الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة العربي بن مهيدي
- أم البواقي -

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحيـاة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
الرقم:2024/04

شهـادة إداريـة

بناءا على محضر اللجنة العلمية لقسم الرياضيات والإعلام الآلي رقم: 08، بتاريخ 01 جويلية 2024 المتضمن تعيين خبراء لتقييم مطبوعة الدروس المقدمة من طرف:

الأستاذ(ة): بوصفصاف عصام

تحت عنوان: Cours d’analyse 3 avec exercices corrigés

وبناءا على محضر اللجنة العلمية للقسم رقم: 09، بتاريخ: 06 أكتوبر 2024 المتضمن المصادقة على إيجابية تقارير الخبراء.

يشهد السيد رئيس اللجنة العلمية للقسم بأنه تم اعتماد مطبوعة الدروس المذكورة أعلاه كمرجع علمي.

سلمت هذه الشهادة بطلب من المعني لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون.

أم البواقي: 07 أكتوبر 2024
رئيس اللجنة العلمية للقسم

رئيس اللجنة العلمية لقسم
الرياضيات والإعلام الآلي
أ.د بورويس عبد الحبيب

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI

- OUM EL BOUAGHI -

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques et Informatique

Cours d'Analyse 3

avec Exercices Corrigés

Proposé par :

Dr. BOUSAFSAF ISSAM

Mai 2024

Table des matières

Introduction

Le module d'analyse 3 est très important dans tous les domaines techniques, car il constitue la base de la plupart des modules de mathématiques (même pour les modules d'autres spécialités techniques), c'est un complément de module Analyse 1 et 2 du première année universitaire.

L'objectif de ce polycopié est de présenter un cours complet sur le module Analyse 3, destiné en particulier aux étudiants de deuxième année licence mathématiques, mais qui peut également être utile aux étudiants d'autres spécialités techniques telles que : l'informatique, la physique, , science et techniques (ST) ,science de matériaux (SM) ... etc.

Dans ce polycopé, nous mettons la lumière sur le sens de somme infinies dans le cas discret (série) et dans le cas continu (l'intégrale). L'étudiant apprend les différentes techniques et méthodes pour étudier les différents types de convergence des suites et séries ainsi que des intégrales.

Nous avons simplifié et expliqué au maximum ce polycopé pour le rendre accessible aux étudiants, en présentant les concepts (séries numériques, suites et séries de fonctions, séries entières et de Fourier, intégration impropre, intégration en fonction de paramètres, convergence simple et absolue, convergence uniforme ainsi que la convergence normale, ... etc.) sous différentes formes, appuyées par des exemples illustratifs et quelques remarques importantes, les preuves des théorèmes et des propositions de ce polycopié sont simplifiées, et les solutions détaillées sont données aux exercices proposés dans les séries d'exercices.

Ce polycopié est divisé en 7 chapitres, le premier chapitre est le chapitre principal qui contient le concept des séries numériques, et divers critères pour étudier la convergence de ces séries, ces concepts et critères sont utilisés et généralisés dans les suivants chapitres.

Dans le chapitre 2, nous introduisons les suites de fonctions, définissons les différents types de convergence de ces suites et expliquons les relations entre eux. Nous terminons ce chapitre par quelques propriétés importantes (continuité, dérivabilité et intégrabilité) de la convergence uniforme de la suite de fonctions.

Dans le troisième chapitre, nous définissons les séries de fonctions, nous expliquons la relation et la différence entre les séries de fonctions et les séries numériques et nous présentons les critères qui garantissent les différents types de convergence (simple, absolue et uniforme, ainsi que la convergence normale). Nous donnons également, comme dans le chapitre 2, quelques résultats fondamentaux concernant les séries qui convergent uniformément (continuité, dérivabilité et intégrabilité terme à terme).

Dans le chapitre 4, nous étudions un type particulier de séries de fonctions, à savoir les séries entières. Outre l'étude des différents types de convergence et des propriétés de continuité, de dérivabilité indéfiniment terme à terme, et d'intégrabilité terme à terme, nous donnons des exemples de fonctions qui peuvent être développées en séries entières, et nous examinons certaines de leurs utilisations dans la résolution d'équations différentielles et le calcul de la somme de certaines séries numériques.

Dans le chapitre 5, nous étudierons un autre type de séries de fonctions qui sont les séries de Fourier, nous donnerons les propriétés de ces séries, et nous présenterons également les théorèmes et critères pour qu'une fonction puisse être développée dans une série trigonométrique (critère de Dirichlet,...), et pour calculer la somme de certaines séries numériques (Parseval,...).

Dans le chapitre 6, nous aborderons le sujet des intégrales généralisées et étudions la convergence et les propriétés des intégrales généralisées à la fois pour les intégrales généralisées sur un intervalle non borné et pour pour les intégrales généralisées d'une fonction non bornée.

