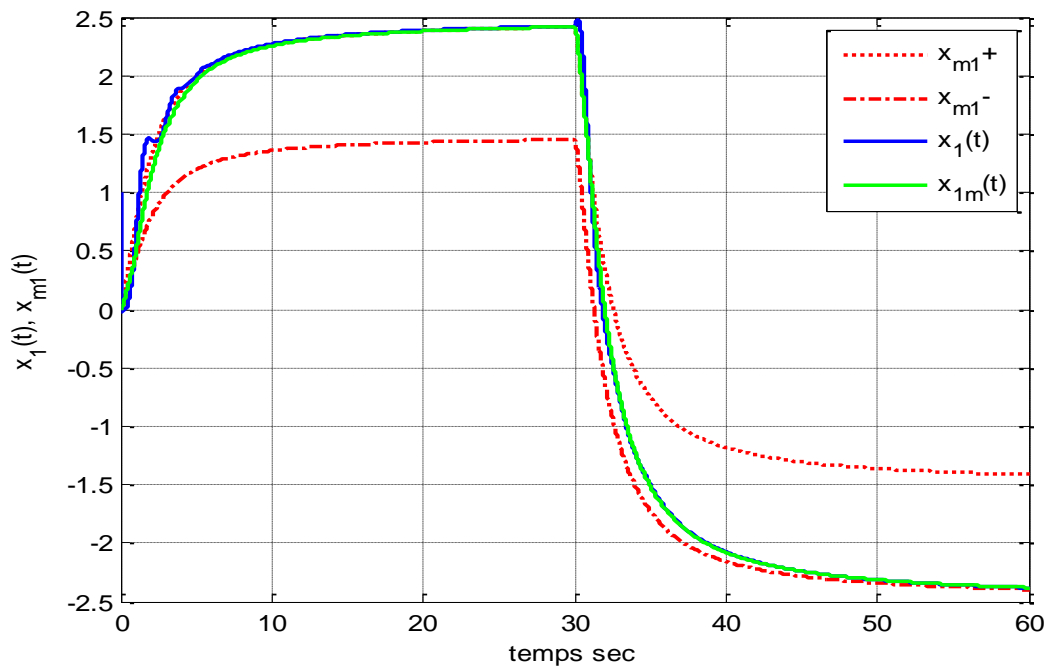
Le signal de commande (en bleu) et le signal de correction d'objectif sont illustrés sur la figure 5.15, tandis que les vecteurs des gains adaptatifs sont représentés à la figure 5.16.

Dans le but de comparer les performances de la commande FOTMRAC proposée avec le schéma FOMRAC (c'est-à-dire,  $u_c = 0$  et  $\theta_c = 0$  dans (5.8) et (5.11)), nous ajustons la valeur de l'entrée du modèle de référence de façon à ce que les trajectoires atteignent la même valeur en régime permanent. Les sorties du système commandé et les valeurs absolues des signaux de commande issus des schémas FOTMRAC (en rouge) et FOMRAC (en bleu) sont respectivement illustrés sur la figure 5.17 et 5.18.

Pour la même réponse en régime permanent, nous remarquons que le schéma FOTMRAC arrive à trouver la trajectoire de référence comprise dans le tube de performances de manière à minimiser l'effort de commande nécessaire.



**Fig. 5.13** Tube de performance et signal de référence



**Fig. 5.14** Sortie du système commandé et trajectoire de référence comprise dans le tube de performance.

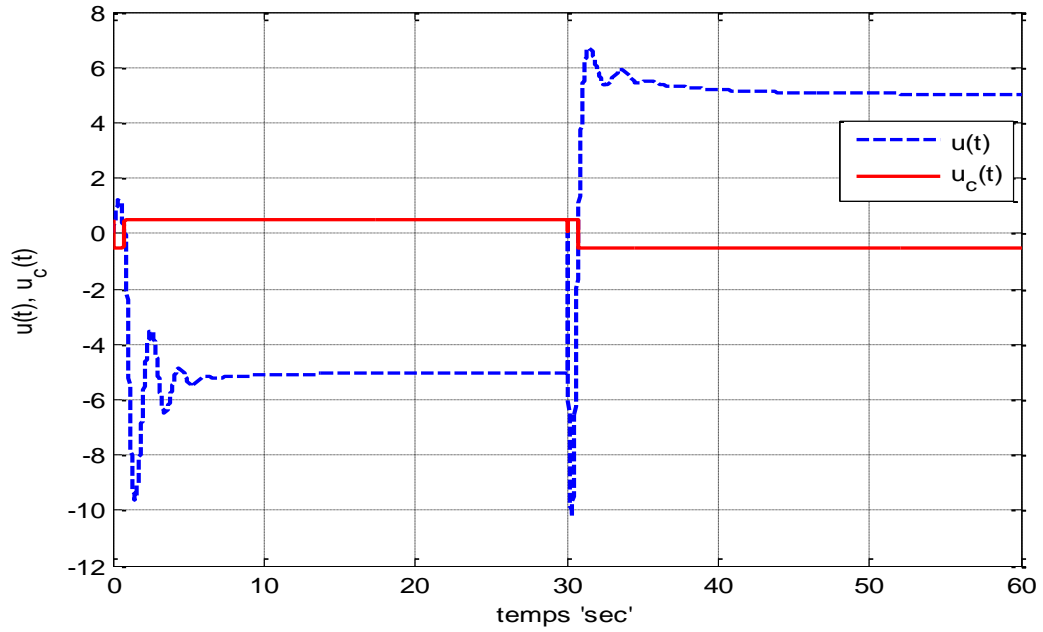


Fig. 5.15 Signal de commande FOTMRAC et signal de correction d'objectif du contrôle

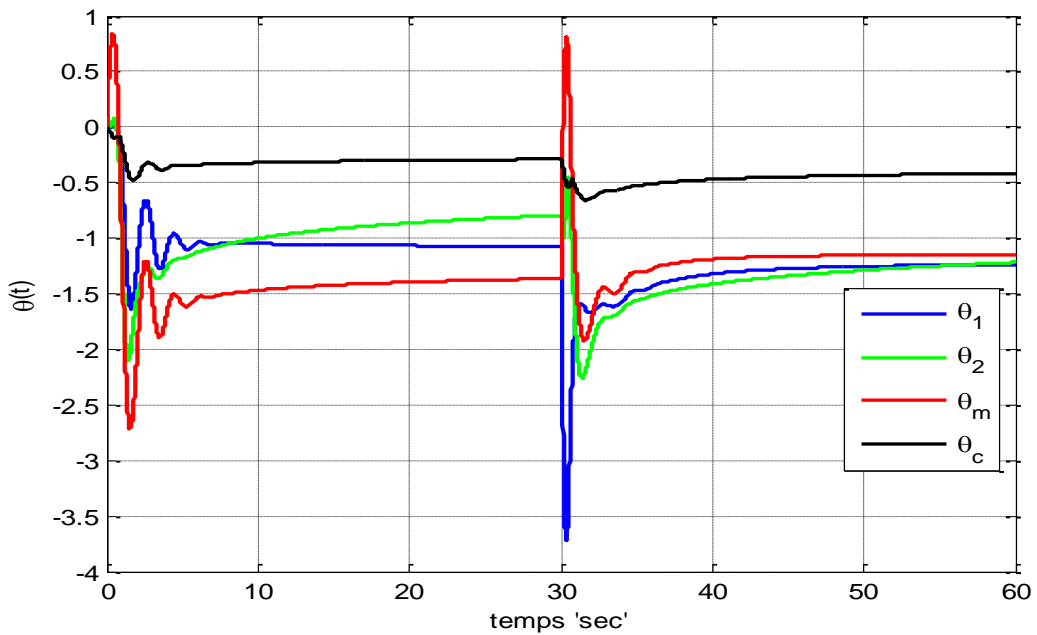
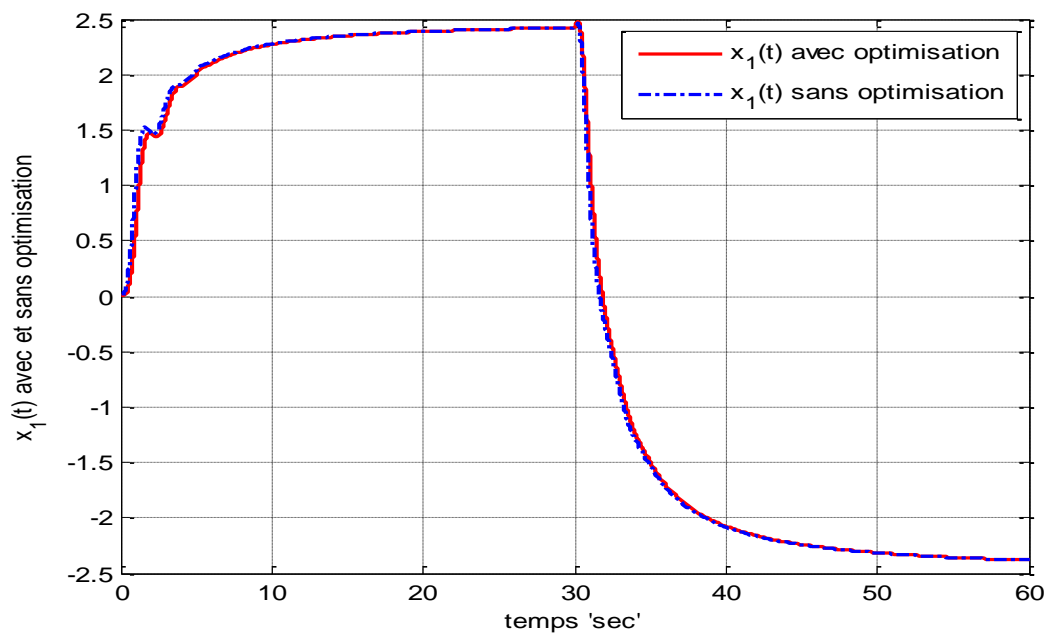
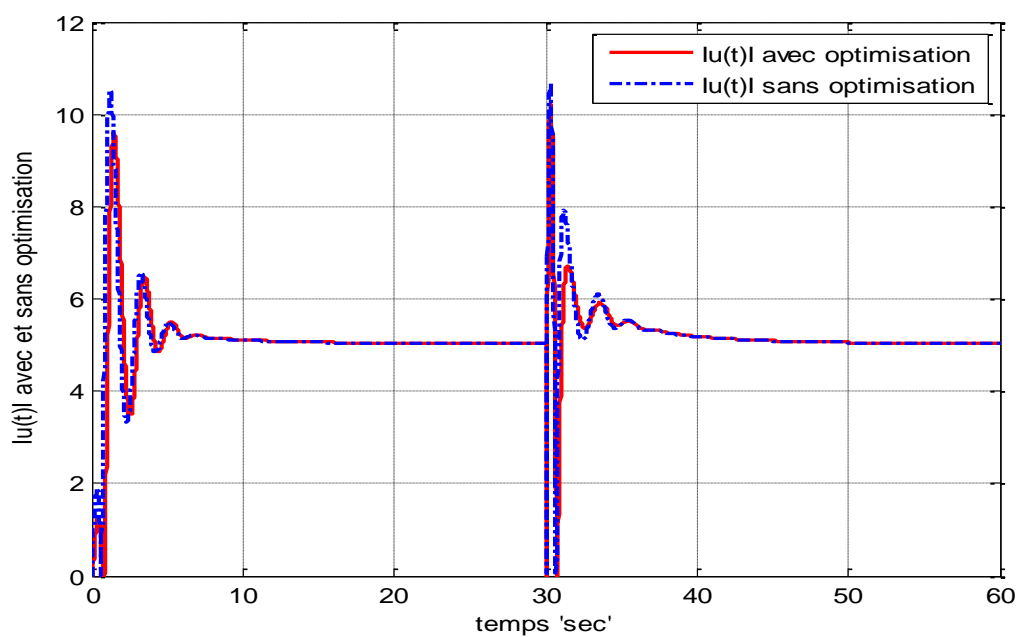


