REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI DE OUM EL BOUAGHI

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET LA VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

N° d'ordre : $\cdots$ N° Série : $\cdots$

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES EN MATHÉMATIQUES

Thème

Problèmes aux limites avec conditions mixtes classiques et non locales

Option :

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Par

BAHLOUL TAREK

Devant le jury :

Président :	Mr. Ayadi Abdelhamid	Prof	Univ d'Oum El Bouaghi
Rapporteur :	Mr. Bouzit Mohamed	M.C.A	E. S. C. F. de Constantine
Examinateur :	Mr. Ellaggoune Fateh	Prof	Univ 8 Mai 1945 de Guelma
Examinateur :	Mr. Merad Ahcene	M.C.A	Univ d'Oum El Bouaghi

Soutenu le : 28\06\2017

Remerciements

Au nom de Dieu le clément et le miséricordieux tout d'abord, je tiens à remercier infiniment **Mr.Bouzit Mohamed** pour le choix passionnant et motivant du présent thèse ainsi que pour son aide inestimable et les conseils précieux et utiles qu'il m'a apportés.

En outre, je resterai fort reconnaissant à **Mr. Ayadi Abdelhamid** qui m'a fait l'honneur de présider ce jury. Je remercie également **Mr. Merad Ahcene** et **Mr. Ellaggoune Fateh** et d'avoir bien voulu accepter d'être examinateurs. J'aimerai notamment remercier tous les collègue.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude aux deux êtres les plus chers dans ma vie. à savoir mes parents qui ont tout fait pour que je sois ce que je suis. Je remercie particulièrement mes parent dont le fait de penser à ils me redonne la confiance et me rassure. Je dédie également mes remerciements particuliers à ma chère femme N.Imen, pour ses conseils et son soutien.

Je remercie également tous les membres de ma famille mes sœurs et mes frères et tous ceux qui comptent pour moi. Je me permets aussi de saluer tous mes amis et les remercier pour leur soutien constant qui m'a permis de réaliser ce rêve. De plus, je ne veux pas oublier tous ceux et celles qui, tout au long de mon travail, m'ont soutenu moralement et je m'excuse de ne pas les nommer explicitement car la liste est longue. Enfin, je dédie cette thèse mémoire à tous mes professeurs et camarades.

Résumé

Dans ce travail, on étudie deux problèmes mixtes avec une condition non local pour équations aux dérivées partielles du type mixte.

Ces problèmes peuvent être rencontrés en théorie de la conduction thermique, semi-conducteurs, électrochimie, transmission de chaleur, élasticité, thermo-élasticité, physique de plasmas, mémoire des matériaux et dynamique de populations etc $\cdots$.

La méthode utilisée dans le $1^{ère}$ problème est la méthode des inégalités énergétiques qui est basée sur la recherche d'un opérateur $\mathcal{M}u$, dit multiplicateur, qui dépend de la fonction u, ses dérivées et d'une certaine fonction dite poids.

Pour le $2^{ème}$ problème, on examine la stabilité conditionnelle de la solution zéro d'un problème mixte.

La méthode utilisée est la méthode de l'énergie pour étudier la stabilité de la solution. Nous appliquons aussi la méthode de l'équilibre harmonique. Cette méthode fournit une technique générale pour le calcul des approximations des solutions périodiques des équations différentielles.

Pour le $1^{ère}$ cas l'existence de la solution forte découle de la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré. La preuve de l'unicité est basée sur une estimation a priori.

Mots Clés :

Équation parabolique de type mixte, conditions aux bords, condition intégrale avec poids, inégalités énergétique, espace de Sobolev, la méthode de l'équilibre harmonique, la méthode de l'énergie, la stabilité de la solution.

Abstract

In this work, we study a mixed problem with an integral condition for a differentials equations of mixed type.

These problems may be encountered in the theory of thermo conduction, semiconductors, electrochemistry, heat transfer, elasticity, thermo-elasticity, plasma physics, memory materials and population dynamics etc $\cdots$.

The used method in the 1^{st} is the energy equalities method which is based on the research of an operator $\mathcal{M}u$ known as multiplier. which usually depends on the function u, its derivatives and some weight function.

For the 2^{nd} problem we examines the conditional stability of the zero solution of a mixed problem .

The method used is the energy method to study the stability of the solution. We also apply the method of harmonic balance. This method provides a general technique to calculate approximations of periodic solutions of differential equations.

For the 1^{st} case, the existence of strong solution is obtained from the density of the operator range, generated by the considered problem. The proof of the uniqueness is based on an a priori estimate.

Key words :

Parabolic equation of mixed type, boundary conditions, integral condition with weight, energy inequalities, Sobolev spacet, the method of harmonic balance, the energy method, the stability of the solution.

ملخص

تهدف هذه الأطروحة إلى دراسة حالتين خاصتين من المسائل المختلطة العامة ذات شروط تكاملية، كلاسيكية وغير محلية.

يمكن مصادفة هذه المسائل في نظرية النقل الحراري و المرونة، أنصاف النواقل، الكهروكيمياء، المرونة و المرونة الحرارية، فيزياء البلازما، ذاكرة المعادن وديناميك المجموعات إلخ ...

نستعمل طريقة المتراجحات الطاقوية التي ترتكز أساسا على إيجاد مؤثر $\mathcal{M}u$ ، يدعى الضارب، يتعلق بالتابع u ، وبمشتقاته و بتابع معياري معين.

فيما يخص الحالة الثانية ندرس الاستقرار المشروط للحل صفر لمسألة غير خطية . الطريقة المستخدمة هي طريقة الطاقة لدراسة استقرار الحل . نطبق أيضا طريقة توازن متناسق هذه الطريقة توفر تقنية عامة لحساب تقريبية الحلول الدورية للمعادلات التفاضلية.

فيما يخص الحالة المدروسة الأولى، وجود الحل القوي ينتج عن كثافة $R(L)$ في F ، الأمر الذي يمكن إثباته بواسطة مؤثرات تسوية تختار حسب طبيعة المسألة المدروسة. أما برهان وحدانية الحل فيرتكز على متراجحة مسبقة.

الكلمات المفتاحية المسائل الحدية التكافؤية، الشروط التكاملية، طريقة التقديرات القبلية، طريقة توازن متناسق ، طريقة الطاقة ، استقرار الحل.

Table des matières

1 Définitions, notations et remarques importantes **10**
1.1 Notion d'opérateur monotone 10
1.2 Notion d'opérateur maximal monotone 13
1.3 Propriétés élémentaires des opérateurs maximaux monotones 18
1.4 Surjectivité des opérateurs maximaux monotones 20
1.5 Somme d'opérateurs maximaux monotones 21
1.6 Notions de la stabilité 23
1.7 Inégalités de base 27

2 Problème aux limites avec des conditions mixtes classiques et non local **28**
2.1 Position du problème 28
2.2 Estimation à priori bilatérale 29
2.3 Résolvabilité du problème 37

3 Stabilité conditionnelle de la solution zéro d'un problème mixte **41**
3.1 Position du problème 41
3.2 Méthode d'équilibre harmonique 44

chapitre 0

Introduction

La méthode des inégalités énergétiques, appelée aussi méthode de l'analyse fonctionnelle, a pour origine les travaux de I.G.Petrovsky [42] utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations de type hyperbolique. Elle a été appliquée et développée par la suite dans beaucoup de travaux à savoir A.A.Dezin [16], K.Friderichs [18], N.I.Yurchuk [47, 48]. La méthode a connu par la suite, des développements importants dus à J.Leray [30] et L.Garding [19].

La méthode des inégalités énergétiques s'est avérée un outil efficace dans l'étude des problèmes non classiques.

Elle a été également utilisée pour la résolution de différents problèmes dans les domaines de la théorie de la conduction thermique, la physique des plasmas l'électrochimie et autres. Dans lors de l'application de cette méthode, on trouve des difficultés, parmi lesquelles nous citons :

— Le choix de l'espace des solutions,
— Le choix du multiplicateur,
— Le choix des opérateurs de régularisation.

Les questions sont tellement variées et récentes, que l'élaboration d'une théorie générale est encore prématurée. Chaque problème nécessite une étude spéciale, d'où l'actualité du thème.

Le but de cette thèse est d'étudier deux problèmes mixtes avec conditions non classiques, appelées également conditions non-locales. Le présent travail est l'objet d'une extension de la méthode des inégalités énergétiques et aussi la méthode de l'énergie. La méthode des inégalités énergétiques a été appliquée sur des problèmes mixtes avec des conditions aux bords non locales de type intégrales dans les travaux de A.Bouziani, N.E.Benouar [8], A. Merad, A. Bouziani , S. Araci [37], A.L.Marhoune, F.Lakhal [31], C.V.Pao [41], D.Gordeziani, G.Avalishvili [24], D.Juntang [27], L.Bougoffa [4, 5], M.bouzit, N.Teyar [10], M.Denche, A.L.Marhoune [15], S.Mesloub, A.Bouziani, N.Kechkar [33], V.A.Gooling [23], Z.Cui, Z.Yang [14] et Z.Ye, X.Xu [46].

Les problèmes mixtes avec des conditions intégrales, prennent un intérêt de plus en plus important dont la raison fondamentale est la signification physique de base de la condition intégrale à savoir un moyenne, un flux, une énergie totale,un moment, etc. Ce sont des modèles rencontrés en théorie de la conduction thermique, en thermoélasticité et dans les semi-conducteurs.

Dans la présente thèse, nous donnons un développement important de la méthode des inégalités de l'énergie et aussi la méthode d'équilibrage harmonique à de nouvelles classes de problèmes non classiques. Elle comporte des résultats intéressants et originaux ayant faits l'objet de publications dans des revues internationales.

La thèse est composée d'une introduction et de trois chapitres. Le premier chapitre est un rappel d'analyse fonctionnelle et les autres constituent la contribution principale de la problématique étudiée.

Nous commençons par une introduction où nous présentons l'historique, l'intérêt du thème abordé et le rappel de certaines notions préliminaires utiles par la suite, à savoir les opérateurs de régularisation.

Au second chapitre, on poursuit d'abord l'étude d' un problème aux limites avec des conditions mixtes classiques et non locales. Nous écrivons le problème sous forme opérationnelle et nous décrivons le cadre fonctionnel en précisant les espaces fonctionnels dans lesquels l'étude est faite, ce qui permet d'établir un théorème d'homéomorphisme. La résolution du problème est basée sur une estimation a priori bilatérale et la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace d'arrivée.

Nous montrons l'unicité de la solution forte, d'une autre manières en se basant sur une $1^{\grave{e}re}$ estimation a priori. L'existence de la solution, est basée sur une deuxième inégalité de l'énergie et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par l'opérateur en question dans l'espace d'arrivée.

La méthode des inégalités énergétiques est basée donc sur la recherche d'un opérateur $\mathcal{M}u$, dit multiplicateur, qui dépend généralement de la condition non locale, la fonction u et ses dérivées et ses primitives et d'une certaine fonction poids.

La preuve de l'unicité est basée sur une $1^{\grave{e}re}$ estimation a priori, tandis que l'existence de la solution est basée sur une deuxième estimation a priori et sur le fait que l'image de l'opérateur engendré par le problème posé est dense dans l'espace d'arrivée. D'abord, on ramène le problème posé à une équation vectorielle. On a donc le schéma suivant

$$Lu = \mathcal{F}$$

où $L : \mathtt{E} \longrightarrow \mathtt{F}$ est l'opérateur engendré par le problème considéré, $\mathtt{E}$ est un espace de Banach, $\mathtt{F}$ est un espace de Hilbert convenablement choisi, $u \in \mathtt{E}$ et $\mathcal{F} \in \mathtt{F}$. On établi les deux estimations a priori bilatérales

$$\| u \|_{\mathtt{E}} \leq \alpha \| Lu \|_{\mathtt{F}}$$

$$\| Lu \|_{\mathtt{F}} \leq \beta(\alpha, T) \| u \|_{\mathtt{E}} \qquad , u \in D(u)$$

où α une constante indépendante de u.