Dans le dernier chapitre, nous introduisons les fonctions définies par une intégrale ou les intégrales dépendant d'un paramètre, nous étudions les différents types de convergence, et nous donnons les propriétés (continuité, différentiabilité et complétude) des fonctions définies par une intégrale, présentons également quelques fonctions spéciales.

Dans ce polycopié, on termine chaque chapitre par une série d'exercices qui abordent tous les concepts présentés dans chaque chapitre.

Chapitre 1

Séries Numériques

Dans cette partie nous nous intéressons aux séries numériques réelles ou complexes, on étudié la nature de ces série (convergence ou divergence). Nous limiterons les énoncés au cas de séries de terme général réel. Cependant, les séries de terme général complexe sont traitées de manière similaire, à condition de remplacer la valeur absolue par le module.

1.1 Séries à termes réels ou complexes

1.1.1 Suite des Sommes Partielles

Série à termes réels

Définition 1.1 – *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle série numérique réelle (i.e. série a termes réels) de terme général u_n, et on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n} u_n$ ou $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ toute expression de la forme :*

$$u_0 + u_1 + ... + u_n + ... = \sum_{n\geq 0} u_n, \tag{1.1}$$

où les nombres réels $u_0, u_1, ..., u_n, ...$ sont appelés termes de la série.

– *La somme de $(n+1)$ premiers termes de la série $\sum u_n$ qui sera noté $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, est appelé somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$, et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.*

Série à termes complexes

Définition 1.2 – *On appelle série a termes complexes (respectivement série complexe), toute série $\sum_{n\geq 0} u_n$ dont le terme général u_n s'écrit sous la forme*

$$u_n = a_n + ib_n \ , \tag{1.2}$$

où $a_n, \ b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ sont réels.

– *La suite (S_n) des sommes partielles d'ordre n de la série complexe $\sum u_n$ est donnée par*

$$S_n = A_n + iB_n \text{ où } \begin{cases} A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + ... + a_n; \\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = b_0 + b_1 + ... + b_n. \end{cases}$$

Remarque 1.1 – *Si la suite $(u_n)_{n\geq p}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang $n = p$. La série ne sera alors définie qu'à partir de ce rang, elle est définie par $\sum_{n\geq p} u_n$, il en est de même pour la suite des sommes partielles qui lui est associée donnée par $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$.*

– *Le terme général u_n de la série $\sum u_n$ est lié à la somme partielle S_n par la relation*

$$u_n = S_n - S_{n-1}. \tag{1.3}$$

Exemple 1.1

1. *Considérons la série de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n\,(n+1)}, n \geq 1. \tag{1.4}$$

La suite des sommes partielles associée est donnée par :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

2. *Considérons la série des entiers strictement positifs i.e.*

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} n. \tag{1.6}$$

La suite des sommes partielles associée est donnée par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 0 + 1 + 2 + \ldots$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.7}$$

1.1.2 Convergence d'une série numérique

Définition 1.3 – *Soit (u_n) une suite réelle, et (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. On dit que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite (S_n) converge, sinon on dit que la série $\sum u_n$ diverge.*

- *On dit que la série complexe $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, les deux séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergente séparément.*
- *Lorsque la série réelle $\sum u_n$ est convergente, le nombre $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ s'appelle somme de la série $\sum u_n$, et on écrit $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*
- *La somme de la série complexe convergente $\sum u_n$ est $S = A+iB$ où $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ et $B = \lim\limits_{n\to+\infty} B_n$.*

Exemple 1.2

1. *Prenons la série du terme général qui donné par l'expression (1.4), on a*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

alors la série $\sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{n\,(n+1)}$ est convergente de somme $S = 1$, et on écrit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1.$

2. *Pour la série des entiers positifs (1.6), elle diverge car*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty.$$

Remarque 1.2 – *Si la série complexe $\sum u_n$, du terme général (1.2), est convergente de somme $S = A + iB$, dans ce cas A est la somme de la série réelle $\sum a_n$ et B est la somme de la série réelle $\sum b_n$.*

- *Si une des sériés réelle $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont divergente, alors la série complexe du terme général (1.2) est divergente.*
- *La définition précédente donne une condition nécessair et suffisante de convergence des séries numériques réelles ou complexes.*

– *On ne change pas la nature d'une série numérique en modifiant un nombre fini de ses termes.*

Exemple 1.3 *On sait que la série du terme général donné par (1.4) est convergente de somme $S = 1$. En enlevant les trois premiers termes, la série sera donc $\sum_{n\geq 4} \frac{1}{n(n+1)}$, la suite des sommes partielles est $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1}$, sa limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$ est $\frac{1}{4}$, alors la série $\sum_{n\geq 4} \frac{1}{n(n+1)}$ reste convergente mais de somme $S = \frac{1}{4} \neq 1$.*

Théorème 1.1 *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors son terme général u_n tend vers 0.*

Preuve. Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge de somme S, donc la suite de somme partielle converge vers S aussi, d'après la formule(1.3) on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

Remarque 1.3 – *Le théorème précédant donne une condition nécessaire pour qu'une série numérique soit convergente.*