Fig. 5.16 Vecteurs de gains adaptatifs



**Fig. 5.17** Sortie du système en cas de commande d'ordre fractionnaire avec et sans optimisation



**Fig. 5.18** Valeurs absolues des signaux de commande d'ordre fractionnaire avec et sans optimisation

À partir de la figure 5.18, il est clair que le coût de commande avec la stratégie FOTMRAC est plus faible comparé à une commande FOMRAC (sans optimisation). On doit noter que le gain en coût de commande comparé au schéma classique (FOMRAC), est réalisé pendant le régime transitoire, parce qu'en régime permanent, les deux sorties issues des deux stratégies de contrôle (FOTMRAC ou FOMRAC) convergent vers la même valeur.

À partir de l'instant 0 [sec] jusqu'à 10 [sec], le gain en coût de commande est égal à 5.75%. Notons que ce gain peut être augmenté en élargissant l'intervalle  $[u_c^-, u_c^+]$ . Par exemple, si on prend l'intervalle  $[u_c^-, u_c^+]$  égale à  $[-1.5, +1.5]$  au lieu de  $[-0.5, 0.5]$ , ce gain passera à 13.98%.

Aussi pour évaluer le critère  $J$ , nous présentons une évaluation comparative de la fonction coût du contrôle dans le tableau 5.2 pour les deux cas de commande (avec et sans optimisation).

**Tableau 5.2** : Evaluation comparative de la fonction coût de commande

	<b>Stratégie FOTMRAC</b> (avec optimisation)	<b>Stratégie FOMRAC</b> (sans optimisation)
$J = \sum u^2(k)$	162190	165500

Au regard des résultats de simulation obtenus, on peut dire que la stratégie de commande FOTMRAC donne de meilleurs performances de commande, tant que tous les signaux de la boucle fermée sont bornés, la réponse du système suit la trajectoire de référence comprise dans le tube de performances avec un minimum d'effort de contrôle nécessaire.

### 5.3 Commande FOTMRAC pour une classe de systèmes d'ordre fractionnaire entrée-sortie

Dans cette section, nous présentons une autre approche pour la conception de commande adaptative par modèle de référence d'ordre fractionnaire avec tube de performance (FOTMRAC), dédiée à la commande d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire définie par une fonction de transfert dont les paramètres sont inconnus, les seuls signaux disponibles sont l'entrée et la sortie du système. Notre principale contribution est la généralisation de la commande adaptative par modèle de référence avec tube de performance (TMRAC) aux cas des systèmes d'ordre fractionnaire.

Nous considérons la classe de systèmes représentée par la fonction de transfert d'ordre fractionnaire commensurable (4.2) et dont le degré relatif est  $\gamma$ .

$$G(s) = k_p \frac{s^{(n-1)\gamma} + b_{n-2}s^{(n-2)\gamma} + \dots + b_1s^\gamma + b_0}{s^{n\gamma} + a_{n-1}s^{(n-1)\gamma} + a_{n-2}s^{(n-2)\gamma} + \dots + a_1s^\gamma + a_0}$$

On considère le modèle de référence décrit par :

$$y_m = W(s)u_r$$

où  $W(s)$  représente la fonction de transfert d'ordre fractionnaire commensurable donnée par l'équation (4.3).

$$W(s) = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)} = k_m \cdot \frac{s^{(q-1)\gamma} + \beta_{q-2}s^{(q-2)\gamma} + \dots + \beta_0}{s^{q\gamma} + \alpha_{q-1}s^{(q-1)\gamma} + \dots + \alpha_0}$$

$u_r(t) \in \mathfrak{R}$  est le signal d'entrée du modèle de référence défini par (5.3) et  $u_c(t) \in \mathfrak{R}$  est le signal de correction du contrôle donné par (5.4).

$$u_r(t) = r(t) + u_c(t)$$

$$u_c(t) \in [u_c^- \quad u_c^+]$$

En faisant varier ce dernier dans les limites spécifiées, nous concevons un ensemble de trajectoires de référence admissibles constituant le tube de performances du modèle de référence.

La commande proposée  $u(t)$  est donnée par (5.8). Elle est la somme de deux signaux: un signal adaptatif  $u_a(t)$ , et un signal de correction d'objectif de commande  $u_c(t)$ .

Nous supposons que le système à commander et le modèle de référence satisfont aux hypothèses 4.1 présentés au chapitre 4.

### 5.3.1 Résultat principal

Le but de notre travail est de concevoir un schéma FOTMRAC pour la classe de systèmes d'ordre fractionnaire représentée par (4.2), visant à atteindre deux objectifs: le premier est de permettre à la sortie du système de suivre asymptotiquement la trajectoire de référence comprise dans le tube de référence pour toutes valeurs de  $u_c \in [u_c^-, u_c^+]$ , tandis que le second objectif consiste à élaborer un mécanisme de mise à jour pour calculer le signal de correction de commande  $u_c \in [u_c^-, u_c^+]$  visant à minimiser le critère de coût de commande défini par (5.5). Ces deux objectifs sont atteints séparément et la solution de la première étape est nécessaire pour la solution de la seconde.

#### *Théorème 5.2*

Considérons la classe des systèmes d'ordre fractionnaire décrite par (4.2), et soit le modèle de référence choisi donné par (4.3), avec l'entrée de référence (5.3) et le signal de correction d'objectif du control satisfaisant (5.4). Sous les hypothèses 4.1, alors la loi de contrôle définie par (5.8) et (5.37) avec les lois d'adaptation des gains suivantes (5.38) et (5.17)

$$u_a(t) = \Theta^T \Phi \quad (5.37)$$

$$D^\nu \Theta = -\Gamma \text{sign}(\rho^*) e_1 \Phi \quad (5.38)$$

$$u_c^{opt}(t) = \begin{cases} -u_a(t) & \text{si } u_a \in [u_c^-, u_c^+], \\ \text{argmin}(J(u_c^-), J(u_c^+)) & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$e_1 = y - y_m$ ,  $\rho^* = \frac{k_p}{k_m}$ ,  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  est une matrice de gain et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta = [\theta_1^T \quad \theta_2^T \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_c]^T, \theta_1, \theta_2 \in R^{n-1}, \theta_3, \theta_4, \theta_c \in R \\ \Phi = [u_f(t) \quad y_f(t) \quad y(t) \quad r(t) \quad u_c(t)] \\ u_f(t) = \gamma_{(n-2)\gamma} \Lambda^{-1}(s)[u](t) \\ y_f(t) = \gamma_{(n-2)\gamma} \Lambda^{-1}(s)[y](t) \\ \gamma_{(n-2)\gamma} = [1 \quad s^\gamma \quad \dots \quad s^{(n-3)\gamma} \quad s^{(n-2)\gamma}]^T \\ \Lambda(s) = N_m(s) \cdot \Lambda_0(s) \\ \quad = \lambda_0 + \lambda_1 s^\gamma + \dots + \lambda_{n-2} s^{(n-2)\gamma} + s^{(n-1)\gamma}, \Lambda(s) \text{ est Hurwitz} \end{array} \right. \quad (5.39)$$

garantit que les signaux en boucle fermée sont bornés, l'erreur de suivi passe à zéro de manière asymptotique et minimise le critère de coût (5.5).

### Preuve du théorème 5.2

Le premier objectif est de déterminer le signal de commande  $u_a(t)$  tel que  $y(t)$  suit asymptotiquement la sortie du modèle de référence d'ordre fractionnaire souhaité pour tout  $u_c \in [u_c^-, u_c^+]$ .

Tout d'abord, on suppose que le système à commander est représenté dans l'espace d'état par :

$$\begin{cases} D^\gamma x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.40)$$

Sur la base de la commande FOMRAC développée dans le chapitre 4, la loi de contrôle peut être définie par :

$$\begin{cases} D^\gamma u_f(t) = Fu_f(t) + gu(t), \quad u_f(0) = 0 \\ D^\gamma y_f(t) = Fy_f(t) + gy(t), \quad y_f(0) = 0 \\ u(t) = \theta^{*T} \omega(t) \end{cases} \quad (5.41)$$

avec

$$\omega(t) = [u_f(t) \quad y_f(t) \quad y \quad u_r], \theta^{*T} = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^*, c_0^*], c_0^* = \frac{k_m}{k_p} \quad (5.42)$$

où  $(F, g)$  est la réalisation de l'état de  $\gamma_{(n-2)\gamma}(s) \cdot \Lambda^{-1}(s)$ , et donc:  $(s^\gamma I - F)^{-1}g = \gamma_{(n-2)\gamma}(s) \cdot \Lambda^{-1}(s)$ .