L'opérateur L réalise donc un homéomorphisme linéaire de l'espace $\mathtt{E}$ sur l'image fermée $R(L)$ de L. Pour démontrer l'existence de la solution, il suffit de démontrer que $R(L)$ est dense dans $\mathtt{F}$.

Dans le troisième chapitre, nous examinons la stabilité conditionnelle de la solution zéro d'un problème mixte. Nous appliquons la méthode de l'énergie pour étudier la stabilité de la solution d' un problème aux limites avec condition initiale, et nous appliquons aussi la méthode d'équilibrage harmonique.

La méthode d'équilibrage harmonique a été étudiée par D.W.Jordan, P.Smith [28], E.R.Mickens [39], laquelle a fournit une technique générale pour le calcul des approximations des solutions périodiques des équations différentielles. Elle correspond à une série de Fourier tronquée et permet la détermination systématique des coefficients des différentes harmoniques et la fréquence angulaire.

Chapitre 1

Définitions, notations et remarques importantes

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats préliminaires utiles dans les chapitres ultérieures. Pour cela, on a commencé par donner les définitions de quelques espaces fonctionnels, puis un ensemble de notions fondamentales de l'analyse fonctionnelle et quelques résultats auxiliaires. Enfin, nous présentons les techniques utilisées dans cette étude et certaines estimations sur les solutions.

1.1 Notion d'opérateur monotone

La théorie des équations d'évolution non linéaires nous amène à étendre la notion d'opérateur.

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(,)$ et de norme $|\quad|$, $[,]$ désigne le couple élément de $H \times H$. $\langle , \rangle$ désignant le produit scalaire dans la dualité entre X et X'.

Un opérateur sera une application de H dans $\mathcal{P}(H)$, ensemble des parties de H. Le domaine de A est l'ensemble

$$D(A) = \{x \in H, Ax \neq \phi\},$$

et l'image de A est l'ensemble

$$R(A) = \cup_{x \in H} Ax.$$

Si pour tout $x \in H$, l'ensemble Ax contient au plus un élément on dira que A est univoque.

Soient A et B deux opérateurs de H, et soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors $\lambda A + \beta B$ est l'opérateur

$$x \in H \mapsto \lambda A + \beta B = \{\lambda u + \beta v, u \in Ax, v \in Bx\}.$$

avec

$$D(\lambda A + \beta B) = D(A) \cap D(B).$$

Nous identifierons A avec son graphe dans $H \times H$, *i.e* :

$$\{[x, y], y = Ax\}.$$

L'opérateur A^{-1} est l'opérateur dont le graphe est symétrique de celui de A, *i.e* :

$$y \in A^{-1}x \Leftrightarrow x \in Ay.$$

On a évidemment $D(A^{-1}) = R(A)$.

L'ensemble des opérateurs est ordonné par l'inclusion des des graphes :

$$A \subset B \Leftrightarrow pour \quad tout \quad x \in H, Ax \subset Bx.$$

Définition 1.1

Un opérateur A de H est dit monotone si

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geq 0,$$

Ou plus précisément

$$\forall y_1, y_2 \in D(A), (y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0,$$

Remarque 1.1

Certains auteurs disent que A est accrétif ou que $-A$ est dissipatif dans le cas ou A est un opérateur linéaire non-borné.

Exemple 1.1

Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'opérateur $\tilde{f} : x \in \mathbb{R} \mapsto [f(x^-), f(x^+)] \cap \mathbb{R}$ est monotone dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2

Soit A un opérateur monotone de H, les opérateurs suivants construits à partir de A sont monotones : $A^{-1}, \lambda A$ pour $\lambda \geq 0$.

Soit J une contraction de $D \subset H$ dans H, alors l'opérateur $I - J$ est monotone.

Si A et B sont monotones, alors $A + B$ est monotone.

Exemple 1.3

Soit $Q = (0,T) \times (0,1)$ et soit $\frac{\partial}{\partial t}$, où

$$D(A) = \{u \in L_2(Q); u(0,t) = 0\}$$

Alors A est un opérateur accrétif.

Démonstration :

Nous avons

$$\begin{aligned} \langle Au, u\rangle &= \int_Q \frac{\partial u}{\partial t}\overline{u}dxdt \\ &= \int_1^0 [u\overline{u}]_0^T\, dx - \int_Q u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt \end{aligned}$$

alors

$$\langle Au, u\rangle + \overline{\langle Au, u\rangle} = \int_1^0 |u(T,x)|^2 - \int_1^0 |u(0,x)|^2 dx$$

Donc

$$\begin{aligned} Re\langle Au, u\rangle &= \frac{1}{2}\int_1^0 |u(T,x)|^2 dx \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Remarque 1.2

La notion d'opérateur monotone dans un espace de Hilbert apparait comme cas particulier de celle d'opérateur monotone d'un espace vectoriel dans son dual (dans notre cas H est identifié à son dual) .

Soit X un espace vectoriel de dual topologique $X^{'}$. Une application A de X dans $\mathcal{P}(X^{'})$ est dite monotone si

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geq 0,$$

Ou plus précisément

$$\forall y_1, y_2 \in D(A), \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0,$$

La notion d'opérateur monotone dans un espace de Hilbert apparait aussi comme cas particulier de celle d'opérateur accrétif dans un espace de Banach telle qu'elle est définie par $T.Kato$. X étant un espace de Banach de norme $||\quad||$, on dit qu'une application A de X dans $\mathcal{P}(X)$ est accrétive si

$$\forall x_1, x_2 \in D(A) \quad et \quad \forall \lambda > 0, ||\, x_1 - x_2\, || \leq ||\, (x_1 - x_2) + \lambda(Ax_1 - Ax_2\, ||\, .$$

On a en effet la proposition suivante.

Proposition 1.1

Soit A un opérateur de H. A est monotone si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in D(A) \quad et \quad \forall \lambda > 0, \mid x_1 - x_2 \mid \leq \mid (x_1 - x_2) + \lambda(Ax_1 - Ax_2) \mid .$$

Ou plus précisément

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \forall \lambda > 0, \forall y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2, \mid x_1 - x_2 \mid \leq \mid (x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2) \mid .$$

En effet On a

$$\mid (x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2) \mid^2 = \mid x_1 - x_2 \mid^2 + 2\lambda(y_1 - y_2, x_1 - x_2) + \lambda^2 \mid y_1 - y_2 \mid^2 .$$

La condition est donc nécessaire, et elle est aussi suffisante, car on a

$$2\lambda(y_1 - y_2, x_1 - x_2) + \lambda^2 \mid y_1 - y_2 \mid^2 \geq 0.$$

On divise par λ et on obtient le résultat en faisant tendre λ vers 0.

La condition d'accrétivité exprime que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction de $R(I + \lambda A)$ dans H. Autrement dit, pour tout $y \in H$, l'équation

$$x + \lambda Ax \ni y$$

admet au plus une solution et si x_1, x_2 sont les solution correspondant à y_1, y_2 et on a

$$\mid x_1 - x_2 \mid \leq \mid y_1 - y_2 \mid .$$

Les opérateurs que nous allons considérer maintenant sont ceux pour lesquels l'équation

$$x + \lambda Ax \ni y$$

admet exactement une solution x pour tout $y \in H$ et tout $\lambda > 0$.

1.2 Notion d'opérateur maximal monotone

L'ensemble des opérateurs monotones de H est inductif pour l'inclusion des graphes, ce qui justifie la définition suivante :

Définition 1.2

Un opérateur de H est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones.

Remarque 1.3

Insistons sur le fait que A est maximal dans l'ensemble des graphes monotones. Un opérateur qui est seulement maximal dan l'ensemble des opérateurs univoques monotones n'est pas nécessairement maximal monotone au sens de la définition . Explicitons cette définition, A est maximal monotone si et seulement si A est monotone et pour tout

$$[x, y] \in H \times H \;\; tel \;\; que \;\; (y - A\xi, x - \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in D(A).$$

Ou plus précisément

$$(y - \eta, x - \xi) \geq 0, \quad \forall [\xi, \eta] \in A,$$

alors

$$y \in Ax.$$

La caractérisation suivante est fondamentale dans l'étude des opérateurs maximaux monotones.

Proposition 1.2

Soit A un opérateur de H, il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

i) A est maximal monotone.

ii) A est monotone et $R(I + A) = H$.

ii) Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H tout entier.

(voir H.Brézis [12, 13]).

Définition 1.3

Un opérateur dissipatif A est dit maximal si son extension est A lui même.

Remarque 1.4

On dit qu'une application A définie sur une partie $D(A)$ d'un espace de Hilbert H, à valeurs dans H est monotone si elle vérifie

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in D(A).$$

Plus généralement on considère des opérateurs monotones multivoques c'est à dire pour tout $u \in H$, $\;\; Au$ désigne une partie (éventuellement vide) de H, tel que l'on ait

$$(v_1 - v_2, \quad u_1 - u_2) \geq 0 \qquad \forall u_1, u_2 \in H, \quad \forall v_1 \in Au_1, v_2 \in Au_2.$$

Un opérateur monotone A est dit maximal monotone s'il n'existe aucun opérateur monotone prolongeant strictement A (au sens de l'inclusion des graphes).

Exemple 1.4

Les opérateurs maximaux monotones de $\mathbb{R}$ sont les opérateurs f considérés à l'exemple 1.1.

Exemple 1.5

Soit A un opérateur maximal monotone de H, les opérateurs A^{-1} et λA pour $\lambda > 0$ sont maximaux monotones. Par contre A et B peuvent être maximaux monotones sans qu'il en soit ainsi de $A + B$ car en peut avoir $D(A) \cap D(B) = \phi$.

Exemple 1.6

Soit A une application monotone univoque de $D(A) = H$ dans H.
On suppose que A est hémicontinu, c'est à dire pour tout $x \in H$ et tout $\xi \in H$,

$$A\left((1-t)x + t\xi\right) \to Ax, \quad lorsque \quad t \to 0.$$

Alors A est maximal monotone. En effet soit $[x, y] \in H \times H$ tel que

$$(Ax^{'} - y, x^{'} - \xi) \geq 0$$

Pour tout $x^{'} \in H$. Alors, pour tout $\xi \in H$ et $t \in]0, 1[$,

$$(A\left((1-t)x + t\xi\right) - y, \xi - x) \geq 0.$$

Faisant t tendre vers 0, on obtient

$$(Ax - y, \xi - x) \geq 0.$$

pour tout $\xi \in H$ et donc $Ax = y$.

Exemple 1.7

Soit A un opérateur linéaire, univoque (non borné) monotone dans H. On a la caractérisation suivante :

Proposition 1.3

A est maximal monotone si et seulement si $D(A)$ est dense dans H et A est maximal dans l'ensemble des opérateurs univoques linéaires monotones.
La condition est nécessaire car si x est orthogonal à $D(A)$ on a pour tout $\xi \in D(A)$,

$$(A\xi - x, \xi - x) \geq 0, et \quad donc \quad x = A0 = 0.$$

Montrons qu'elle est suffisante.
Soit $[x, y] \in H \times H$ tel que $(A\xi - y, \xi - x) \geq 0$ pour tout $\xi \in D(A)$. Alors $x \in D(A)$ car sinon l'opérateur $\tilde{A} : \xi + \lambda x \mapsto A\xi + \lambda y$, défini sur l'espace engendré par $D(A)$ et x, serait un prolongement linéaire monotone strict de A.
On a alors pour tout $t > 0$ et tout $\xi \in D(A)$,

$$(A(t\xi + x) - y, (t\xi + x) - x) \geq 0,$$

soit

$$(A\xi - y, \xi) \geq -t(A\xi, \xi).$$

Faisant tendre t vers 0 et utilisant le fait que $D(A)$ est dense dans H on obtient

$$Ax = y.$$

Proposition 1.4

Soit $A : D(A) \subset H \to H$, un opérateur linéaire de domaine dense dans H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A est un opérateur dissipatif.

ii) $\| (A - \lambda I)u \| \leq Re\lambda \| u \|$, pour tout $u \in D(A)$ et tout λ tel que $Re\lambda > 0$.

Théorème 1.1

Tout opérateur dissipatif admet un prolongement fermé, ce prolongement est aussi un opérateur dissipatif.

Corollaire 1.1

Un opérateur dissipatif maximal est toujours fermé.