La représentation dans l'espace d'états du système à commander et du contrôleur est :

$$\begin{cases} D^\nu Y_c(t) = A_0 Y_c(t) + B_c u(t), & Y_c(0) = Y_{c0} \\ y(t) = C_c^T Y_c(t) \\ u(t) = \theta^{*T} \omega(t) \end{cases} \quad (5.43)$$

où

$$Y_c(t) = [x^T, u_f^T, y_f^T], A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ gC^T & 0 & F \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} B \\ g \end{bmatrix}, C_c^T = [C^T \quad 0 \quad 0] \quad (5.44)$$

On additionne et on soustrait  $B_c \theta^{*T} \omega(t)$ , on obtient:

$$D^\nu Y_c(t) = A_0 Y_c(t) + B_c \theta^{*T} \omega(t) + B_c (u(t) - \theta^{*T} \omega(t)) \quad (5.45)$$

En remplaçant  $u(t)$  par  $u_a(t) + u_c(t)$ , on obtient la représentation:

$$\begin{cases} D^\nu Y_c(t) = A_c Y_c(t) + B_c c_0^* u_r(t) + \\ B_c (u_a(t) + u_c(t) - \theta^{*T} \omega(t)), & Y_c(0) = Y_{c0} \\ y(t) = C_c^T Y_c(t) \end{cases} \quad (5.46)$$

avec

$$A_c = \begin{bmatrix} A + B\theta_3^{*T}C^T & B\theta_1^{*T} & B\theta_2^{*T} \\ g\theta_3^{*T}C^T & F + g\theta_1^{*T} & g\theta_2^{*T} \\ gC^T & 0 & F \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

En mettant :  $\theta_c^* = (c_0^* - 1)$ ,  $\Theta^* = [\theta^{*T}, \theta_c^{*T}]^T$ ,  $\Phi = [u_f(t) \quad y_f(t) \quad y \quad r \quad u_c]^T$ ,

on obtient

$$\begin{cases} D^\nu Y_c(t) = A_c Y_c(t) + B_c c_0^* u_r(t) + B_c (u_a(t) - \Theta^{*T} \Phi), & Y_c(0) = Y_{c0} \\ y(t) = C_c^T Y_c(t) \end{cases} \quad (5.48)$$

Quand  $u_a(t) = \Theta^{*T} \Phi$ , nous aurons :

$$\begin{cases} D^\nu Y_c(t) = A_c Y_c(t) + B_c c_0^* u_r(t), & Y_c(0) = Y_{c0} \\ y(t) = C_c^T Y_c(t) \end{cases} \quad (5.49)$$

Le vecteur de paramètre du contrôleur  $\Theta^*$  est à choisir de sorte que la fonction de transfert de  $u_r$  vers  $y$  soit égale à  $W(s)$ , cela implique que:

$$C_c^T (s^\gamma I - A_c)^{-1} B_c c_0^* = W(s) \quad (5.50)$$

Et ainsi, le modèle de référence peut être réalisé par les matrices d'état  $(A_c, B_c c_0^*, C_c^T)$

$$\begin{cases} D^\gamma Y_m(t) = A_c Y_m(t) + B_c c_0^* u_r(t), & Y_m(0) = Y_{m0} \\ y_m(t) = C_c^T Y_m(t) \end{cases} \quad (5.51)$$

Soit  $e = Y_c - Y_m$  et  $e_1 = y - y_m$ , on obtient l'équation d'erreur suivante:

$$\begin{cases} D^\gamma e(t) = A_c e(t) + B_c (u_a(t) - \Theta^{*T} \Phi), & e(0) = e_0 \\ e_1(t) = C_c^T e(t) \end{cases} \quad (5.52)$$

et nous aurons

$$e_1(t) = W(s) \rho^* (u_a(t) - \Theta^{*T} \Phi) \quad (5.53)$$

où  $\rho^* = \frac{1}{c_0^*}$

Les paramètres du système étant inconnus,  $\Theta$  qui est l'estimation de  $\Theta^*$  doit être générée par une loi adaptative appropriée.

En remplaçant la loi de contrôle (5.37) dans (5.53), nous obtenons :

$$\begin{cases} D^\gamma e = A_c e + \bar{B}_c \rho^* \tilde{\Theta}^T \Phi, & e(0) = e_0 \\ e_1 = C_c^T e \end{cases} \quad (5.54)$$

Où

$$\bar{B}_c = B_c c_0^*, \tilde{\Theta} \triangleq \Theta(t) - \Theta^* \quad (5.55)$$

$$e_1 = W(s) \rho^* \tilde{\Theta}^T \Phi \quad (5.56)$$

Nous proposons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\tilde{\Theta}, e) = \frac{e^T P_c e}{2} + \frac{\tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}}{2} |\rho^*| \quad (5.57)$$

où  $\Gamma = \Gamma^{-1} > 0$  et  $P_c = P_c^T > 0$  satisfont les équations algébriques:

$$\begin{cases} P_c A_c + A_c^T P_c = -q q^T - v_c L_c \\ P_c \bar{B}_c = C_c \end{cases} \quad (5.58)$$

Où  $q$  est un vecteur,  $L_c = L_c^T > 0$ , et  $v_c > 0$  est une petite constante, déduite par le lemme MKY, car la fonction de transfert du modèle de référence est choisie pour être strictement réelle positive lorsque  $\gamma = 1$  (d'après les hypothèses 4.1), et ainsi (5.58) est satisfaite.

La dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\gamma V$  de  $V$  est donnée par:

$$D^\gamma V = D^\gamma \left( \frac{e^T P_c e}{2} \right) + D^\gamma \left( \frac{\tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}}{2} |\rho^*| \right) \quad (5.59)$$

En suivant la même démarche de démonstration que celle utilisée dans le chapitre précédent, nous obtenons :

$$D^\gamma \left( \frac{e^T P_c e}{2} \right) \leq -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e + e^T P_c \bar{B}_c \rho^* \tilde{\Theta}^T \Phi \quad (5.60)$$

$$D^\gamma \left( \frac{\tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}}{2} |\rho^*| \right) \leq \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} D^\gamma \tilde{\Theta} |\rho^*| \quad (5.61)$$

Donc :

$$D^\gamma V \leq -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e + e^T P_c \bar{B}_c \rho^* \tilde{\Theta}^T \Phi + \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} D^\gamma \tilde{\Theta} |\rho^*| \quad (5.62)$$

Puisque

$$e^T P_c \bar{B}_c = e_1, \rho^* = |\rho^*| \text{sgn}(\rho^*) \quad (5.63)$$

En choisissant

$$D^\gamma \tilde{\Theta} = D^\gamma \Theta = -\Gamma \text{sgn}(\rho^*) e_1 \Phi \quad (5.64)$$

Nous assurons que :

$$D^\gamma V \leq -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e \quad (5.65)$$

Ainsi, nous concluons la stabilité asymptotique pour tout choix de  $u_c(t) \in [u_{cmin} \quad u_{cmax}]$ , la sortie du système peut suivre la sortie de référence asymptotiquement, et donc le premier objectif du contrôle est atteint.

Pour atteindre le deuxième objectif du contrôle, nous devons concevoir un mécanisme de mise à jour du signal de correction d'objectif  $u_c(t) \in [u_c^- \quad u_c^+]$  minimisant le coût énergétique du contrôle évalué par le critère d'optimisation (5.5).

Nous obtenons de (5.5),  $J(u_c) = (u_a(t) + u_c(t))^2$ , ainsi, pour tout  $\Theta^T(t), \Phi(t)$  bornées le critère d'optimisation conduit à la solution (5.17) suivante:

$$u_c^{opt}(t) = \begin{cases} -u_a(t), & \text{si } u_a(t) \in [u_c^- \quad u_c^+] \\ \arg \min(J(u_c^-, \quad u_c^+)), & \text{si } u_a(t) \notin [u_c^- \quad u_c^+] \end{cases}$$

### 5.3.2 Exemple de simulation

Afin d'évaluer les performances de la stratégie FOTMRAC proposée pour la classe de systèmes d'ordre fractionnaire entrée/sortie considérée, un exemple de simulation est présenté ci-dessous.

Considérons le système instable défini par :

$$y = \frac{s^\gamma + 3}{s^{2\gamma} + 3s^\gamma - 10} u \quad (5.66)$$

Choisissons le modèle de référence défini par :

$$y_m = \frac{4}{s^\gamma + 4} u_r \quad (5.67)$$

avec  $\gamma = 0.6, u_r(t) = r(t) + u_c(t)$ ,

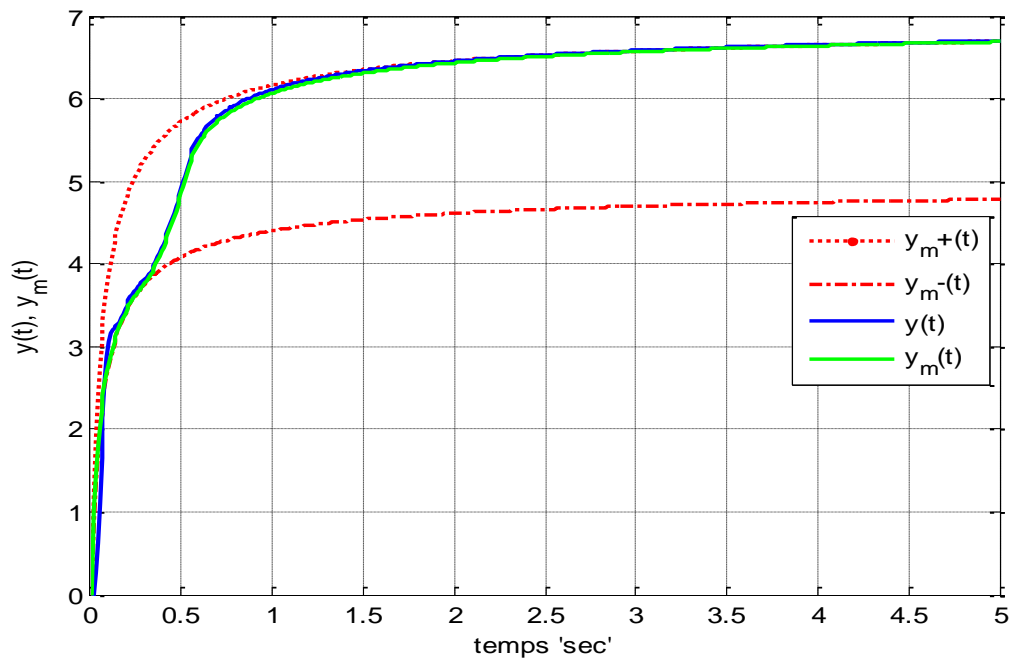
Pour la simulation, nous prenons deux cas pour la valeur d'entrée du modèle  $r(t)$ , d'abord elle est prise égale à +6, et dans le second cas, nous la prenons égale à -6. On prend le signal  $u_c(t) \in [-1 \quad +1]$ . En choisissant les paramètres du modèle de référence, nous décrivons le comportement souhaité que doit suivre le système contrôlé, et lorsque nous choisissons la plage de variation de  $u_c(t)$ , nous déterminons la plage permise pour les trajectoires de référence.