Théorème 1.2

Tout opérateur dissipatif admet un prolongement maximal dissipatif.

Remarque 1.5

Prolongement d'opérateurs linéaires continus :

Corollaire 1.2

Soit G un sous espace vectoriel de E et soit $g : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme $\| g \|_{G'} = sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} g(x)$. Alors il existe $f \in E^{'}$ qui prolonge g et tel que $\| f \|_{E'} = \| g \|_{G'}$ (voir H.Brézis [18, 19]).
Soient E et F deux espaces de Banach et $G \subset E$ un sous espace fermé et soit $g : G \to F$ un opérateur linéaire continu. On peut se poser la question de savoir s'il existe $f : E \to F$ opérateur linéaire continu qui prolonge g. Noter que le **corollaire (1.2)** résout le problème seulement si $F = \mathbb{R}$. La réponse est affirmative dans certains cas :

1. Si $dimF < \infty$, on peut choisir une base dans F est appliquer le **corollaire (1.2)** à chaque composante de g.
2. Si G admet un supplémentaire topologique ceci est le cas par exemple si $dimG < \infty$ ou bien si $codimG < \infty$, ou bien si E un espace de Hilbert.

La réponse est négative dans le cas général, même si E et F sont des espaces réflexifs.
Bien entendu on peut aussi se poser la question de savoir quand est ce qu'il existe un prolongement f de g tel que $\| f \|_{\mathcal{L}(E,F)} = \| g \|_{\mathcal{L}(G,F)}$. Ce problème est difficile.

Proposition 1.5

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ avec $\overline{D(A)} = H$ un opérateur dissipatif, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est un opérateur dissipatif maximal.
2. $Im(A - \lambda I) = H$ pour tout λ tel que $Re\lambda > 0$.

Théorème 1.3

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ avec $\overline{D(A)} = H$ un opérateur dissipatif, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est un opérateur dissipatif maximal.
2. A est fermé,$\{\lambda : Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et on a de plus $\| (A - \lambda I)^{-1} \| \leq Re\lambda$, où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A.

1.3 Propriétés élémentaires des opérateurs maximaux monotones

Dans ce paragraphe A est un opérateur maximal monotone.
On désigne par $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ la résolvante de A qui pour tout $\lambda > 0$ est une contraction de H dans H. Il est immédiat que J_λ vérifie

$$J_\lambda x = J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} x + (1 - \frac{\mu}{\lambda}) J_\lambda x \right), \quad \forall x \in H, \quad \forall \lambda, \mu > 0.$$

D'autre part on désigne par $A_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}$ l'approximation **Yosida** de A. Si A est linéaire et univoque, on a $A_\lambda = AJ_\lambda$ sur H et $J_\lambda A = A_\lambda$ sur $D(A)$, en particulier pour tout $x \in D(A), A_\lambda x \to Ax$ quand $\lambda \to 0$. Cet argument ne s'étend pas aux opérateurs non linéaires, mais on a toutefois la proposition suivante.

Proposition 1.6

i)A_λ est maximal monotone et lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

ii) $(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}$ pour tout $\lambda, \mu > 0$.

Théorème 1.4

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire de domaine dense dans H. Si A est un opérateur dissipatif maximal , soit $A_\varepsilon = I - \varepsilon A$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A_ε est borné.
2. $\| A_\varepsilon^{-1} \| \leq 1$
3. $lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon^{-1} u = u, \forall u \in H$.

Démonstration

Soit $\{\varepsilon > 0\}$ alors $\{\varepsilon, \varepsilon > 0\} \subset \rho(A)$. Donc $A - \lambda I$ est continument inversible d'où $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, il est borné et défini sur H tout entier.Puisque $\frac{1}{\varepsilon} \in \{\varepsilon > 0\}$. On déduit que $(I - \frac{1}{\varepsilon} A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Mais $A - \frac{1}{\varepsilon} I = -\frac{1}{\varepsilon}(I - \varepsilon A)$. D'où $(A - \frac{1}{\varepsilon} I)^{-1} = -\varepsilon(I - \varepsilon A)^{-1}$. On pose $A_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1}$. On déduit que $A_\varepsilon^{-1} = \mathcal{L}(H)$. Et en utilisant le **théorème 3**, on obtient $\| (A - \frac{1}{\varepsilon} I)^{-1} \| \leq (\frac{1}{\varepsilon})^{-1} = \varepsilon$. Donc $\| A_\varepsilon^{-1} \| \leq 1$. Supposons tout d'abord $u \in D(A)$, d'où
$\| A_\varepsilon^{-1} u - u \| = \| (I - \varepsilon A)^{-1} u - u \| = \| \varepsilon (I - \varepsilon A)^{-1} Au \| \leq \varepsilon \| Au \|$.
Ainsi par passage à la limite quand ε tend vers 0, on obtient
$lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon^{-1} u = u, \forall u \in D(A)$. Et comme $D(A)$ dense dans H,
alors $lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon^{-1} u = u, \forall u \in H$.

Proposition 1.7

Soit $u \in L_2(0,a)$, alors

1. $lim_{\varepsilon\to 0}\| \quad A_\varepsilon^{-1}u - u\|_{L_2(0,a)} = 0$
2. $lim_{\varepsilon\to 0}\|(A_\varepsilon^{-1})^* u - u\|_{L_2(0,a)} = 0$

Soit $[0,T]\times[0,1]$. Pour $u \in L_2(Q)$, on note par $u_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}u$ et $v_\varepsilon^* = (A_\varepsilon^{-1})^*$.

Propriétés 1.1

On a les propriétés suivantes

1. Si $u \in L_2(Q)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \in L_2(Q)$,de plus
   $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,t) \in L_2(Q)$
   $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,t) = (\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))_\varepsilon$
   $u_\varepsilon(x,T) = A_\varepsilon^{-1}(u(0,T))$
2. $\frac{\partial^k u_\varepsilon}{\partial t} \in L_2(Q), k = \overline{0,3}$.
3. $\forall x \in [0,1]$, $u_\varepsilon(x,0) = 0$, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,T) = 0$, $\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}(x,T) = 0$
4. Si $u \in L_2(Q)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \in L_2(Q)$,de plus
   $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,t) \in L_2(Q)$
   $\frac{\partial u_\varepsilon^*}{\partial x}(x,t) = (\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))_\varepsilon^*$
   $u_\varepsilon^*(x,T) = (A_\varepsilon^{-1})^*(u(0,T))$
5. $\frac{\partial^k v_\varepsilon^*}{\partial t} \in L_2(Q), k = \overline{0,3})$
6. $\forall x \in [0,1]$, $v_\varepsilon^*(x,0) = 0$, $\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}(x,T) = 0$, $\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}(x,T) = 0$
7. $\| A_\varepsilon^{-1}u \|_{L_2(Q)} \leq \| u \|_{L_2(Q)}, \quad \forall \varepsilon > 0$
8. $\| (A_\varepsilon^{-1})^* v \|_{L_2(Q)} \leq \| v \|_{L_2(Q)}, \forall \varepsilon > 0$
9. $\langle A_\varepsilon^{-1}u, v\rangle_{L_2(Q)} = \langle A_\varepsilon^{-1}u, (A_\varepsilon^{-1})^* v\rangle_{L_2(Q)}$
10. Si $u \in L_2(Q)$ alors
    $lim_{\varepsilon\to 0}\| \quad A_\varepsilon^{-1}u - u\|_{L_2(Q)} = 0$
    $lim_{\varepsilon\to 0}\|(A_\varepsilon^{-1})^* u - u\|_{L_2(Q)} = 0$

Exemple 1.8

On prend $A = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, de domaine de définition

$$D(A) = \{u \in H = L_2((0,a)) : \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L_2((0,a)), u(0) = 0, u(a) = 0\},$$

alors A est un opérateur dissipatif.
Démonstration

En effet , nous avons

$$\begin{aligned} Re\langle Au, u\rangle &= Re\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{u}dt \\ &= Re\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u}|_0^a - \int_0^a |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dt \\ &= -\int_0^a |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dt \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

On pose
$A_\varepsilon^{-1} = (I-\varepsilon A)^{-1} = (I-\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})^{-1}$, pour $\varepsilon > 0$
Les opérateurs A_ε^{-1} ne sont que ceux qui donnent la solution du problème

$$-\varepsilon\frac{\partial^2 K_\varepsilon}{\partial t^2} + K_\varepsilon = K, K_\varepsilon(0) = 0, \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial t}(0) = 0, \frac{\partial^2 K_\varepsilon}{\partial t^2}(a) = 0,$$

dont le problème adjoint est

$$\varepsilon\frac{\partial^2 K_\varepsilon^*}{\partial t^2} + K_\varepsilon^* = K, K_\varepsilon^*(a) = 0, \frac{\partial K_\varepsilon^*}{\partial t}(a) = 0, \frac{\partial^2 K_\varepsilon^*}{\partial t^2}(0) = 0,$$

a les mêmes propriétés que l'opérateur $A = \frac{\partial^3}{\partial t^3}$

1.4 Surjectivité des opérateurs maximaux monotones

A étant opérateur maximal monotone, on peut trouver facilement des conditions suffisantes pour que A soit surjectif $i.e. R(A) = H$.
Par exemple s'il existe $c > 0$ tel que

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geq c \mid x_1 - x_2 \mid^2, \forall x_1, x_2.$$

Car alors $A - cI$ est maximal monotone. Ou encore si $D(A)$ est borné alors A est surjectif.
(voir H.Brézis [12, 13]).

Définition 1.4

On dit qu'un opérateur B de H est borné au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 tel que $\cup_{x\in\mathcal{U}} Bx$ soit borné.
On dit que B est localement borné si B est borné au voisinage de tous les points de $\overline{D(B)}$.
On dit que B est borné si pour tout borné $\mathcal{U}$ de H alors $\cup_{x\in\mathcal{U}} Bx$ est borné dans H.

Théorème 1.5

Soit A un opérateur maximal monotone de H. Alors A est surjectif si est seulement si A^{-1} est localement borné.
(voir H.Brézis [12, 13]).
Indiquons tout de suite quelques corollaires de la condition suffisante.

Corollaire 1.3

Soit A maximal monotone avec $D(B)$ borné, alors A est surjectif.

1.5 Somme d'opérateurs maximaux monotones

Étant donnés A et B maximaux monotones, l'opérateur $A+B$ est monotone mais, en général, il n'est pas maximal monotone (puisque son domaine peut être vide. Il y a un cas simple ou $A+B$ est encore maximal monotone.

Lemme 1.1

Soient A un opérateur maximal monotone et B un opérateur monotone Lipschitzien de H dans H, alors $A+B$ est maximal monotone.
La propriété A est maximal monotone étant invariante par homothétie de rapport $\lambda > 0$, on peut toujours supposer que la constante de Lipschitz de B est < 1. Soit $y \in H$, l'équation

$$x + Ax + Bx \ni y,$$

est équivalente à

$$x = (I + A)^{-1}(y - Bx).$$

Or l'application

$$x \mapsto (I + A)^{-1}(y - Bx),$$

est une contraction stricte et admet donc un point fixe.

Remarque 1.6

A et B ne jouent pas un rôle symétrique (A et B maximaux monotones). Dans les applications il est important de choisir l'opérateur que l'on régulariser de manière à obtenir une estimation sur $B_\lambda x_\lambda$ le plus simple possible.

Remarque 1.7

Nous allons abréger ensuite quelques notions de l' **homéomorphisme**. plus détails (voir C.Goffman, T.Nishiura, D.Waterman [22], G.Pichon [43], N.Bourbaki [6], P.A.Guihéneuf [21]).

Définition 1.5

On appelle homéomorphisme d'un espace topologique X sur un espace topologique $X^{'}$ un isomorphisme de la structure topologique de X sur celle de $X^{'}$, c'est-à- dire, une bijection de X sur $X^{'}$qui transforme l'ensemble des parties ouvertes de X en l'ensemble des parties ouvertes de $X^{'}$.

On dit que X et $X^{'}$ sont homéomorphes lorsqu'il existe un homéomorphisme de X sur $X^{'}$.