Pour illustrer l'efficacité et surtout la capacité à minimiser le coût de contrôle de la stratégie FOTMRAC proposée, une comparaison est faite entre cette dernière et la stratégie

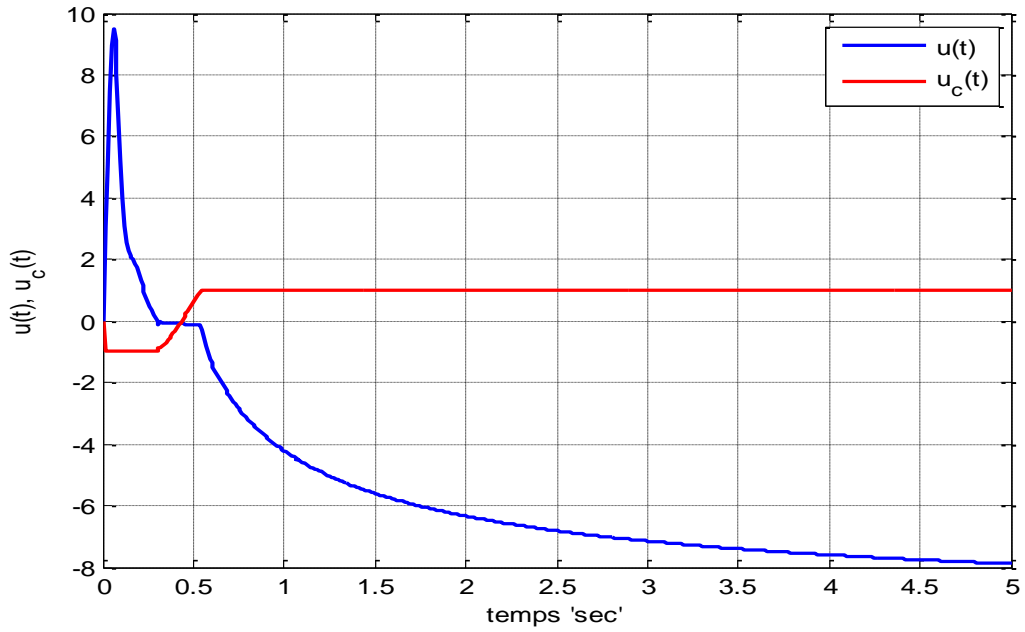
FOMRAC présenté au chapitre 4 (sans optimisation), pour cela il a fallu ajuster la valeur de l'entrée du modèle de référence telle que les deux trajectoires atteignent la même valeur en régime permanent.

Premièrement, on prend  $r(t) = +6$ , la figure 5.19 illustre les réponses du modèle de référence  $y_m^+(t)$  et  $y_m^-(t)$  (en ligne rouge) pour les entrées  $r(t) + u_c^+$ , et  $r(t) + u_c^-$  respectivement, la sortie du système contrôlé (ligne bleue) et la trajectoire du modèle de référence (ligne verte). Le signal de commande FOTMRAC et le signal de correction d'objectif sont exposés sur la figure 5.20, tandis que les vecteurs de gain adaptatifs sont représentés sur la figure 5.21.

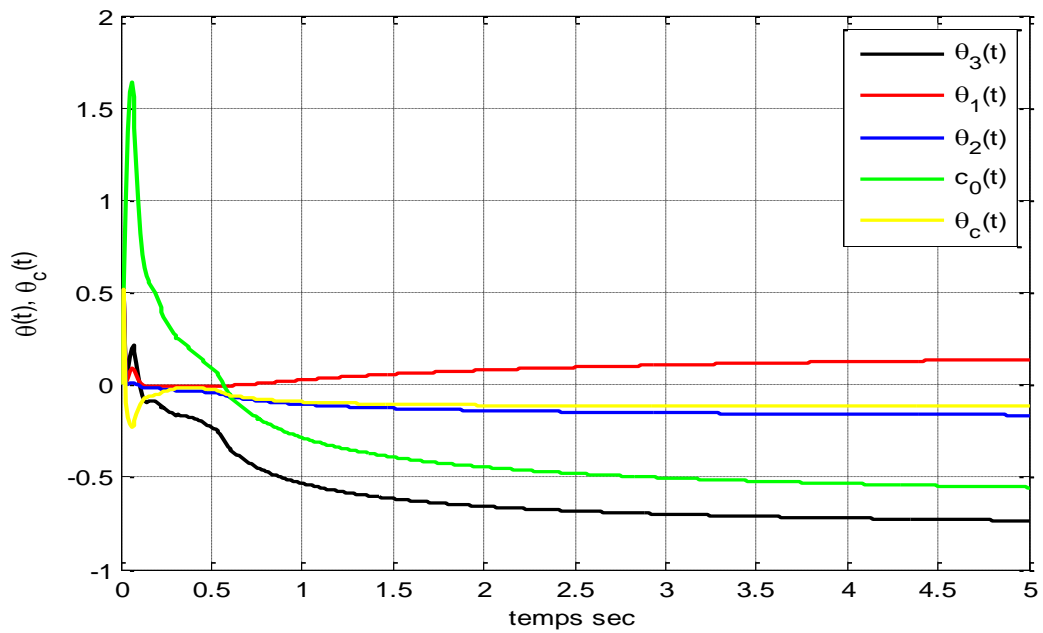
Les sorties du système obtenues respectivement avec la commande FOTMARC et la commande FOMRAC sont exposées sur la figure 5.22, tandis que les valeurs absolues des signaux de commande sont illustrées sur la figure 5.23.



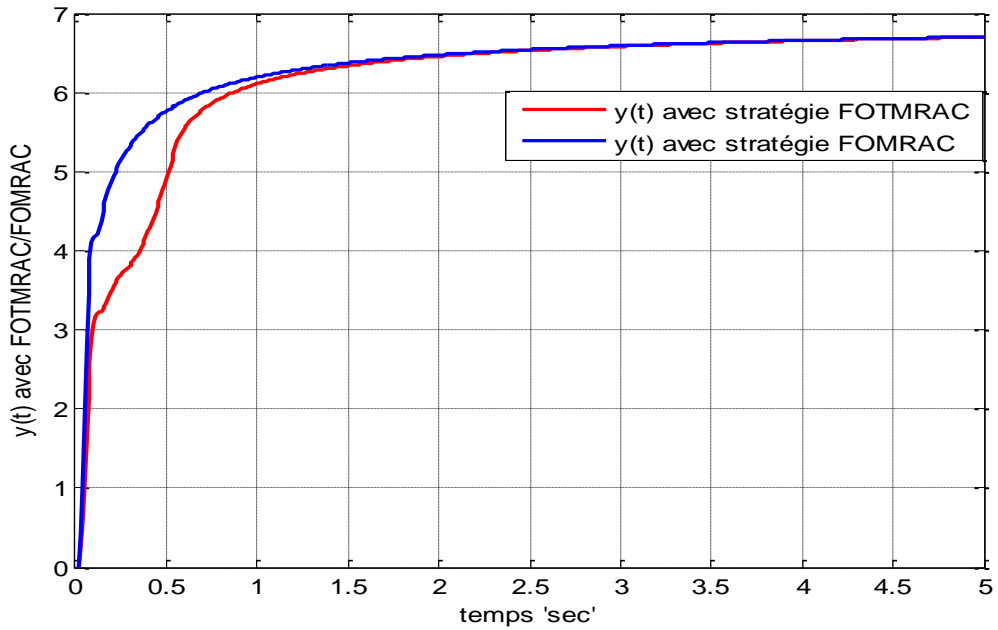
**Fig. 5.19** Sortie commandée (bleu), trajectoire de référence (vert) et tube de performance (rouge)



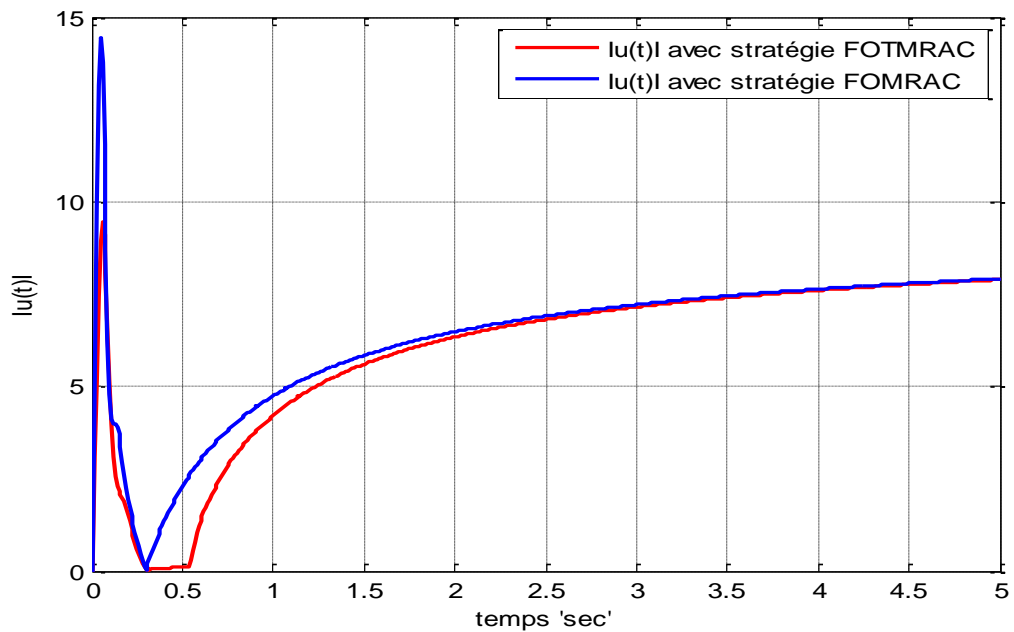
**Fig. 5.20** Signal de commande FOTMRAC (bleu) et signal de correction d'objectif (rouge)



**Fig. 5.21** Vecteurs de gain adaptatifs



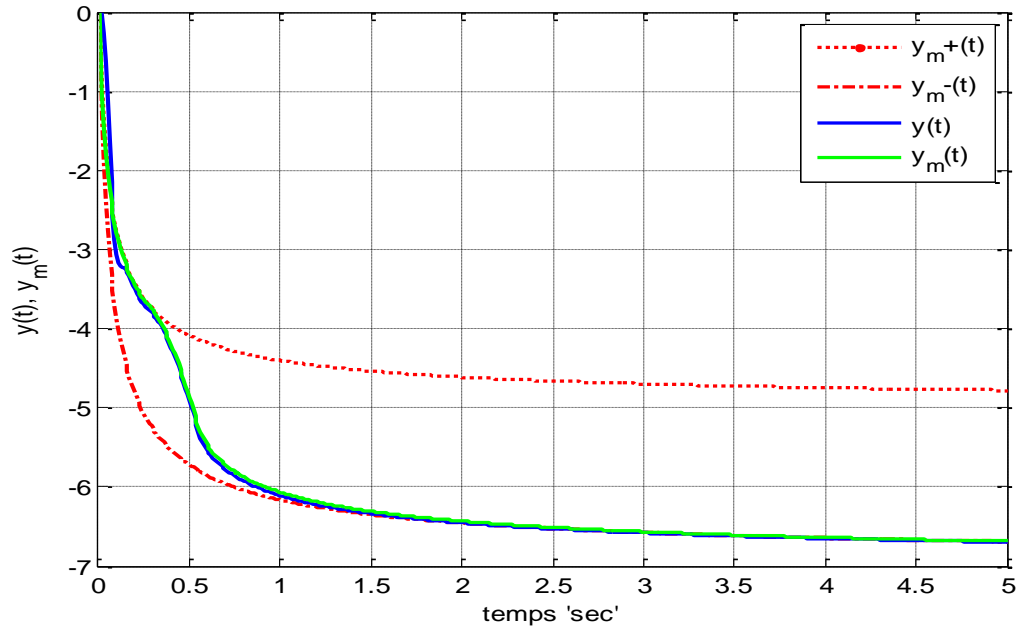
**Fig. 5.22** Sorties du système contrôlé en cas de commande FOTMRAC (rouge) et en cas de commande FOMRAC (bleu)



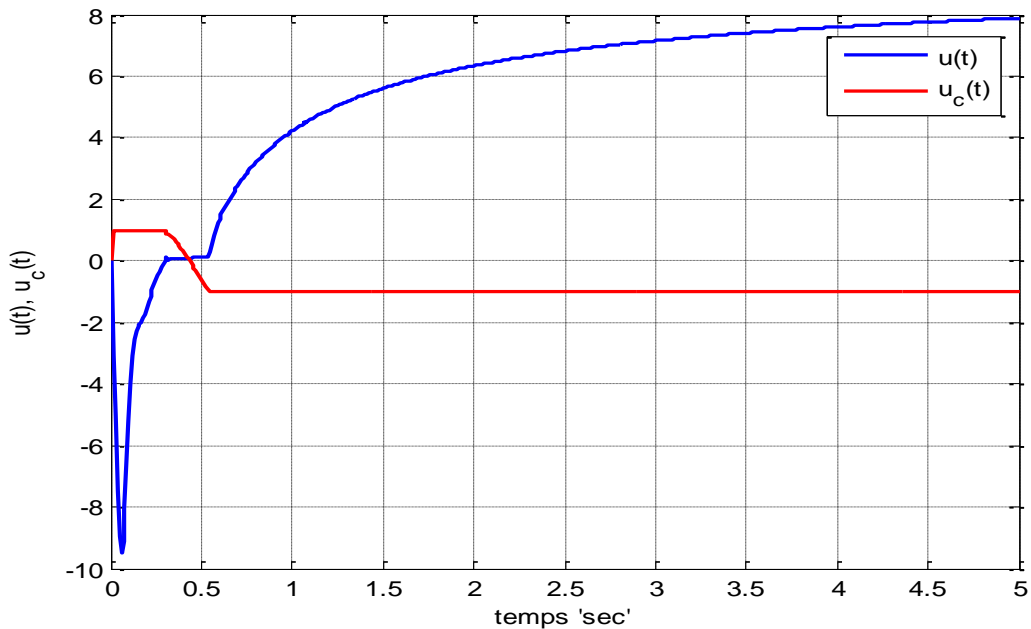
**Fig. 5.23** Valeurs absolues des signaux de commande d'ordre fractionnaire avec et sans optimisation

En prenant  $r(t) = -6$ , nous obtenons les résultats illustrés sur les figures 5.24 à 5.28, illustrant respectivement, la sortie du système contrôlé et la trajectoire de référence dans le tube de performance (figure 5.24), le signal de commande FOTMRAC le signal de correction d'objectif de commande (figure 5.25), les vecteurs de gains adaptatifs (figure 5.26), la sortie

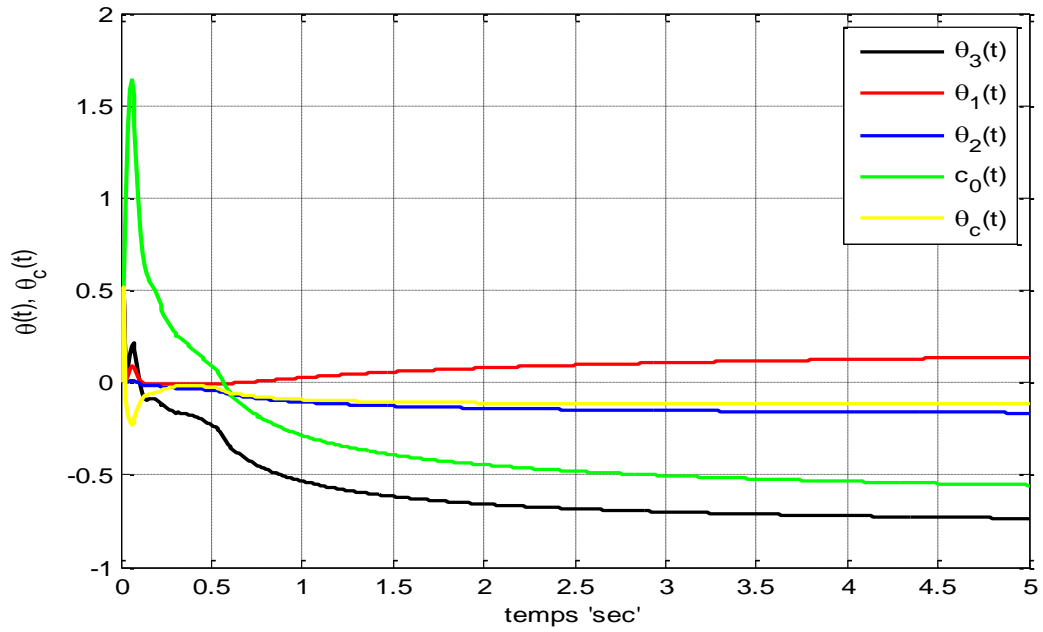
du système issue des stratégies FOTMRAC et FOMRAC (figure 5.27), et leurs signaux de commande en valeur absolue des pour les deux stratégies (figure 5.28).



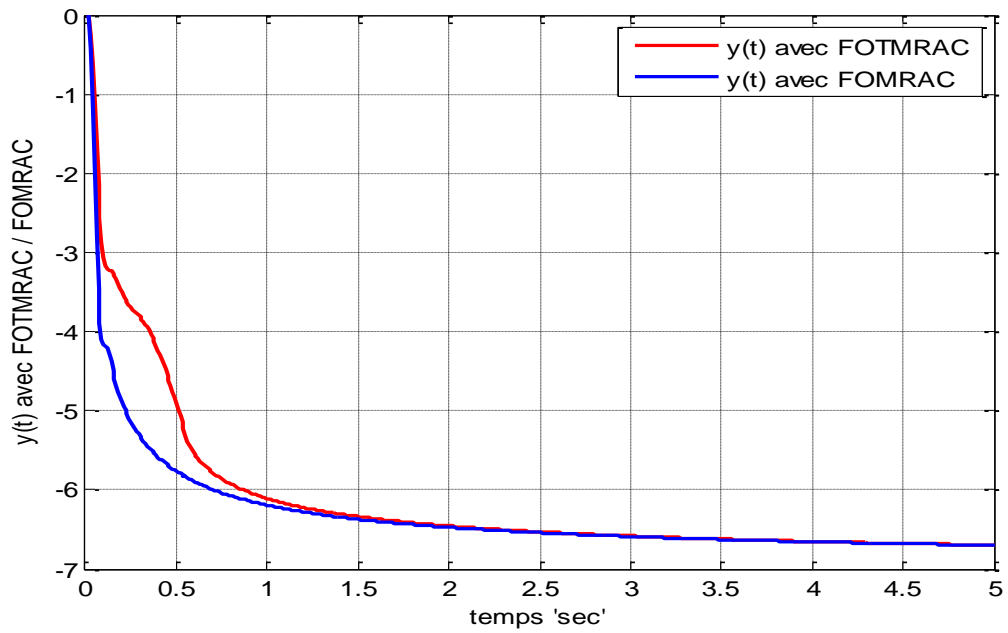
**Fig. 5.24** Sortie commandée (bleu), trajectoire de référence (vert) et tube de performance (rouge) pour  $r(t) = -6$



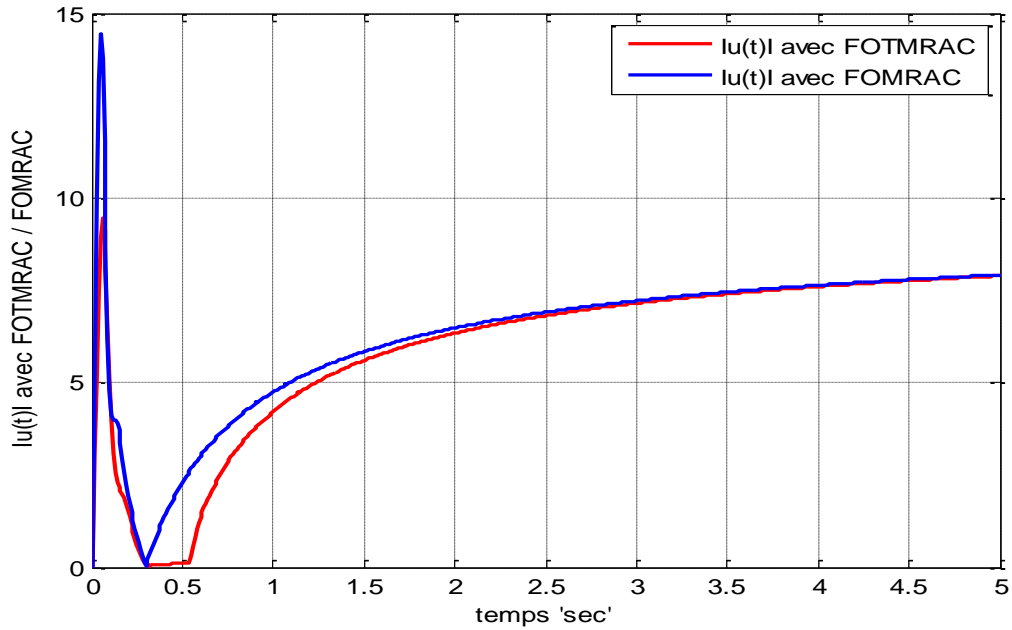
**Fig. 5.25** Signal de commande FOTMRAC (bleu) et signal de correction d'objectif (rouge) pour  $r(t) = -6$



**Fig. 5.26** Vecteurs de gain adaptatifs pour  $r(t) = -6$



**Fig. 5.27** Sorties du système contrôlé en cas de commande FOTMRAC (rouge) et en cas de commande FOMRAC (bleu) pour  $r(t) = -6$



**Fig. 5.28** Valeurs absolues des signaux de commande d’ordre fractionnaire avec et sans optimisation pour  $r(t) = -6$

Dans le tableau 5.3, nous évaluons le critère quadratique  $J$  donné par l’équation (5.5) pour les stratégies FOTMRAC et FOMRAC et ce pour  $r(t) = +6$  et  $r(t) = -6$ .