Exemple 1.9

Si X et $X^{'}$ sont deux espaces discrets, toute bijection de X sur $X^{'}$ est un homéomorphisme.

La définition d'un homéomorphisme se transforme aussitôt en le critère suivant : pour qu'une bijection f d'un espace topologique X sur un espace topologique $X^{'}$ soit un homéomorphisme, il faut et il suffit que l'image par f de tout ensemble ouvert dans X soit un ensemble ouvert dans $X^{'}$, et que l'image réciproque par f de tout ensemble ouvert dans $X^{'}$ soit un ensemble ouvert dans X .

Proposition 1.8

Tous les intervalles ouverts non vides de R sont homéomorphes à la droite R.

Exemple 1.10

Soit E un $E.V.N$, x_0 étant un vecteur fixé de E et a un scalaire fixé différent de zéro, montrer que les applications suivantes :

$$x \longmapsto x + x_0, \quad x \longmapsto ax.$$

sont des homéomorphismes de E sur lui même.
(voir J.Genet, G.Pupion [20]).

Solution

Soit $\phi_{x_0} : x \longmapsto x + x_0$ et $\rho_a : x \longmapsto ax$, $a \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

1) Il est clair que ϕ_{x_0} est injective et surjective ($\forall y \in E : \phi_x(y - x_0) = y$).

De plus, $\phi_{x_0}.\phi_{-x_0} = \phi_{-x_0}.\phi_{x_0} = i$, opérateur identique, donc

$$(\phi_{x_0})^{-1} = \phi_{-x_0}.$$

De même, ρ_a est bijective et

$$(\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}.$$

2) ϕ_{x_0} homéomorphisme $\Leftrightarrow$ ϕ_{x_0} et $(\phi_{x_0})^{-1}$ continues .

ϕ_{x_0} est continue. - Quelque soit le choix de x_0, ϕ_{x_0} est continue ; en effet, on a

$$\|x - x'\| < \epsilon \Rightarrow \|\phi_{x_0}(x) - \phi_{x_0}(x')\| = \|(x_0 + x) - (x_0 + x')\| = \|x - x'\| < \epsilon$$

(en fait on constate que ϕ_{x_0} est uniformément continue sur E).

Puisque ϕ_{x_0} est continue,$\forall x_0$, $(\phi_{x_0})^{-1} = \phi_{-x_0}$ est aussi continue. Autrement dit, ϕ_{x_0} est un homéomorphisme.

De manière analogue, on s'assure d'abord que ρ_a est continue, $\forall a \neq 0$, puis on en déduit la continuité de $(\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}$.

1.6 Notions de la stabilité

On considère un système non linéaire non autonome de la forme suivante :

$$u_t = f(t, u(t)) \qquad *$$

avec $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue en t, localement Lipschitzienne en u et telle que $f(t, 0) = 0$, pour tout $t \geq 0$, de sorte que l'origine soit un point d'équilibre. On désigne tout au long de ce mémoire la condition initiale $u(t_0)$ par u_0 . Le paragraphe suivant est dédié à la définition de quelques concepts fondamentaux de stabilité.

Définition 1.6

On dit que $u = 0$ est un point d'équilibre stable, si

$$\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0, tel\,que \parallel u_0 \parallel < \delta \Rightarrow \parallel u(t) \parallel < \epsilon, \forall t \geq t_0.$$

En d'autres termes, pour tout $t \geq t_0$, une petite perturbation de la condition initiale u_0 autour de l'origine donne naissance à une solution $u(t)$ qui reste proche de l'origine.

Notons bien que la stabilité du système n'implique pas la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions. On définit alors la notion d'attractivité.

Définition 1.7

On dit que $u = 0$ est un point d'équilibre attractif, s'il existe un voisinage de l'origine $U(0)$, tel que

$$\forall u_0 \in U(0), lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

un point d'équilibre globalement attractif si :

$$\forall u_0 \in R^n, lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

Définition 1.8

On dit que l'origine $u = 0$ est

— un point d'équilibre asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.

— un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, s'il est stable et globalement attractif.

Définition 1.9

Les solutions du système $*$ sont dites uniformément bornées, si : $\exists a \geq 0$ et une fonction croissante : $c]0, a[\to R$ telles que $\forall \alpha \in]0, a[, \parallel u_0 \parallel < \alpha \Rightarrow \parallel u(t) \parallel < c(\alpha), \forall t \geq t_0$. Les solutions sont dites globalement uniformément bornées, si la propriété précédente est vraie pour $a = +\infty$.

Définition 1.10

On dit que

— l'origine $u = 0$ est un point d'équilibre uniformément stable si : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, tel que $\forall t_0 \geq 0, \parallel u_0 \parallel < \delta \Rightarrow \parallel u(t) \parallel < \epsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0$.

— l'origine est un point d'équilibre globalement uniformément stable, s'il est uniformément stable et les solutions du système sont globalement uniformément bornées.

Définition 1.11

On dit que

— l'origine $u = 0$ est un point d'équilibre uniformément attractif, si : $\exists c \geq 0 / \forall \parallel u_0 \parallel < c, \forall \epsilon > 0, \exists T := T(\epsilon, c)$ tel que, $\parallel u(t) \parallel < \epsilon, \forall t \geq T + t_0$.

— l'origine $u = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément attractif , si $\forall c > 0, \forall \epsilon > 0, \exists T := T(\epsilon, c)$, tel que $\parallel u(t) \parallel < \epsilon, \forall t \geq T + t_0$.

Définition 1.12

On dit que

— l'origine $u = 0$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et uniformément attractif.

— l'origine $u = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable, s'il est globalement uniformément stable et globalement uniformément attractif.

Définition 1.13

On dit que

— l'origine $u = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable, s'il existe un voisinage de l'origine noté $U(0), \exists \lambda_1 > 0$ et $\exists \lambda_2 > 0$, tels que

$\parallel u(t) \parallel \leq \lambda_1 \parallel u_0 \parallel \frac{1}{e^{\lambda_2 (t - t_0)}}, \forall u_0 \in U(0), \forall t \geq t_0 \geq 0$. Dans ce cas, la constante λ_2 est appelée le taux ou aussi la vitesse de convergence.

— l'origine $u = 0$ est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable, si $U(0) = \mathbb{R}^n$.

Remarque 1.8

Il est important de remarquer que la propriété de la stabilité exponentielle du système entraine nécessairement la stabilité asymptotique de ce dernier.

Définition 1.14

Une fonction continue $\alpha : [0, a[\to [0, +\infty[$ est dite de classe $\mathcal{K}$, si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. Elle est dite de classe $\mathcal{K}_\infty$, si de plus, on a $a = +\infty$ et $\alpha(r) \to +\infty$ quand $r \to +\infty$.

Définition 1.15

Une fonction continue $\beta : [0, a[\times[0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est dite de classe $\mathcal{KL}$, si pour tout s fixé , l'application $s \mapsto \beta(r, s)$ est de classe $\mathcal{K}$ et pour tout r fixé, l'application est décroissante et $\beta(r, s) \to 0$ quand $s \to +\infty$.

Voici une autre reformulation des notions de stabilité utilisant les fonctions de classe $\mathcal{K}$ et $\mathcal{KL}$.

Proposition 1.9

L'origine $u = 0$ est un point d'équilibre

— Uniformément stable si et seulement si il existe une fonction $\alpha(.)$ de classe $\mathcal{K}$ et une constante positive c indépendante de t_0 telle que, $\|u(t)\| \leq \alpha(\|u_0\|), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|u_0\| < c$.
— Globalement uniformément stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale u_0.

(voir I.Ellouze [17], W.Hahn [25]).

Proposition 1.10

L'origine $u = 0$ est un point d'équilibre

— Uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction $\beta(., .)$ de classe $\mathcal{KL}$ et une constante positive c indépendante de t_0 telle que, $\|u(t)\| \leq \beta(\|u_0\|, t - t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|u_0\| < c$.
— Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale u_0 .

(voir I.Ellouze [17], W.Hahn [25]).

Proposition 1.11

L'origine $u = 0$ est un point d'équilibre

— Exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite avec $\beta(r,s) = kre^{-\gamma s}, k > 0, \gamma > 0, \forall \|u_0\| < c$.
— Globalement exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale u_0 .

(voir I.Ellouze [17], W.Hahn [25]).

1.7 Inégalités de base

Inégalité de cauchy 1.2

$$\forall(\alpha,\beta) \in C \times C, \mid \alpha\beta \mid \leq \frac{1}{2} \mid \alpha \mid^2 + \frac{1}{2} \mid \beta \mid^2 .$$

Inégalité de ϵ - cauchy 1.3

$$\forall(\alpha,\beta) \in C \times C, \mid \alpha\beta \mid \leq \frac{1}{\epsilon 2} \mid \alpha \mid^2 + \frac{\epsilon}{2} \mid \beta \mid^2 .$$

Tel que ϵ certain nombres réels strictement positif.

Inégalité intégrale de cauchy-schwarz 1.4

$$\forall(\zeta,\xi) \in \left(L^2(\Omega)\right)^2, \int_\Omega \mid \zeta \times \xi \mid \leq \int_\Omega \left(\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}} \int_\Omega \left(\xi^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Inégalité intégrale de Hölder 1.5

Soient p et q deux nombres réels ≥ 0 .

$$\forall(\zeta,\xi) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega), \int_\Omega \mid \zeta \times \xi \mid \leq \int_\Omega (\mid \zeta \mid^p)^{\frac{1}{p}} \int_\Omega (\mid \xi \mid^q)^{\frac{1}{q}} .$$

Tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Chapitre 2

Problème aux limites avec des conditions mixtes classiques et non local

Le présent chapitre est consacré à la preuve de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites avec des conditions mixtes classiques et non locales. La preuve est basée sur deux estimations a priori et sur le fait que l'opérateur engendré par le problème considéré est dense.

2.1 Position du problème

Dans le rectangle $\Omega = (0,1) \times (0,T)$, on considère l'équation différentielle

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}) - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}) = f(x,t). \tag{2.1.1}$$

A l'équation (2.1.1), on associe la condition initiale,

$$lu \equiv u(x,0) = \varphi(x), \tag{2.1.2}$$

à la solution u de l'équation (2.1.1), on associe la condition au bord

$$u(1,t) = 0, \tag{2.1.3}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0. \tag{2.1.4}$$

On suppose que la fonction φ satifait les conditions de compatibilité donnée en (2.1.3) - (2.1.4).

Au problème (2.1.1)-(2.1.4), on associe l'opérateur $L = (\mathcal{L}, l)$ défini de E dans F, où E est un espace de Banach constitué des fonctions $u \in L_2(\Omega)$ vérifiant les conditions (2.1.3) et (2.1.4), où

$$\| u \|_E^2 = \int_\Omega x \left[x|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dxdt + |\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}|^2 + |\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}|^2 \right] dxdt$$

$$+ \sup_{0 \le t \le T} \int_0^1 x \left[|\frac{\partial u}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2 + x|u|^2 \right] dx \qquad (2.1.5)$$

et F est l'espace de Hilbert constitué des fonctions vectorielles $\mathcal{F} = (f, \varphi)$ obtenu comme complété de l'espace $L_2(\Omega) \times W_2^2(0,1)$ par rapport à la norme

$$\| \mathcal{F} \|_F^2 = \int_\Omega x^2 |f(x,t)|^2 dxdt + \int_0^1 x \left[|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}|^2 + |\frac{\partial \varphi}{\partial x}|^2 + x|\varphi|^2 \right] dx \qquad (2.1.6)$$

En utilisant la méthode des inégalités énergétiques proposée dans N.I.Yurchuk [48], nous établissons deux estimations à priori bilatérales. On montre que l'opérateur L est un homéomorphisme entre les espaces E et F.

2.2 Estimation à priori bilatérale

Théorème 2.1

Pour chaque fonction $u \in E$, on a l'estimation a priori

$$\|Lu\|_F^2 \le \alpha \|u\|_E^2 \qquad (2.2.1)$$

où

$$\alpha = max(4c_1T + 1, 4a_1T + 1)$$

on peut choisir $c_1 > c_0$ de façon que

$$c_1 x > \frac{\partial a}{\partial x} > c_0, a_1 x > a > a_0.$$

Où $c_0 > 0, a_0 > 0$.