**Tableau 5.3** Évaluation comparative des critères de coût de commande

	Stratégie FOTMRAC	Stratégie FOMRAC
$J = \sum u^2(k)$	20131	21576

À partir de ces résultats, il est clair que la sortie du système suit parfaitement la trajectoire du modèle de référence dans le tube de performance, le signal de commande de correction d’objectif est mis à jour à chaque instant et varie dans la plage permise afin de minimiser l’effort de commande, et par conséquent, la trajectoire de référence est également mise à jour tout en restant à l’intérieur du tube de performance.

À partir des figures 5.22-5.23 et 5.27-5.28, il est évident que la stratégie FOTMRAC proposée donne de meilleures performances de contrôle, car avec la stratégie FOTMRAC proposée, nous réduisons efficacement le coût de contrôle, et nous obtenons ainsi la même valeur en régime permanent avec un coût de contrôle minimum. Ceci est également déduit

du tableau 5.3, où on voit que le coût de contrôle avec la commande FOTMRAC est de 6,7% plus faible qu'avec une commande FOMRAC. On note aussi que ce gain en coût de contrôle peut encore être amélioré si l'on élargit la plage  $[u_c^- \quad u_c^+]$ , par exemple, choisir cette intervalle égale à  $[-2 \quad 2]$  au lieu de  $[-1 \quad 1]$  permettra une réduction de 13,2% de l'effort de contrôle.

## 5.4 Conclusion

En utilisant le concept d'adaptation des objectifs en ligne employé dans la commande TMRAC pour les systèmes d'ordre entier, nous avons développé deux schémas de commande adaptative par modèle de référence d'ordre fractionnaire avec tube de performance (FOTMRAC) en vue de contrôler des systèmes d'ordre fractionnaire. L'idée générale était de généraliser la technique du tube de performances à la classe des systèmes d'ordre arbitraire. En effet, il était question de remplacer le modèle de référence d'ordre fractionnaire générant une seule et unique trajectoire dans le concept FOMRAC par un modèle de référence d'ordre fractionnaire avec tube de performance. Dans ces schémas de commande FOTMRAC développés, les performances sont adaptées en ligne afin de satisfaire une nouvelle spécification en plus de conserver les propriétés habituelles de stabilité et de robustesse. Pour ce faire, un problème d'optimisation est formulé dans le cadre FOMRAC, pour trouver un terme de correction de contrôle à chaque instant du temps.

Le premier schéma FOTMRAC développé est basé sur un retour d'état adaptatif, tandis que le deuxième schéma est basé sur un retour de sortie et dédié au contrôle d'une classe de systèmes linéaire d'ordre fractionnaire représenté par une fonction de transfert commensurable dont les paramètres sont inconnus. L'analyse de la stabilité des schémas de contrôle développés a été effectuée en utilisant la version étendue du théorème de Lyapunov aux cas des systèmes d'ordre fractionnaire, cette analyse confirme que les deux schémas de commande développés garantissent la stabilité en boucle fermée, le suivi asymptotique de la trajectoire de référence comprise dans le tube de performances, et permet également la minimisation de l'effort de commande.

Trois exemples numériques de simulation ont été présentés pour illustrer l'efficacité des stratégies proposées, les résultats obtenus montrent des performances souhaitées à savoir :

- La stabilité asymptotique est garantie malgré le fait que les paramètres du système sont inconnus.
- La sortie du système suit asymptotiquement la trajectoire de référence se trouvant dans le tube de référence.
- Le coût de l'énergie de commande est minimisé.

## Conclusion générale et Perspectives

De nos jours, l'utilisation du calcul fractionnaire dans l'ingénierie de commande gagne de plus en plus de popularité, tant dans la modélisation que dans la synthèse des régulateurs.

Ce travail porte essentiellement sur la commande adaptative et robuste d'ordre fractionnaire des processus industriels. Dans le premier chapitre, nous avons présenté des notions de base sur les opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire nécessaires pour la compréhension et le développement de notre travail. Le deuxième chapitre était dédié à la commande adaptative, où nous avons présenté ses différentes approches, nous nous sommes surtout intéressé à l'approche directe par modèle de référence qui fera par la suite, l'objet d'une généralisation au cas des systèmes d'ordre fractionnaire.

Dans le troisième chapitre, nous avons pu montrer à travers un exemple d'application industrielle, que le régulateur d'ordre fractionnaire peut surpasser le meilleur régulateur d'ordre entier. Effectivement, l'utilisation des concepts des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire permet d'améliorer considérablement les performances des systèmes de commande adaptative par modèle de référence, et surtout d'obtenir une meilleure robustesse vis à vis des variations paramétriques, bruit.

Le quatrième et le cinquième chapitre représentent les majeures contributions de notre travail, nous nous sommes intéressé à la synthèse des schémas de commande adaptative pour des systèmes décrits par des modèles d'ordre fractionnaire, dont la représentation de beaucoup de systèmes réels s'est avéré meilleure et plus précise. En effet, en se basant sur la généralisation des schémas de commande MRAC directs classiques pour des systèmes d'ordre entier, de nouveaux schémas de commande ont été développés dans ce but.

Le premier schéma FOMRAC développé est inspiré des travaux de [IOA96] pour la synthèse de commande adaptative des systèmes d'ordre entier. Ce schéma basé sur un retour de sortie, a été généralisé et adapté pour commander une classe de systèmes d'ordre fractionnaire décrite par une fonction de transfert commensurable, à paramètres inconnus, et dont le degré relatif égale l'ordre de base fractionnaire. Nous définissons également une loi d'adaptation de commande assurant la stabilité du système en boucle fermée et le bon suivi

de la trajectoire de référence. Deux exemples numériques ont été présentés en simulation, et les résultats obtenus confirment l'efficacité du schéma de commande développé, même en présence de bruits de mesure et variations paramétrique du processus.

Nous nous sommes également inspiré des travaux de synthèse de la commande adaptative par modèle de référence avec tube de performance (TMRAC : Tube Model Reference Adaptive Control) développé dans [MIR13], en vue d'introduire des schémas de commande adaptative dédiés à la commande des systèmes d'ordre fractionnaire. Effectivement, en introduisant le concept d'adaptation en ligne de la fonction objective de la commande, nous avons développé deux nouveaux schémas de commande adaptative par modèle de référence d'ordre fractionnaire avec tube de performance (FOTMRAC : Fractional Order Tube Model Reference Adaptive Control) avec leurs lois d'adaptation de commande, capables de garantir la stabilité en boucle fermée, le suivi asymptotique de la trajectoire de référence, et la minimisation du coût de commande.

Le premier schéma FOTMRAC développé, basé sur un retour d'état, est consacré au contrôle d'une classe de système linéaire d'ordre fractionnaire représenté dans l'espace d'état où toutes les variables d'état sont mesurables. Tandis que le deuxième schéma FOTMRAC est basé sur un retour de sortie, et dédié au contrôle d'une classe de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire définie par une fonction de transfert commensurable dont les paramètres sont inconnus et dont le degré relatif égale l'ordre fractionnaire de base.

Deux exemples numériques de simulation sont exposés afin d'illustrer l'efficacité des schémas de commande FOTMRAC proposés. Les résultats obtenus confirment l'efficacité des stratégies de commande proposées, et illustrent les performances avantageuses qu'offrent ces commandes comparées à la commande FOMRAC.

## **Perspectives de Recherche**

Quant aux perspectives de recherche, nous pensons qu'il serait intéressant d'étendre les schémas de commande développés dans cette thèse, et les adapter afin de pouvoir les appliquer sur des classes de systèmes d'ordre fractionnaire plus générales notamment : non linéaires, MIMO, et à retard.

D'autres types de tubes de performances peuvent être imaginés aussi, notamment sur les signaux de commande ou sur des fonctions objectives à optimiser.

Utiliser l'ordre fractionnaire comme un degré de liberté supplémentaire afin de garantir des performances désirées.

Enfin, l'application de ces schémas de commande FOTMARC, sur des bancs d'essais pratiques ou en industrie restent un objectif principal de nos travaux de recherche.

## Bibliographie

- [AGA53] Agarwal R.P., (1953), A propos d'une note de m. pierre humbert. C.R. Séances Acad. Sci., 236 (21): 2031-2032.
- [ALA94] Al-Alaoui M.A., (1994), Novel IIR differentiator from the Simpson Integration rule, IEEE Trans. on Circuits and Systems I. Fundamental Theory and Applications, 41(2): 186–187.
- [AOU04] Aoun M., Malti R., Levron F., Oustaloup A, (2004), Numerical simulations of fractional systems: an overview of existing methods and improvements, Nonlinear Dynamics, 38: 117–131.
- [AST71] Aström K. J., Eykhoff P., (1971), System identification -a survey, Automatica, 7: 123-162.
- [AST73] Aström K. J., Wittenmark B., (1973), On self tuning regulators, Automatica, 9(2): 185-199.
- [AST80] Aström K. J., Wittenmark B., (1980), Self-tuning controllers based on pole-zero placement, IEE Proc., 127(3): 120-130.
- [AST82] Aström K. J., Z. Zhao-ying, (1982), A linear quadratic Gaussian self-tuner, Proc. Workshop on Adaptive Control, Ricerche di Automatica, Florence, Italy, pp. 106-122.
- [AST83] Aström K. J., (1983), Theory and Applications of Adaptive Control -a Survey, Automatica, 19(5): 471-486.
- [AST95] Aström K. J., Wittenmark B., (1995), Adaptive control, Addison-Wesley.
- [BAL20] Balaska H., Ladaci S., Djouambi A., (2020), Direct fractional order MRAC adaptive control design for a class of fractional order commensurate linear systems, Journal of Control and Decision, 8(3): 363-371.

- [BAL20A] Balaska H., Ladaci S., Djouambi A., Schulte H., Bourouba B., (2020), Fractional order tube model reference adaptive control for a class of fractional order linear systems, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 30(3): 501–515.
- [BAL19] Balaska H., Ladaci S., Schulte H., Djouambi A., (2019), Adaptive cruise control system for an electric vehicle using a fractional order model reference adaptive strategy, *IFAC-PapersOnLine*, 52(13): 194–199.
- [BAL18] Balaska H., Ladaci S., Zennir Y., (2018), Conical tank level supervision using a fractional order model reference adaptive control strategy, *Proceedings of the 15th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2018)*, Porto, Portugal, pp. 214-221.
- [BAG83] Bagley R., (1983), Fractional calculus – A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, *AIAA Journal*, 21(5): 741–748.
- [BEL57] Bellman R., (1957), *Dynamic Programming*. Princeton University Press.
- [BEL61] Bellman R., (1961), *Adaptive Processes--A Guided Tour*. Princeton University Press.
- [BET08] Bettayeb M., Djennoune S., (2008), New results on the controllability and observability of fractional dynamical systems, *Journal of Vibration and Control*, 14 (9–10): 1531–1541.
- [BET17] Bettayeb M., Mansouri R., Al-Saggaf U., Mehedi I., (2017), Smith predictor based fractional-order-filter PID controllers design for long time delay systems, *Asian Journal of Control*, 19(2): 1–12.
- [BOR74] Borisson U., Wittenmark B., (1974), An industrial application of a self-tuning regulator, *4th IFAC/IFIP International Conference on Digital Computer Applications to Process Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 76-87.
- [BOU19] Bourouba B., Schulte H., Ladaci S., (2019), A novel MRAC-based fractional adaptive control design for a class of fractional order linear systems, *8th international conference on systems and control*, Marrakesh, Morocco, pp. 303–308.

- [CAP69] Caputo M., (1969), *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna [en italien].
- [CAO20] Cao Y., (2020), Chaotic synchronization based on fractional order calculus financial system, *Chaos, Solitons and Fractals*, Elsevier, 130, 109410.
- [CHA13] Charef A., Assabaa M., Ladaci S., Loiseau J., (2013), Fractional order adaptive controller for stabilized systems via high-gain feedback, *IET Control Theory and Applications* 7(6): 822–828.
- [CHA92] Charef A., Sun H.H., Tsao Y.Y., Onaral B., (1992), Fractal system as represented by singularity function, *IEEE Trans. On Automatic Control*, 37:1465-1470.
- [CHA06] Charef A., (2006), Modelling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation, *Nonlinear Dynamics*, 46:195-210.
- [CHE16] Chen Y., Cheng S., Wei Y., Wang Y., (2016), Indirect model reference adaptive control for a class of linear fractional order systems, *American Control Conference (ACC)*, Boston, MA, USA, pp. 2753- 2758.
- [CHE02] Chen Y.Q., Kevin L., Moore L., (2002), Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators, *IEEE Trans. On Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 49(3): 363-367.
- [CHE07] Chen J., Liu F., Anh V., (2008), Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 388(2): 1364-1377.
- [CHE09] Chen Y., Petráš I., Xue D., (2009), Fractional Order Control – A Tutorial, presented at the 2009 American Control Conference, St. Louis, MO, USA, pp. 1397-1411.
- [CHI15] Chittillapilly R., Hepsiba, D., (2015), Tube model reference adaptive control for a cylindrical tank system, *Proceedings of the International Conference on Innovations in Information, Embedded and Communication Systems (ICIIECS)*, India, Coimbatore.

- [DJO08] Djouambi A., Charef A., Voda B., (2008), Fractional order robust control based on Bode's ideal transfer function, *RSJESA, Fractional order systems*, 42: 999–1014.
- [DUA15] Duarte-Mermoud M. A., Aguila-Cmacho N., Gallegos J. A., Castro-Linares R., (2015), Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1-3): 650-659.
- [ELS03] El-sayed A., Gaafar F., (2003), Fractional calculus and some intermediate physical processes, *Applied Mathematics and Computation*, 144: 117-126.
- [ERD55] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G., (1955), Higher transcendental functions, volume 3. Mc Graw-Hill, New York.
- [FEL60] Feldbaum A. A., (1960), Dual control theory I-II, *Automation and Remote Control*, 21(9): 874-880, 21(11):1033-1039.
- [FEL61] Feldbaum A. A., (1961), Dual control theory III-IV, *Automation and Remote Control*, 22: 1-12, 109- 121
- [FEL65] Feldbaum A. A., (1965), *Optimal Control Systems*. Academic Press, New York.
- [FER13] Fernandes L.S.L., Moraes Filho F.C., Paulo J.B.A., Oliveira J.A., (2013), Gain scheduling adaptive control applied to a particular mixer-settler equipment, *Control Engineering Practice*, 21(8): 1121-1127.
- [GEM36] Gemant A., (1936), A method of analyzing experimental results obtained from elastiviscous bodies, *Physics* 7: 311–317.
- [GEM38] Gemant A., (1938), On fractional differentials, *Philosophical Magazine*, 25(7): 540–549.
- [GNO10] Gnoth S., Kuprijanov A., Simutis R., Lübbert A., (2010), Simple adaptive pH control in bioreactors using gain-scheduling methods, *Applied Microbiology and Biotechnology*, 85: 955–964.

- [GER48] Gerasimov A., (1948), A generalization of linear laws of deformation and its applications to problems of internal friction, *Prikl. Matem. i Mekh. (PMM)*, 12 (3): 251–260.
- [GUT10] Gutiérrez R. E., Rosário J. M., Machado J. T., (2010), Fractional Order Calculus: Basic Concepts and Engineering Applications, *Mathematical Problems in Engineering*, ID: 375858.
- [GYO18] György K., Dávid L., (2018), Comparison between model reference discrete time indirect and direct adaptive controls, *Procedia Manufacturing*, 22: 444-454.
- [HIL00] Hilfer R., (2000), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific Publishing Company.
- [IOA87] Ioannou P., Tao G., (1987), Frequency domain conditions for strictly positive real functions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(1): 53-54.
- [IOA96] Ioannou P., Sun J., (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [JAU16] Jauregui C., Duarte-Mermoud M., Orostica R., Travieso-Torres J., Beytia O., (2016). Conical tank level control using fractional order pid controllers: a simulated and experimental study, *Control Theory Tech*, 14(4) :369.384.
- [KRA14] Krajewski W., Viaro U., (2014), A method for the integer-order approximation of fractional-order systems, *Journal of the Franklin Institute* 351(1): 555–564.
- [LAD12A] Ladaci S., (2012), Postoperative blood pressure control using a fractional order adaptive regulator, 13th international conference on sciences and techniques of automatic control & computer engineering, STA'2012, Monastir, Tunisia, pp. 254-265.
- [LAD16] Ladaci S., Bensafia Y., (2016), Indirect fractional order pole assignment based adaptive control. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 19(1): 518-530.

- [LAD03] Ladaci S., Charef A., (2003), MIT adaptive rule with fractional integration, CESA 2003IMACS Multiconference Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France.
- [LAD06] Ladaci S., Charef A., (2006), On fractional adaptive control, *Nonlinear Dynamics* 43(4): 365–378.
- [LAD12] Ladaci S., Charef A., (2012), Fractional adaptive control: A survey. In *Classification and Application of Fractals: New Research* Edited by: E.W. Mitchell and S.R. Murray., NOVA Publishers, USA, pp. 261-275.
- [LAD09] Ladaci S., Charef A., and Loiseau J. J., (2009), Robust Fractional Adaptive Control based on the Strictly Positive Realness Condition, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 19(1): 69-76.
- [LAD08] Ladaci S., Loiseau J-J., Charef A., (2008), Fractional Order Adaptive High-Gain Controllers for Class of Linear Systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 13(4): 707-714.
- [LAD06A] Ladaci S., Loiseau J., Charef A., (2006), Using fractional order filter in adaptive control of noisy plants, *Proceedings of the International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics, ICAMEM 2006, Hammamet, Tunisia*.
- [LAN79] Landau I.D., (1979), *Adaptive Control: The model reference Approach*, Marcel Dekker, New York.
- [LAN11] Landau I.D., Lozano R., M'Saad M., Karimi A., (2011), *Adaptive Control*, 2<sup>nd</sup> Edition: Algorithms, Analysis and Applications, Springer.
- [LI10] Li Y., Chen Y., Podlubny I., (2010), Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability, *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5):1810-1821.
- [LI12] Li Y., Chen Y.Q., (2012), A fractional order universal high gain adaptive stabilizer, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(4): 1250081(1-13).

- [LIN15] Lino P., Maione G., Saponaro F., (2015), Fractional-order modeling of high-pressure fluid-dynamic flows: An automotive application, *IFAC-PapersOnLine*, 48(1): 382–387.
- [MA09] Ma J., Yao Y., Liu, D., (2009), Fractional order model reference adaptive control for hydraulic driven flight motion simulator, 41st Southeastern Symposium on System Theory (SSST 2009), Tullahoma, TN, USA, pp. 340-343.
- [MAI96] Mainardi F., (1996), The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation, *Applied Mathematics Letters*, 9 (6): 23–28.
- [MAI10] Mainardi F., (2010), *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*, Imperial College Press.
- [MAN10] Mansouri R., Bettayeb M., Djennoune S., (2010), Multivariable fractional system approximation with initial conditions using integral state space representation, *Computers and Mathematics with Applications*, 59: 1842–1851.
- [MAT03] Mathieu B., Melchior P., Oustaloup A., Ceyral C., (2003), Fractional differentiation for edge detection, *Signal Processing*, 83: 2421-2432.
- [MAT96] Matignon D., d'Andréa-Novel B., (1996), Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems, *IEEE-CESA'96, SMC IMACS Multiconference*. Lille, France, pp. 952–956.
- [MAT97] Matignon, D., d'Andréa-Novel B., (1997), Observer-based controllers for fractional differential systems, 36th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, San Diego, USA, pp. 4967–4972.
- [MAT98] Matignon D., (1998), Stability properties for generalized fractional differential systems, *ESAIM: Proc.*, 5: 145-158.
- [MCR73] McRuer D., Ashkenas I., Graham D., (1973), *Aircraft Dynamics and Automatic Control*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [MEY65] Meyer K. R., (1965), On the Existence of Lyapunov Functions for the Problem on Lur'e, *SIAM Journal of Control*, 3: 373-383.