Démonstration

De l'équation (2.1.1) et sous la condition (2.1.2), on obtient

$$\int_\Omega x^2 |\mathcal{L}u|^2 dxdt \le 4 \int_\Omega x^2 |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dxdt$$

$$+4 \int_\Omega x \left[\left(c_1 |\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}|^2 + a_1 |\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}|^2 \right) \right] dxdt \qquad (2.2.2)$$

$$+4c_1T\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 x|\frac{\partial u}{\partial x}|^2dx+4a_1T\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 x|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2dx$$

$$\int_0^1 x|\frac{d^2lu}{dx^2}|^2dx\leq\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 x|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2dx \tag{2.2.3}$$

$$\int_0^1 x(|\frac{dlu}{dx}|^2+x|lu|^2)dx\leq\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 x(|\frac{\partial u}{\partial x}|^2+x|u|^2)dx \tag{2.2.4}$$

En combinant les inégalités (2.2.2), (2.2.3), et (2.2.4), on obtient (2.2.1) pour tout $u\in E$.

Théorème 2.2

Pour toute fonction $u\in E$, on a l'estimation a priori

$$\|u\|_E^2\leq C\|Lu\|_F^2. \tag{2.2.5}$$

Démonstration

En multipliant l'équation (2.1.1) par $xe^{-ct}J_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}$ et $x^2e^{-ct}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}$ respectivement et en intégrant sur $\Omega_\tau=(0,\tau)(0,1)$, on obtient

$$e^{-ct}\left[x^2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t})\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}=x^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\mathcal{L}u\right]$$

avec

$$e^{-ct}\left[x\frac{\partial u}{\partial t}J_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}-\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t})J_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}-\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x})J_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}=xJ_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}\mathcal{L}u\right]$$

et par conséquent

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 xe^{-ct}\frac{\partial u}{\partial t}J_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}dxdt=\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\mid J_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}\mid^2 dxdt \tag{2.2.6}$$

et

$$\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt=\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}x^2\mid\frac{\partial u}{\partial t}\mid^2 dxdt.$$

Mais

$$\begin{aligned}-\int_0^\tau\int_0^1 xe^{-ct}\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t})\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt&=\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt\\&+\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}xa(x)\mid\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\mid^2 dxdt\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

et comme

$$-\int_0^\tau\int_0^1 xe^{-ct}\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt=\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt \tag{2.2.8}$$

$$+\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}xa(x)\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dxdt$$

et

$$-\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t})J_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}dxdt=-\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt. \tag{2.2.9}$$

Ensuite

$$-\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x})J_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}dxdt=-\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt. \tag{2.2.10}$$

Comme

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}xa(x)\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dxdt=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ct}xa(x)\mid\frac{\partial u}{\partial x}\mid^2\Big|_0^\tau dx \tag{2.2.11}$$

$$+\frac{c}{2}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}xa(x)\mid\frac{\partial u}{\partial x}\mid^2 dxdt,$$

et par conséquent

$$\int_0^\tau\int_0^1 Re\left[e^{-ct}\left(\mathcal{L}u\right)\left(x^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+xJ_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}\right)\right]dxdt=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ct}xa(x)\mid\frac{\partial u}{\partial x}\mid^2\Big|_0^\tau dx \tag{2.2.12}$$

$$+\frac{c}{2}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}xa(x)\mid\frac{\partial u}{\partial x}\mid^2 dxdt$$

$$+\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}xa(x)\mid\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\mid^2 dxdt$$

$$+\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}x^2\mid\frac{\partial u}{\partial t}\mid^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\mid J_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}\mid^2 dxdt.$$

En utilisant les propriétés des modules et des inégalités $\varepsilon - cauchy$

$$\mid ab\mid\leq\frac{1}{2\varepsilon}\mid a\mid^2+\frac{\varepsilon}{2}\mid a\mid^2,\qquad\varepsilon>0,$$

on trouve

$$\int_0^\tau\int_0^1 Re\left[e^{-ct}\left(\mathcal{L}u\right)\left(x^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+xJ_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}\right)\right]dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 xa(x)\mid \frac{dlu}{dx}\mid^2 dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-c\tau}xa(x)\mid \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\mid^2 dx$$

$$+\frac{c}{2}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}xa(x)\mid \frac{\partial u}{\partial x}\mid^2 dxdt \qquad (2.2.13)$$

$$+\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}xa(x)\mid \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\mid^2 dxdt$$

$$+\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}x^2\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\mid J_{\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}}\mid^2 dxdt.$$

Nous allons montrer que

$$Re\left[e^{-ct}\left(\mathcal{L}u\right)\left(x^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+xJ_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}\right)\right]\leq 3\left(e^{-ct}x^2\mid \mathcal{L}u\mid^2\right)$$

$$+\frac{1}{10}\left(e^{-ct}x^2\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid^2\right)+\frac{1}{2}\left(e^{-ct}\mid J_{\frac{\partial u}{\partial t}}\mid^2\right).$$

En effet,

$$Re\left[e^{-ct}\left(\mathcal{L}u\right)\left(x^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+xJ_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}\right)\right]\leq e^{-ct}x^2\mid \mathcal{L}u\mid\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid +e^{-ct}x\mid \mathcal{L}u\mid\mid J_{\frac{\partial u}{\partial t}}\mid$$

$$\leq\frac{5}{2}\left(x^2e^{-ct}\mid \mathcal{L}u\mid^2\right)+\frac{1}{10}\left(e^{-ct}x^2\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid^2\right)+\frac{1}{2}\left(e^{-ct}x^2\mid \mathcal{L}u\mid^2\right)+\frac{1}{2}\left(e^{-ct}\mid J_{\frac{\partial u}{\partial t}}\mid^2\right)$$

$$(2.2.14)$$

$$\leq 3\left(e^{-ct}x^2\mid \mathcal{L}u\mid^2\right)+\frac{1}{10}\left(e^{-ct}x^2\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid^2\right)+\frac{1}{2}\left(e^{-ct}\mid J_{\frac{\partial u}{\partial t}}\mid^2\right)$$

Nous remarquons que x est compris entre 0 et 1, donc nous pouvons écrire

$$\int_0^\tau\int_0^1 Re\left[e^{-ct}\left(\mathcal{L}u\right)\left(x^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+xJ_{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}}\right)\right]dtdx\leq 3\int_0^\tau\int_0^1\left(e^{-ct}x^2\mid \mathcal{L}u\mid^2\right)dtdx$$

$$+\frac{1}{10}\int_0^\tau\int_0^1\left(e^{-ct}x^2\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid^2\right)dtdx+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1\left(e^{-ct}\mid J_{\frac{\partial u}{\partial t}}\mid^2\right)dtdx \qquad (2.2.15)$$

ou

$$3\int_0^T\int_0^1\left(e^{-ct}x^2\mid \mathcal{L}u\mid^2\right)dxdt+\frac{1}{10}\int_0^\tau\int_0^1\left(e^{-ct}x^2\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid^2\right)dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1\left(e^{-ct}\mid J_{\frac{\partial u}{\partial t}}\mid^2\right)dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 xa(x)\mid \frac{dlu}{dx}\mid^2 dx\geq$$

$$\int_0^\tau \int_0^1 Re\left[e^{-ct}\left(\mathcal{L}u\right)\left(x^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+xJ_{\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}}\right)\right]dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 xa(x)\mid \frac{dlu}{dx}\mid^2 dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-c\tau}xa(x)\mid \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\mid^2 dx$$

$$+\frac{c}{2}\int_0^\tau \int_0^1 e^{-ct}xa(x)\mid \frac{\partial u}{\partial x}\mid^2 dxdt \tag{2.2.16}$$

$$+\int_0^\tau \int_0^1 e^{-ct}xa(x)\mid \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\mid^2 dxdt$$

$$+\int_0^\tau \int_0^1 e^{-ct}x^2\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^1 \left(e^{-ct}\mid J_{\frac{\partial u}{\partial t}}\mid^2\right)dxdt,$$

alors

$$3\int_0^T \int_0^1 e^{-ct}x^2\mid \mathcal{L}u\mid^2 dtdx+a_1\frac{1}{2}\int_0^1 x\mid \frac{dlu}{dx}\mid^2 dx \geq \frac{9}{10}\int_0^\tau \int_0^1 e^{-ct}x^2\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid^2 dtdx$$

$$+a_0\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-c\tau}x\mid \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\mid^2 dx$$

$$+a_0\frac{c}{2}\int_0^\tau \int_0^1 e^{-ct}x\mid \frac{\partial u}{\partial x}\mid^2 dxdt \tag{2.2.17}$$

$$+a_0\int_0^\tau \int_0^1 e^{-ct}x\mid \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\mid^2 dxdt.$$

lemme 2.1

En choisissant $1 > a_1 \geq a(x) \geq a_0 > 0$, on peut montrer

$$\frac{1}{4}\int_0^\tau \int_0^1 x^2\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid^2 e^{-ct}dtdx+\frac{a_1}{2}\int_0^1 x^2\mid lu\mid^2 dx \geq \frac{a_0}{2}\int_0^1 x^2\mid u\mid^2|_{t=\tau} e^{-c\tau}dx$$

$$+(c-2)\frac{a_0}{2}\int_0^\tau \int_0^1 x^2\mid u\mid^2 e^{-ct}dtdx \tag{2.2.18}$$

tel que $c \geq 2$.

Démonstration

Considérons

$$\frac{1}{4}\int_0^\tau \int_0^1 x^2a(x)\mid \frac{\partial u}{\partial t}\mid^2 e^{-ct}dtdx+\int_0^\tau \int_0^1 x^2a(x)\mid u\mid^2 e^{-ct}dtdx$$

$$\geq Re \int_0^\tau \int_0^1 x^2 a(x) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{u} e^{-ct} dt dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(e^{-ct} x^2 a(x) \mid u \mid^2 \right) \mid_{t=0}^{t=\tau} dx + \frac{c}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x^2 a(x) \mid u \mid^2 e^{-ct} dt dx$$

En Utilisant (2.2.18), on a

$$e^{cT} \left(6 \int_0^T \int_0^1 x^2 \mid \mathcal{L}u \mid^2 dt dx + a_1 \left[\int_0^1 x \left(\mid \frac{dlu}{dx} \mid^2 + x \mid lu \mid^2 \right) \right] dx \right)$$

$$\geq \frac{13}{10} \int_0^\tau \int_0^1 x^2 \mid \frac{\partial u}{\partial t} \mid^2 dt dx \tag{2.2.19}$$

$$+ a_0 \left[\int_0^1 x \left(\mid \frac{\partial u}{\partial x} \mid^2 + x \mid u \mid^2 \mid \right) \right]_{t=\tau} dx + 2a_0 \int_0^\tau \int_0^1 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \mid^2 dx dt$$

grâce à (2.2.19), on déduit

$$e^{cT} \left(6 \int_0^T \int_0^1 x^2 \mid \mathcal{L}u \mid^2 dt dx + a_1 \left[\int_0^1 x \mid \frac{dlu}{dx} \mid^2 + x^2 \mid lu \mid^2 \right] dx \right)$$

$$\geq \frac{13}{10} \int_0^T \int_0^1 x^2 \mid \frac{\partial u}{\partial t} \mid^2 dt dx \tag{2.2.20}$$

$$+ a_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\int_0^1 x \left(\mid \frac{\partial u}{\partial x} \mid^2 + x \mid u \mid^2 \right) dx \right] + 2a_0 \int_0^T \int_0^1 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \mid^2 dx dt.$$

lemme 2.2

$$\frac{1}{4} \int_0^\tau \int_0^1 x \mid \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \mid^2 e^{-ct} dt dx + \frac{a_1}{2} \int_0^1 x \mid \frac{d^2 lu}{dx^2} \mid^2 dx \geq \frac{a_0}{2} \int_0^1 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mid^2 \mid_{t=\tau} e^{-c\tau} dx$$

$$+ (c-2) \frac{a_0}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mid^2 e^{-ct} dt dx \tag{2.2.21}$$

tel que $c \geq 2$

Démonstration

En intégrant l'expression

$$\int_0^\tau \int_0^1 x a(x) \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} e^{-ct} dt dx,$$

par parties et en utilisant des inégalités $\varepsilon - cauchy$ et en utilisant (2.1.1), on obtient (2.2.21)

de l'équation (2.1.1) on a

$$\frac{a_0^2}{2}x \mid \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \mid^2 \leq 4x^2 \mid \mathcal{L}u \mid^2$$

$$+\frac{1}{4}\left(x^2 \mid \frac{\partial u}{\partial t} \mid^2 + c_1^2 x \mid \frac{\partial u}{\partial x} \mid^2 + a_1^2 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mid^2 + c_1^2 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \mid^2\right). \qquad (2.2.22)$$

Le second membre de cette inégalité est majoré comme suit

$$\frac{(2a_0^2-1)}{4}\int_0^\tau \int_0^1 x \mid \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \mid^2 dtdx + \frac{[2(c-2)a_0 - a_1^2]}{4}\int_0^\tau \int_0^1 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mid^2 e^{-ct} dtdx$$

$$+\frac{a_0}{2}\int_0^1 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mid^2 \mid_{t=\tau} e^{-c\tau} dx \leq 4\int_0^\tau \int_0^1 x^2 \mid \mathcal{L}u \mid^2 dtdx$$

$$+\frac{a_1}{2}\int_0^1 x \mid \frac{d^2 lu}{dx^2} \mid^2 dx \qquad (2.2.23)$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^\tau \int_0^1 \left(x^2 \mid \frac{\partial u}{\partial t} \mid^2 + c_1^2 x \mid \frac{\partial u}{\partial x} \mid^2 + c_1^2 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \mid^2\right) dtdx,$$

donc

$$\frac{(2a_0^2-1)}{2}\int_0^T \int_0^1 x \mid \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \mid^2 dtdx + a_0 \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mid^2 dx \leq$$

$$e^{2cT}\left[6\left(\frac{5}{13} + \frac{2c_1^2 T}{a_0} + \frac{c_1^2}{4a_0}\right) + 8\right]\int_0^T \int_0^1 x^2 \mid \mathcal{L}u \mid^2 dtdx \qquad (2.2.24)$$

$$+a_1 e^{2cT}\left[\left(\frac{5}{13} + \frac{2c_1^2 T}{a_0} + \frac{c_1^2}{4a_0}\right)\right]\int_0^1 \left(x \mid \frac{d^2 lu}{dx^2} \mid^2 dx + x \mid \frac{dlu}{dx} \mid^2 + x^2 \mid lu \mid^2\right) dx.$$

En substituant (2.2 .24) dans (2.2 .20), on obtient

$$\frac{13}{10}\int_0^T \int_0^1 x^2 \mid \frac{\partial u}{\partial t} \mid^2 dtdx + \frac{(2a_0^2-1)}{2}\int_0^T \int_0^1 x \mid \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \mid^2 dtdx$$

$$+a_0 \sup_{0\leq t\leq T}\left[\int_0^1 x\left(\mid \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mid^2 dx + \mid \frac{\partial u}{\partial x} \mid^2 + x \mid u \mid^2\right) dx\right] + 2a_0 \int_0^T \int_0^1 x \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \mid^2 dxdt$$

$$\leq$$

$$e^{cT}\left[e^{cT} 6\left(\frac{5}{13} + \frac{2c_1^2 T}{a_0} + \frac{c_1^2}{4a_0}\right) + 8e^{cT} + 6\right]\int_0^T \int_0^1 x^2 \mid \mathcal{L}u \mid^2 dtdx \quad (2.2.25)$$

$$+a_1e^{cT}\left[e^{cT}\left(\frac{5}{13}+\frac{2c_1^2T}{a_0}+\frac{c_1^2}{4a_0}\right)+1\right]\int_0^1\left(x\mid\frac{d^2lu}{dx^2}\mid^2dx+x\mid\frac{dlu}{dx}\mid^2+x^2\mid lu\mid^2\right)dx.$$

et par conséquent, on obtient

$$min\{\frac{13}{10},\frac{(2a_0^2-1)}{2},2a_0\}\int_0^T\int_0^1x\left(x\mid\frac{\partial u}{\partial t}\mid^2+\mid\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\mid^2+\mid\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}\mid^2dtdx\right)dxdt$$

$$+\left(\sup_{0\le t\le T}\left[\int_0^1x\left(\mid\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\mid^2dx+\mid\frac{\partial u}{\partial x}\mid^2+x\mid u\mid^2\right)dx\right]\right)$$

$$\le$$

$$max\{e^{cT}\left[e^{cT}6\left(\frac{5}{13}+\frac{2c_1^2T}{a_0}+\frac{c_1^2}{4a_0}\right)+8e^{cT}+6\right],a_1e^{cT}\left[e^{cT}\left(\frac{5}{13}+\frac{2c_1^2T}{a_0}+\frac{c_1^2}{4a_0}\right)+1\right]\}\times \tag{2.2.26}$$

$$\times\left(\int_0^T\int_0^1x^2\mid\mathcal{L}u\mid^2dtdx+\int_0^1\left(x\mid\frac{d^2lu}{dx^2}\mid^2dx+x\mid\frac{dlu}{dx}\mid^2+x^2\mid lu\mid^2\right)dx\right)$$

alors

$$\int_0^T\int_0^1x\left(x\mid\frac{\partial u}{\partial t}\mid^2+\mid\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\mid^2+\mid\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}\mid^2dtdx\right)dxdt$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\int_0^1x\left(\mid\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\mid^2dx+\mid\frac{\partial u}{\partial x}\mid^2+x\mid u\mid^2\right)dx$$

$$\le\frac{max\{e^{cT}\left[e^{cT}6\left(\frac{5}{13}+\frac{2c_1^2T}{a_0}+\frac{c_1^2}{4a_0}\right)+8e^{cT}+6\right],a_1e^{cT}\left[e^{cT}\left(\frac{5}{13}+\frac{2c_1^2T}{a_0}+\frac{c_1^2}{4a_0}\right)+1\right]\}}{min\{\frac{13}{10},\frac{(2a_0^2-1)}{2},2a_0\}}\times$$

$$\times\left(\int_0^T\int_0^1x^2\mid\mathcal{L}u\mid^2dtdx+\int_0^1\left(x\mid\frac{d^2lu}{dx^2}\mid^2dx+x\mid\frac{dlu}{dx}\mid^2+x^2\mid lu\mid^2\right)dx\right). \tag{2.2.27}$$

Finalement, on a

$$\int_0^T\int_0^1x\left(x\mid\frac{\partial u}{\partial t}\mid^2+\mid\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\mid^2+\mid\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}\mid^2dtdx\right)dxdt$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\int_0^1x\left(\mid\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\mid^2dx+\mid\frac{\partial u}{\partial x}\mid^2+x\mid u\mid^2\right)dx\le C\times$$

$$\left(\int_0^T\int_0^1x^2\mid\mathcal{L}u\mid^2dtdx+\int_0^1\left(x\mid\frac{d^2lu}{dx^2}\mid^2dx+x\mid\frac{dlu}{dx}\mid^2+x^2\mid lu\mid^2\right)dx\right) \tag{2.2.28}$$

où la constante symbolique C est définie par la relation

$$C = \frac{\max\{\left[e^{cT}\frac{a_1}{4}\left(1+\frac{c_1^2}{a_0}+Tc\times\frac{c_1^2}{a_0}\right)+a_1\right], \left[\frac{5e^{cT}}{2}\left(5+\frac{c_1^2}{a_0}+Tc\times\frac{c_1^2}{a_0}\right)+14\right]\}}{\min\{\frac{(2a_0^2-1)}{4}, \frac{1}{2}, a_0\}} \tag{2.2.29}$$

a_1, a_0 sont prit tels que $a_1 > a_0 > \frac{2^{0.5}}{2}$ Ce qui achève la démonstration.

2.3 Résolvabilité du problème

Les deux estimations (2.2.1) et (2.2.5) montrent que l'opérateur $L : E \to F$ est continu et son image est fermée dans F. Pour prouver l'existence de la solution du problème (2.1.1)-(2.1.4), il suffit de montrer que $R(L)$ est dense dans F. La preuve est basée sur le lemme suivant

Lemme 2.3

Soit $D_0(L) = \{u \in D(L)/lu = 0\}$. Si pour $u \in D_0(L)$ et une certaine $\omega \in L_2(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega x^2 \mathcal{L}u\overline{\omega}dxdt = 0 \tag{2.3.1}$$

Alors ω s'annule presque partout dans Ω, où $\omega \in L_2(\Omega)$

Démonstration

L'égalité (2.3.1) peut être écrite comme suit

$$\int_\Omega x^2\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\omega}dxdt = \int_\Omega x(\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}))\overline{\omega}dxdt \tag{2.3.2}$$

Pour $\omega(x,t)$ donnée, on introduit la fonction

$$v(x,t) = \omega(x,t) - \int_x^1 \frac{1}{\xi}\omega(\xi,t)d\xi$$

Une intégration par parties par rapport à ξ donne

$$\int_x^1 v(\xi,t)d\xi = \int_x^1 \omega(\xi,t)d\xi - \int_x^1\int_\eta^1 \frac{1}{\xi}\omega(\xi,t)d\xi d\eta, \tag{2.3.3}$$

ce qui implique

$$\int_x^1 v(\xi,t)d\xi = x\int_x^1 \frac{1}{\xi}\omega(\xi,t)d\xi$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{x}\mathcal{J}_v + v = \omega, \;\; and \;\; x^2\omega = x^2 v + x\mathcal{J}_v = Nv \tag{2.3.4}$$

ce qui implique

$$\int_0^1 v(x,t)dx = 0 \;\; and \;\; J_v = \int_x^1 v(\xi,t)d\xi.$$

De l'égalité (2.3.2), on a

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} N\overline{v}dxdt = &-\int_\Omega x(\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}))\overline{v}dxdt \\ &- \int_\Omega (\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}))J_{\overline{v}}dxdt \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

En intégrant par parties le deuxième terme du côté gauche de (2.3.5), on obtient

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} N\overline{v}dxdt = \int_\Omega Au\overline{v}dxdt \tag{2.3.6}$$

où

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x}(xa(x)(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}))$$

Introduisons les opérateurs de régularisation par rapport à t, J_ε^{-1} et $(J_\varepsilon^{-1})^*$. (voir N.I.Yurchuk [48]).
Alors ces opérateurs fournissent les solutions des problèmes respectifs

$$\begin{gathered} \varepsilon\frac{dg_\varepsilon(t)}{dt} + g_\varepsilon(t) = g(t) \\ g(t)_\varepsilon|_{t=0} = 0 \end{gathered} \tag{2.3.7}$$

et

$$\begin{gathered} -\varepsilon\frac{dg_\varepsilon^*(t)}{dt} + g_\varepsilon^*(t) = g(t) \\ g^*(t)_\varepsilon|_{t=T} = 0 \end{gathered} \tag{2.3.8}$$

Les solutions vérifies les propriétés suivantes : Pour $g \in L_2(0,T)$, les fonctions $g_\varepsilon = (J_\varepsilon^{-1})g$ et $g_\varepsilon^* = (J_\varepsilon^{-1})^* g$ sont dans $W_2^1(0,T)$ tels que $g(t)_\varepsilon|_{t=0} = 0$ et $g^*(t)_\varepsilon|_{t=T} = 0$. D'ailleurs, J_ε^{-1} commute avec $\frac{\partial}{\partial t}$ et on a $\int_0^T |g_\varepsilon - g|^2 \longrightarrow 0$ et $\int_0^T |g_\varepsilon^* - g|^2 \longrightarrow 0$, pour $\varepsilon \longrightarrow 0$.
En remplaçant dans (2.3.6) u par la fonction régulatrice $(J_\varepsilon^{-1})u$, et en utilisant la relation

$$AJ_\varepsilon^{-1} = J_\varepsilon^{-1}A,$$

et en vertu des propriétés des opérateurs de régularisation, on a

$$-\int_\Omega u\left(\overline{N\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}}\right)dxdt=\int_\Omega Au\overline{v_\varepsilon^*}dxdt. \tag{2.3.9}$$