- [MIL93] Miller K. S., Ross B., (1993), An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, New York, USA: John Wiley and Sons.
- [MIR11] Mirkin B., Gutman P.-O., Sjoberg J., (2011), Output-feedback MRAC with reference model tolerance of nonlinearly perturbed delayed plants, 18th IFAC World Congress, Milan, Italy, pp. 6751–6756.
- [MIR12] Mirkin B., Gutman P.-O., Shtessel Y., (2012), Coordinated decentralized sliding mode MRAC with control cost optimization for a class of nonlinear systems, Journal of the Franklin Institute, 349(4): 1364–1379.
- [MIR13] Mirkin B., Gutman P.-O., (2013), Tube model reference adaptive control, Automatica, 49(4): 1012–1018.
- [MON11] Mondal D., Biswas K., (2011), Performance study of fractional order integrator using single-component fractional order element, IET Circuits Devices & Systems 5(4): 334–342.
- [MOV16] Movahhed A., Shandiz H., Sani, S., (2016), Comparison of fractional order modelling and integer order modelling of fractional order buck converter in continuous condition mode operation, Advances in Electrical and Electronic Engineering : Power Engineering and Electrical Engineering, 14(5): 531–542.
- [NAR79] Narendra K. S., Valavani L. S., (1979), Direct and Indirect Model Reference Adaptive Control, Automatica, 15(6): 653-664.
- [NAS18] Nasser Eddine A. N., Huard B., Gabano, J.-D., Poinot T., Thomas A., Martemianov S., (2018), Time domain diffusion parameters identification of electrochemical impedance models using fractional order system, IFAC PapersOnLine, 51(15): 377-382.
- [OLD74] Oldham K.B., Spanier J., (1974), Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Academic Press, New York.
- [OUS91] Oustaloup A., (1991), La Commande CRONE : Commande Robuste d'Ordre Non Entier, Hermes.

- [OUS95] Oustaloup A., (1995), La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications, Hermès, Paris.
- [PET09] Petráš I., (2009), Stability of fractional-order systems with rational orders: A survey, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 12(3): 269-298.
- [POD94] Podlubny I., (1994), The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order, *Inst. Exp. Phys., Slovak Acad. Sci., Kosice*, no. UEF-02-94.
- [POD99] Podlubny I., (1999), *Fractional differential equations*. Academic Press.
- [POD99A] Podlubny I., (1999), Fractional order systems and  $PI^\lambda D^\mu$  controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1) :208.214.
- [ROS75] Ross B., (1975), *Fractional Calculus and its applications*, volume 457 of *Lecture Notes in Mathematics [Proc. Int. Conf. Held at Univ. Of New Haven]*, USA, Springer-Verlag, Berlin.
- [SAM87] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., (1987), *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach.
- [SCH89] Schneider W., Wyss W., (1989), Fractional diffusion and wave equations, *Journal of Mathematical Physics*, 30 (1), 134.
- [SCO44] Scott-Blair G.W., (1944), Analytical and integrative aspects of the stress-strain-time problem, *J. Scientific Instruments*, 21: 80–84.
- [SCO47] Scott-Blair G.W., (1947), The role of psychophysics in rheology, *J. Colloid Sci.*, 2: 21-32.
- [SCO49] Scott-Blair G.W., (1949), *Survey of General and Applied Rheology*, Pitman, London.
- [SHI14] Shi B., Yuan J., Dong C., (2014), On fractional model reference adaptive control, *The Scientific World Journal*, 2014, ID: 521625.

- [SUN18] Sun H.G., Zhang Y., Baleanu D., Chen W., Chen Y.Q., (2018), A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 64: 213–231.
- [STI79] Stiassnie M., (1979), On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models, *Applied Mathematical Modelling*, 3(4): 300-302.
- [TAB71] Tabak D., (1971), Digitalization of control systems, *Computer-Aided Design* 3(2): 13–18.
- [TRI99] Trigeassou J.-C., Poinot T., Lin J., Oustaloup A. et Levron F., (1999), Modeling and identification of a non-integer order system, 1999 European Control Conference, IEEE, Karlsruhe, Germany, pp. 2453-2458.
- [UCA19] Ucar E., Ozdemir N., Altun E., (2019), Fractional order model of immune cells influenced by cancer cells. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 14(3), 308.
- [VIN00] Vinagre B. M., Podlubny I., Hernandez A., Feliu V., (2000), Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 3(3): 231–248.
- [VIN02] Vinagre B., Petras I., Podlubny I., Chen Y., (2002), Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control, *Nonlinear Dynamics*, 29 :269-279.
- [WAR12] Warier S., Venkatesh S., (2012), Design of controllers based on MPC for a conical tank system, *International Conference On Advances in Engineering, Science and Management*, IEEE, Tamil Nadu, India, pp. 309-313.
- [WHI58] Whitaker H. P., Yamron J., Kezer A., (1958), Design of model-reference adaptive control systems for aircraft. Report R-164, Instrumentation Laboratory, MIT. Cambridge.
- [WOU77] Wouters W. R. E., (1977), Adaptive pole placement for linear stochastic systems with unknown parameters, *Preprints IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans.

[ZEN05] Zeng Q., Cao G., Zhu X., (2005), Research on controllability for a class of fractional-order linear control systems, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 16(2): 376–381.

## ملخص

يرتكز عملنا على التحكم التكمي والمتين من الدرجة الكسرية للأنظمة الصناعية. لقد أظهرنا من خلال التطبيق بالحاكاة لاستراتيجية التحكم التكمي من خلال نموذج مرجعي كسري ((FOMRAC على نظامين صناعيين, أن استخدام مفاهيم المعاملات و الأنظمة الكسرية بإمكانها أن تحسن بشكل كبير أداء أنظمة التحكم و خاصة الحصول على متانة أفضل فيما يتعلق بالتغيرات الوسائطية, الضوضاء و الاضطرابات.

الإسهام الرئيسي لهذا العمل هو اقتراح ثلاثة مخططات جديدة للتحكم التكمي ذات درجة كسرية, و هذا بالاعتماد على المخططات الكلاسيكية للتحكم التكمي من الدرجة الصحيحة. يعتمد المخطط الأول FOMRAC الذي تم اقتراحه على التغذية المرتدة للمخرج للتحكم في فئة من الأنظمة الكسرية المعرفة بدالة تحويل متناسبة, بمعاملات مجهولة, و درجة نسبية تساوي الدرجة الأساسية الكسرية. يضمن هذا المخطط, الاستقرار المقارب لنظام الحلقة المغلقة, و المتابعة الجيدة للمسار المرجعي. تعتمد مخططات التحكم الأخرى المقترحة على تعميم مفهوم التكيف على الخط لهدف التحكم, المستعمل في التحكم التكمي باستعمال نموذج مرجعي أنبوبي (التحكم التكمي عن طريق نموذج مرجعي أنبوبي : TMRAC) للأنظمة الكاملة, إلى حالة الأنظمة ذات الدرجة الكسرية. تضمن مخططات FOTMRAC المقترحة استقرار الحلقة المغلقة, و التتبع المقارب للمسارات المرجعية, فضلا على تقليل تكلفة التحكم. أوضحت أمثلة المحاكاة العددية فعالية مخططات التحكم ذات الدرجة الكسرية المقترحة في هذا العمل.

## الكلمات المفتاحية:

الأنظمة الخطية المتناسبة ذات الدرجة الكسرية, التحكم التكمي حسب النموذج المرجعي, التحكم التكمي ذو الدرجة الكسرية, التحسين, أنبوب الأداء, FOMRAC, FOTMRAC, استقرار Lyapunov.

## **Abstract**

Our work focuses on the adaptive and robust fractional order control of industrial processes. We have shown through the application by simulation of a fractional order reference model adaptive control (FOMRAC) strategy on two industrial processes, that the use of the concepts of operators and fractional order systems can considerably improve the performance of control systems, and especially to obtain better robustness with respect to parametric variations, noise, and disturbances.

The major contribution of this work is the proposal of three new fractional order adaptive control schemes dedicated to the control systems represented by fractional order models, based on classic integer order adaptive control schemes. The first developed FOMRAC scheme is based on an output feedback to control a class of fractional order systems described by a commensurate transfer function, with unknown parameters, and whose relative degree equals the fractional base order. This FOMRAC scheme ensures the asymptotic stability of the closed loop system and the good following of the reference trajectory. The two other introduced control schemes are based on the introduction and the generalization of the concept of online adaptation goal control used in the Tube Model Reference Adaptive Control (TMRAC) for integer systems, to the case of fractional order systems. The two FOTMRAC developed schemes guarantee the closed-loop stability, asymptotic tracking of the reference trajectories, as well as the minimization of the control cost. Numerical simulation examples have illustrate the effectiveness of the fractional order control schemes developed in our work.

## **Keywords**

Fractional order commensurate linear systems, model reference adaptive control, fractional order adaptive control, optimization, performance tube, FOMRAC, FOTMRAC, Lyapunov stability.

## Résumé

Notre travail porte sur la commande adaptative et robuste d'ordre fractionnaire des processus industriels. Nous avons montré à travers l'application en simulation d'une stratégie de commande adaptative par modèle de référence d'ordre fractionnaire (FOMRAC) sur deux processus industrielles, que l'utilisation des concepts des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire permet d'améliorer considérablement les performances des systèmes de commande, et surtout d'obtenir une meilleure robustesse vis à vis des variations paramétriques, bruit, et perturbations.

La contribution majeure de ce travail est la proposition de trois nouveaux schémas de commande adaptative d'ordre fractionnaire dédiés à la commande des systèmes représentés par des modèle d'ordre fractionnaire, et ce en s'inspirant des schémas de commande adaptative d'ordre entier classiques. Le premier schéma FOMRAC développé se base sur un retour de sortie pour commander une classe de systèmes d'ordre fractionnaire décrite par une fonction de transfert commensurable, à paramètres inconnus, et dont le degré relatif égale l'ordre de base fractionnaire. Ce schéma FOMRAC assure la stabilité asymptotique du système en boucle fermée et le bon suivi de la trajectoire de référence. Les deux autres schémas de commande introduits, se basent sur l'introduction et la généralisation du concept d'adaptation en ligne de l'objectif de commande utilisé dans la commande adaptative par modèle de référence avec tube de performance (TMRAC : Tube Model Reference Adaptive Control) des systèmes entiers, aux cas des systèmes d'ordre fractionnaire. Les deux schémas FOTMRAC développés garantissent la stabilité en boucle fermée, le suivi asymptotique des trajectoires de référence, ainsi que la minimisation du coût de commande. Des exemples numériques en simulation ont illustré l'efficacité des schémas de commande d'ordre fractionnaire développés dans notre travail.

### Mots clés

Systèmes linéaires commensurables d'ordre fractionnaire, commande adaptative par modèle de référence, commande adaptative d'ordre fractionnaire, optimisation, tube de performances, FOMRAC, FOTMRAC, stabilité au sens de Lyapunov.