En passant à la limite, (2.3.9) est vérifiée pour toute fonction vérifiant les conditions (2.1.2) - (2.1.4), telle que

$$\frac{\partial u}{\partial x}\in L_2(\Omega)$$

Le membre gauche de (2.3.9) est une fonction linéaire et continue et la fonction v^* est dérivable

$$\frac{\partial v^*}{\partial x}\in L_2(\Omega)$$

et vérifie les conditions

$$\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}|_{x=1}=0 \tag{2.3.10}$$

De plus v^* vérifie la condition intégrale (2.1.4). On pose $u=\int_0^t e^{c\tau}v_\varepsilon^*(x,\tau)d\tau$ dans (2.3.6). En utilisant (2.3.8), en obtient

$$\begin{aligned}-\int_\Omega e^{ct}v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt&=\int_\Omega Au\overline{v_\varepsilon^*}dxdt-\varepsilon\int_\Omega Au\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dxdt\\&=\int_\Omega Aue^{-ct}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt-\varepsilon\int_\Omega Au\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dxdt\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

En intégrant par parties, on obtient

$$Re\int_\Omega Au\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt=\frac{c}{2}\int_\Omega e^{-ct}xa(x)|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|^2dx+\int_\Omega e^{-ct}xa(x)|\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}|^2dx \tag{2.3.12}$$

d'où

$$Re(-\varepsilon\int_\Omega Au\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dxdt)\geq\frac{c}{2}\int_\Omega xa(x)e^{ct}|\frac{\partial v_\varepsilon^*(x,t)}{\partial x}|^2dxdt \tag{2.3.13}$$

En utilisant (2.3.12) et (2.3.13) dans (2.3.11), on obtient

$$Re\int_\Omega v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt\leq 0 \tag{2.3.14}$$

D'où

$$Re\int_\Omega v\overline{Nv}dxdt\leq 0$$

pour ε tend vers zéro.

D'autre part, on a

$$\int_{\Omega} x|v|^2 dxdt = 0$$

d'où $v = 0$, et par conséquent $\omega = 0$.

Théorème 2.3

L'image $R(L)$ de l'opérateur L coïncide avec F.

Démonstration

Comme F est un espace de Hilbert, on a $R(L) = F$ si et seulement si on a l'implication

$$\int_{\Omega} x^2 \mathcal{L}u\overline{f} dxdt + \int_0^1 x \left[\frac{d^2 lu}{dx^2} \frac{d^2 \overline{\varphi}}{dx^2} + \frac{dlu}{dx} \frac{d\overline{\varphi}}{dx} + xlu\overline{\varphi} \right] dx = 0. \tag{2.3.15}$$

pour $u \in E$ arbitraire et $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$, implique que f et φ sont nulles. On pose $u \in D(L_0)$ dans (3.3.15), on obtient

$$\int_{\Omega} x^2 \mathcal{L}u\overline{f} dxdt = 0.$$

et en utilisant *lemme*, on obtient $f = 0$. Conséquemment,

$$\int_0^1 x \left[\frac{d^2 lu}{dx^2} \frac{d^2 \overline{\varphi}}{dx^2} + \frac{dlu}{dx} \frac{d\overline{\varphi}}{dx} + xlu\overline{\varphi} \right] dx = 0. \tag{2.3.16}$$

L'image de l'opérateur trace l est partout dense dans l'espace de Hilbert muni de la norme :

$$\left(\int_0^1 x \left[\mid \frac{d^2\varphi}{dx^2} \mid^2 + \mid \frac{d\varphi}{dx} \mid^2 + x \mid \varphi \mid^2 \right] dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

et par conséquent $\varphi = 0$, et la présente démonstration est achevée.

Chapitre 3

Stabilité conditionnelle de la solution zéro d'un problème mixte

L'objectif principal de ce chapitre est de résoudre l'équation (3.1.1), en appliquant la méthode de l'équilibre harmonique, et la méthode de l'énergie.

La méthode de l'équilibre harmonique fournit une technique générale pour le calcul des approximations des solutions périodiques des équations différentielles . Elle correspond à une série de Fourier tronquée et permet la détermination systématique des coefficients des différentes harmoniques et la fréquence angulaire. L'importance de cette méthode est qu'elle peut être appliquée aux équations différentielles pour lesquelles les termes non linéaires ne sont pas petits.

Dans ce chapitre, nous examinons la stabilité conditionnelle de la solution zéro d'un problème mixte.

3.1 Position du problème

Nous appliquons la méthode de l'énergie pour étudier la stabilité de la solution à d'un problème,

$$u_t = u_{xx} + au^3 - \frac{1}{2}tu, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \tag{3.1.1}$$

où a est une constante positive, supposons maintenant (3.1.1) détient sur la région spatiale (0,1) avec des conditions aux limites

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \tag{3.1.2}$$

et supposons que nous souhaitons étudier le comportement des u sous réserve de donnée initiale

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{3.1.3}$$

Faisons maintenant u une solution de (3.1.1) et (3.1.3) qui satisfait les conditions initiales. Nous définissons une énergie $F(t)$ par

$$F(t) = \frac{1}{2}t \parallel u \parallel^2,$$

où $\parallel . \parallel$ désigne la norme sur $L^2(0,1)$, plus précisément

$$\parallel u \parallel^2 = \int_0^1 u^2 dx.$$

Théorème 3.1

si $\|u\| < \frac{1}{a\pi^2}$, alors $\|u\| \to 0$ pour $t \to +\infty$.

Démonstration

Multiplions l'équation différentielle (3.1.1) par u et intégrons sur (0,1), on trouve

$$\int_0^1 u_t u dx = \int_0^1 u u_{xx} dx + a \int_0^1 u^4 dx - \frac{1}{2}t \int_0^1 u^2 dx, \tag{3.1.4}$$

utilisons l'inégalité (voir B.Straughan [44])

$$\int_0^1 u^4 dx \leq \frac{1}{4} \left(\int_0^1 u_x^2 dx \right)^2. \tag{3.1.5}$$

D'où

$$E(t) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 \left(= \int_0^1 u^2(x,t) dx \right).$$

Cette équation devient

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq - \parallel u_x \parallel^2 + a \parallel u_x \parallel^4 - tE(t).$$

Ou

$$\frac{d}{dt} F(t) \leq -a \parallel u_x \parallel^2 \left(\frac{1}{a} - \parallel u_x \parallel^2 \right). \tag{3.1.6}$$

A partir de l'inégalité de Poincaré $\pi^2 \parallel u \parallel^2 \leq \parallel u_x \parallel^2$ que l'on l'utilise dans (3.1.6), on trouve

$$\frac{d}{dt} F(t) \leq -a\pi^2 \parallel u \parallel^2 \left(\frac{1}{a} - \pi^2 \parallel u \parallel^2 \right), \tag{3.1.7}$$

où $0 < \frac{1}{a} - \pi^2 \parallel u \parallel^2 = \eta$.

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -a\pi^2 \parallel u \parallel^2 \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} - \pi \parallel u \parallel \right) \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + \pi \parallel u \parallel \right),$$

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -\eta a\pi^2 \parallel u \parallel^2, \tag{3.1.8}$$

donc (3.1.8) montre que

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq 0, \; for \; \epsilon < t, \tag{3.1.9}$$

et par conséquent, on a

$$\parallel u(t) \parallel \leq \parallel u(\epsilon) \parallel,$$

avec les même considérations, on obtient

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -a\pi^2 \parallel u \parallel^2 \eta, \tag{3.1.10}$$

de plus

$$\frac{dF}{F} \leq -c\frac{dt}{t},$$

où

$$c = 2a\pi^2\eta.$$

D'où

$$dln\left(F(t)\right) \leq dln(t^{-c}).$$

Intégrons sur l'intervalle (ϵ, t), on obtient

$$ln\left(\frac{F(t)}{F(\epsilon)}\right) \leq ln(\frac{t^{-c}}{\epsilon^{-c}}),$$

et

$$F(t) \leq F(\epsilon) \times \frac{\epsilon^c}{t^c}, \tag{3.1.11}$$

on substituant $F(t)$ par sa valeur $F(t) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2$, on obtient

$$\parallel u(t) \parallel^2 \leq 2\frac{\epsilon^\gamma}{t^\gamma} \parallel u(\epsilon) \parallel^2, \; tel\,que\, \gamma = c + 1. \tag{3.1.12}$$

Donc on a montré que si $\parallel u(\epsilon) \parallel < \frac{1}{2a}$, alors $\parallel u(t) \parallel \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. Donc la solution zéro du problème (3.1.1)-(3.1.3) est stable ce qui achève la démonstration.

3.2 Méthode d'équilibre harmonique

En faisant une intégration par parties de l'équation (3.1.4), on obtient

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq - \parallel u_x \parallel^2 + a \parallel u^2 \parallel^2 - tE(t).$$

Cette équation devient

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq - \parallel u_x \parallel^2 + a \parallel u^2 \parallel^2 .$$

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -a \parallel u_x \parallel^2 \left(\frac{1}{a} - max_{S_{adm}} \frac{\parallel u^2 \parallel^2}{\parallel u_x \parallel^2}\right)$$

où S_{adm} est l'espace des fonctions admissibles sur lesquelles nous cherchons un maximum

$$S_{adm} = \{u \in C^2 \mid u = 0 \; when \; x = 0, 1\}.$$

Définissant R_F par

$$\frac{1}{R_F} = max_{S_{adm}} \frac{\parallel u^2 \parallel^2}{\parallel u_x \parallel^2}.$$

L'inégalité d'énergie (3.1.6) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -a \parallel u_x \parallel^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_F}\right),$$

le problème est donc de trouver R_F. Rappelons que

$$R_F^{-1} = max_{S_{adm}} \frac{\parallel u^2 \parallel^2}{\parallel u_x \parallel^2}.$$

Posons $\Lambda_1 = \parallel u^2 \parallel^2$, $\Lambda_2 = \parallel u_x \parallel^2$. Les équations d'Euler Lagrange sont trouvés à par

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}\frac{\Lambda_1(u+\epsilon\tau)}{\Lambda_1(u_x+\epsilon\tau_x)} \mid_{\epsilon=0} &= \delta\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}\right),\\ &= \frac{\Lambda_2\delta\Lambda_1 - \Lambda_1\delta\Lambda_2}{\Lambda_2^2}\\ &= \frac{1}{\Lambda_2}\left(\delta\Lambda_1 - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}|_{max}\delta\Lambda_2\right)\\ &= \frac{1}{\Lambda_2}\left(\delta\Lambda_1 - \frac{1}{R_F}\delta\Lambda_2\right).\end{aligned}$$

Par δ, on entend la dérivative évaluée à $\epsilon = 0$. $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ est, lien entendu, la valeur stationnaire ici entendue comme étant à la valeur stationnaire. Donc,

$$\delta\Lambda_1 - \frac{1}{R_F}\delta\Lambda_2 = 0. \tag{3.2.1}$$

D'où

$$\delta\Lambda_1 = \frac{d}{d\epsilon}\int_0^1 (u+\epsilon\tau)^4 dx \mid_{\epsilon=0},$$

où τ est arbitraire dans $C^2(0,1)$ tel que $\tau(0) = \tau(1) = 0$, et

$$\delta\Lambda_1 = \frac{d}{d\epsilon}\int_0^1 (u_x+\epsilon\tau_x)^2 dx \mid_{\epsilon=0} .$$

Donc, (3.2.1) conduit à

$$\int_0^1 2u^3\tau - R_F^{-1}u_x\tau_x dx = 0.$$

Une intégration par parties montre que

$$\int_0^1 \left(u_{xx} + 2R_F u^3\right)\tau dx = 0.$$

τ est arbitraire. En dehors des exigences de continuité et de conditions aux limites, on obtient

$$u_{xx} + 2R_F u^3 = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{3.2.2}$$

Il est difficile de résoudre les équations différentielles non linéaires et, en général, il est souvent plus difficile d'obtenir une approximation numérique pour un système oscillatoire non linéaire donné. Les plus utilisées sont les méthodes de perturbations.

La méthode de perturbation Lindstedt Poincaré donne une solution analytique comme une série de puissances d'un paramètre petit. Pour contourner cette limitation, de nombreux nouveaux perturbatifs techniques ont été développées tels que les techniques de Lindstedt Poincaré modifiés et l'homotopie. Une récente étude peut être trouvée dans A.Beléndez, A.Hernández, T.Beléndez, M.L.Álvarez, S.Gallego, M.Ortuño, C.Neipp [3].

La seconde équation pour (3.2.2), peut être reformulé par deux systèmes d'équations du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = -2R_F u^3$$

sous réserve des conditions initiales

$$u(0) = u(1) = 0$$

La méthode de l'équilibre harmonique fournit une technique générale pour le calcul des approximations des solutions périodiques des équations différentielles, qui régissent des phénomènes Dynamique R.E. Mickens [39].

Elle correspond à une série de Fourier tronquée et permet la détermination systématique des coefficients des différentes harmoniques et la fréquence angulaire. Le $n - i\grave{e}me$ ordre approximation prend une forme telle que

$$u_n(t) = a_1 cos(\theta) + a_2 cos(3\theta) + a_3 cos(7\theta) + ... + a_n cos((2n-1)\theta), \quad (3.2.3)$$

où $\theta = \omega_n t$ et les $n-$coefficients et ω_n sont à déterminer. Pour un système conservateur avec des conditions initiales, $u(0) = 0$, et $u_x(0) = A$, la stratégie de base consiste est de remplacer l'équation (3.1.1) dans l'équation différentielle et d'élargir l'expression résultant en une série trigonométrique, on obtient des relations de type

$$\begin{gathered} H_1(a_1, a_2, ..., a_n, \omega_n) cos(\theta) + H_2(a_1, a_2, ..., a_n, \omega_n) cos(3\theta) + \\ H_3(a_1, a_2, ..., a_n, \omega_n) cos(7\theta) + H_4(a_1, a_2, ..., a_n, \omega_n) cos(9\theta) + \\ + ... + H_n(a_1, a_2, ..., a_n, \omega_n) cos((2n-1)\theta) + HOH \simeq 0, \end{gathered} \quad (3.2.4)$$

où HOH signifie ordre supérieur -harmoniques, et pour un différentiel donné les équation $H_i(a_1, a_2, ..., a_n, \omega_n) = 0$ sont tout à fait déterminées. La procédure d'équilibre harmonique consiste à fixer les coefficients des termes en cosinus à zéro, c'est à dire.,

$$H_i(a_1, a_2, ..., a_n, \omega_n) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Ces $n-$relations , ainsi que les conditions initiales , peuvent être résolus et donner tous les coefficients ω_n en fonction de B, c'est à dire,

— $a_i = a_i(B); \quad i = 1, 2, ..., n;$
— $\omega_n = \omega_n(B);$

On a

$$\frac{dv}{du} = -2R_F \frac{u^3}{v}, \quad (3.2.5)$$

$$u(0) = 0, \quad v(0) = A. \quad (3.2.6)$$

Cette approximation prend la forme

$$u_1 = asin(\omega_1 x), \quad (3.2.7)$$

et cherchons les conditions sur le paramètre a afin d'obtenir la stabilité de la solution nulle de notre problème.

Remarquons que cette expression satisfait automatiquement les conditions initiales. Substituer Eq. (3.2.7) dans l'équation. (3.2.2) donne ($\theta = \omega_1 x - \frac{\pi}{2}$)

$$-a\omega_1^2 cos(\theta) + a^3 \alpha cos^3(\theta) \simeq 0, \quad \alpha = 2R_F.$$

$$-a\omega_1^2 cos(\theta) + a^3 \alpha \left(\frac{3}{4} cos(\theta) + \frac{1}{4} cos(3\theta)\right) \simeq 0.$$

$$\left(\frac{3}{4} a^3 \alpha - a\omega_1^2\right) cos(\theta) + higher\ harmonic \simeq 0.$$

Donner la valeur zéro aux coefficient de $cos(\theta)$ permet l'obtention de la première approximation à la fréquence angulaire

$$\omega_1(a) = a\sqrt{\frac{3}{4}\alpha}.$$

et

$$u_1 = a \quad sin(a\sqrt{\frac{3}{4}\alpha x}),$$

où nous avons pris $a = 1$, puisque nous sommes principalement intéressés par R_F et pas u. La condition $u(1) = 0$ montre que

$$\sqrt{\frac{3}{2} R_F} = n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2 \cdots .$$

Cela donne une suite infinie de valeurs pour R_F (correspondant à des valeurs fixes du quotient $\frac{\|u^2\|^2}{\|u_x\|^2}$),

$$R_F = \frac{2}{3}\pi^2, \frac{8}{3}\pi^2 \cdots .$$

Pour la stabilité, nous avons besoin de la condition $a < R_F(min)$, d'où $R_F = \frac{2}{3}\pi^2$. En particulier, pour

$$a < \frac{2}{3}\pi^2.$$

on obtient la stabilité de la solution à zéro du problème (3.1.1)-(3.1.3).

Bibliographie

[1] T.Bahloul, M.Bouzit, A third-order non-local problem with boundaryintegral condition for a parabolic equation, *International Journal of Applied Mathematical Research*, 4 (2015) 15-23.

[2] T.Bahloul, M.Bouzit, Conditional energy stability of the zero solution to the boundary-initial value problem, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4 (2016) 3395–3400.

[3] A.Beléndez, A.Hernández, T.Beléndez, M.L. Álvarez, S. Gallego, M.Ortuño, C.Neipp, Application of the harmonic balance method to a nonlinear oscillator typified by a mass attached to a stretched wire, *Journal of Sound and Vibration*, 302 (2007) 1018–1029.

[4] L.Bougoffa, A third-order non-local problem with non local conditions, *IJMMS,* 28 (2004) 1503-1507.

[5] L.Bougoffa, Parabolic equations with nonlocal conditions, *Applied Mathematical Sciences*, 21 (2007) 1041 -1048.

[6] N.Bourbaki, élément de mathématique, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, (2007).

[7] A.Bouziani, Initial boundary value problem with a nonlocal condition for a viscosity equation, *IJMMS*, 30 (2002) 327–338.

[8] A.Bouziani, N.E.Benouar, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations hyperboliques, *Bull Belg Math Soc*, 3 (1996) 137-145.

[9] M.Bouzit, Problèmes aux limites avec conditions aux bords non locales, *Thèse de doctorat*, (2006).

[10] M.Bouzit, N.Teyar, A Class of Third Order Parabolic Equations with Integral Conditions, *Int Journal of Math Analysis*, 18 (2009) 871 - 877.

[11] M.Bouzit, T.Bahloul, Boundary value problem with mixed conditions classicals and non-local, *Far East Journal of Applied Mathematics*, 65 (2012) 107 - 122.

[12] H.Brézis, Analyse Fonctionnelle théorie et applications, *Masson*, (1987).

[13] H.Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi- groupes de contradictions dans les de Hilbert, *North-Holland publishing Company-Amterdam*, (1973).

[14] Z.Cui, Z.Yang, Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition, *J Math Anal Appl*, 342 (2008) 559–570.

[15] M.Denche, A.L.Marhoune, Mixed problem with non local boundary conditions for a third-order partial diffrential equation of mixed type, *Int J Math Sci*, 26 (2001) 417-426.

[16] A.A.Dezin, Théorèmes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels, *Usp Math Naouk*, 14 (1987) 73.

[17] I.Ellouze, Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs, *Thèse de doctorat*, (2010).

[18] K.Friderichs, Symetric hyperbolic linear differential equation, *Comm pure appl math*, 7 (1954).

[19] L.Garding, Cauchy's problem for hyprbolic equations, *University of chicago lecture notes*, (1957).

[20] J.Genet, G.Pupion, analyse moderne résumé de cours et exercices corriges, *Librairie Vuibert*, (1971).

[21] P.A.Guihéneuf, Propriétés dynamiques génériques des homéomorphismes conservatifs, *Ensaios matematicos*, 22 (2012) 1–115.

[22] C.Goffman, T.Nishiura, D.Waterman, Homeomorphisms in Analysis, *Mathematical Surveys and Monographs*, 54 (1997).

[23] V.A.Gooling, I.N.Ionkin, A.V.Morozova, Difference shemes with nonlocal boundary conditions, *Computational methods in applied mathematics*, 11 (2001) 62–71.

[24] D.Gordeziani, G.Avalishvili, Investigation of the nonlocal initial boundary value problems for some hyperbolic equations, *Hiroshima Math J*, 31 (2001) 345–366.

[25] W.Hahn, Stability of Motion, *Springer Verlag*, (1967).

[26] A.Hameida, Sur une classe de problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles avec conditions aux bords non standards, *Thèse de doctorat.*

[27] D.Juntang, L.I.Shengjia, Blow up solutions for a class of nonlinear parabolic equations with mixed boundary conditions, *Journal of Systems Science and Complexity*, 18 (2005) 265-275.

[28] D.W.Jordan, P.Smith, Nonlinear Ordinary Differential Equations Problems and Solutions , *Oxford New York*, (2007).

[29] F.Lakhal, Sur une classe de problèmes aux limites avec conditions aux bords de type intégrales, *Thèse de doctorat*, (2010).

[30] J.Leray, Lecture on hypebolic differential equations with variable coefftiens, *Princeton Justfor adv Study*, (1952).

[31] A.L.Marhoune, F.Lakhal, A boundary value problem with multivariables integral type condition for parabolic equations, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis* , (2009) 1-13.

[32] F.Mesloub, Etude de quelques classes d'equations et systèmes d'equations aux dérivées partielles, *Thèse de doctorat.*

[33] S.Mesloub, A.Bouiani, N.Kechkar, A strong solution of an evolution problem with integral conditions , *Georgian Mathematical Journal*, 9 (2002) 149–159.

[34] A. Merad, A.L. Marhoune Strong solution for a high order boundary value problem with integral condition, *Turkish Journal of Mathematics*,37(2013) 299-307.

[35] A. Merad, A. Bouziani, C. Ozel, Inversion Laplace transform for Integrodifferential Parabolic Equation with Purely Nonlocal conditions , *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44(2015) 1087–1097.

[36] A. Merad, A. Bouziani, C. Ozel, A. Kilicman, On Solvability of the Integrodifferential hyperbolic Equation with Purely Nonlocal conditions , *Acta Mathematica Scientia*, 35(2015) 601-609 .

[37] A. Merad, A. Bouziani, S. Araci, Existence and Uniqueness of a Solution for Pseudohyperbolic equation with Nonlocal Boundary Condition , *Applied Mathematics and Information Sciences* , 9 (2015) 1-7 .

[38] A. Merad, J. M. Vaquero, Galarkin method for two-dimensional Hyperbolic integrodifferential equation with purely integral conditions, *Applied Mathematics and Computation* ,291 (2016) 386–394

[39] E.R.Mickens, Oscillations in Planar Dynamics Systems, *World Scientific, Singapore*, (1996).

[40] E.R.Mickens, Truly Nonlinear Oscillators An Introduction to Harmonic Balance, Parameter Expansion, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd*, (2010).

[41] C.V.Pao, Reaction diffusion equations with nonlocal boundary and nonlocal initial condition, *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 195 (1995) 702-718.

[42] I.G.Petrovsky, Uber Das Cauchyshe problem for system von linearen partiallen differentilgeichungen in gebit der nichtanalystischen funktionen, *bull Univ d'etat moscow*, 7 (1938) 1-74.

[43] G.Pichon, Groupes de lie représentations linéaires et applications, *Harmann*, (1973).

[44] B.Straughan, The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection, *SpringerVerlag Berlin Heidelberg New York*, (2004).

[45] N.Teyar, Problèmes mixtes pour equations aux dérivées partielles avec conditions aux bords intégrales, *Thèse de doctorat*, (2014).

[46] Z.Ye, X.Xu, Global existence and blow-up for a porous medium system with nonlocal boundary conditions and nonlocal sources, *Nonlinear Analysis*, 82 (2013) 115–126.

[47] N.I.Yurchuk, Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form $(\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}}) + A$, *Differetial Equations*, 10 (1974) 735-737.

[48] N.I.Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, *Differential Equations*, 22 (1986) 1457-1463.