– *La contraposée de la proposition du théorème précédent est vraie, c'est-à-dire que pour qu'une série soit divergente, son terme général ne tend pas vers zéro. Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est appelée série grossièrement divergente.*

– *La réciproque de la proposition est fausse généralement. En effet, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (s'appelle la série harmonique) est divergente (nous le verrons plus tard), mais son terme général $\frac{1}{n}$ tend pas vers 0.*

Définition 1.4 *Une somme télescopique est une série de la forme $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$.*

Théorème 1.2 *La suite (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge, de plus, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, la somme de la série est $S = l - u_0$.*

Preuve. Soit (u_n) une suite numérique. La somme partielle S_n de la série $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0,$$

et en passant à la limite dans les deux côtés, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_0,$$

alors la série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge, si la suite (u_n) converge vers l, la série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge de somme $S = l - u_0$. ■

Exemple 1.4 *Considérons la série du terme général (1.4), elle peut être écrite comme somme télescopique suivante*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = -\sum_{n\geq 1}(v_{n+1}-v_n).$$

où (v_n) est une suite dont le terme général est $v_n = \frac{1}{n}$; $n \geq 1$. Il est clair que cette suite converge vers zéro, donc la série $\sum_{n\geq 1}(v_{n+1}-v_n)$ converge de somme $S = 0 - v_0 = -1$, alors $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme $S' = 1$.

1.1.3 Reste d'une série convergente

Définition 1.5 *Soit la série convergente $\sum_{n\geq 0} u_n$, la suite (R_n) à terme général définie par*

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \tag{1.8}$$

s'appelle suite des restes d'ordre n de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 1.1 *Si une série numérique réelle ou complexe $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente alors son reste d'ordre n converge vers zéro.*

Preuve. Il suffit de passer à la limite lorsque n et à linfini dans l'expression (1.8). ■

Exemple 1.5 *Reprenons la série du terme général (1.4), la suite des restes d'ordre n est*

$$R_n = S - S_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1.1.4 Série Géométrique

Définition 1.6 *On appelle séries géométriques toute série de terme général $u_n = ar^n$, où a et r sont des nombres réels ou complexes donnés ($a \neq 0$ est le premier terme et r s'appelle la raison de la série géométrique).*

Proposition 1.2 *La série géométriques $\sum_{n\geq 0} ar^n$ converge pour $|r| < 1$, et diverge ailleurs.*

Preuve. La somme partielle de la série géométriques $\sum_{n\geq 0} ar^n$ est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ... + ar^n. \tag{1.9}$$

Multipliant les deux côtés de l'égalité (1.9) par r, on obtient

$$rS_n = ar + ar^2 + ... + ar^{n+1}. \tag{1.10}$$

Soustrayez (1.10) de (1.9), on obtient

$$(1-r)\,S_n = a - ar^{n+1}, \tag{1.11}$$

donc la somme partielle S_n est donnée par

$$S_n = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \tag{1.12}$$

Il est clair que si $|r| < 1$ la suite (S_n) converge vers $\frac{a}{1-r}$, alors la série géométrique $\sum_{n\geq 0} ar^n$ converge de somme $S = \frac{a}{1-r}$, et elle diverge pour $|r| \geq 1$. ■

Exemple 1.6
1. *La série numérique suivante $\sum_{n\geq 0} \frac{3}{2^n}$ est une série géométrique du premier terme $u_0 = 3$ et du raison $r = \frac{1}{2} < 1$, donc elle est convergente de somme $S = 6$.*
2. *La série numérique $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ est une série géométrique du premier terme $u_0 = 1$ et du raison $r = \frac{3}{2} > 1$, donc elle est divergente.*
3. *Dans cet exemple on cherche la nature et la somme des séries réelles suivantes $\sum_{n\geq 0} \rho^n \cos(n\theta)$ et $\sum_{n\geq 0} \rho^n \sin(n\theta)$ où $0 < \rho < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Considérons la série complexe suivante*

$$\sum_{n\geq 0} \rho^n \exp(in\theta). \tag{1.13}$$

La série complexe (1.13) est une série géométrique de raison $r = \rho \exp(i\theta)$, *elle converge car* $|\rho^n \exp(i\theta)| = \rho \in]0,1[$ *de somme*

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1-\rho\exp(i\theta)} = \frac{1}{1-\rho\cos\theta - i\rho\sin\theta} \\ &= \frac{1-\rho\cos\theta}{1-\rho^2-2\rho\cos\theta} + i\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho^2-2\rho\cos\theta}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

En utilisant la formule de Moivre

$$\rho^n \exp(in\theta) = \rho^n \cos(n\theta) + i\rho^n \sin(n\theta), \tag{1.15}$$

et expressions (1.13-1.15), les séries $\sum_{n\geq 0} \rho^n \cos(n\theta)$ *et* $\sum_{n\geq 0} \rho^n \sin(n\theta)$ *sont convergentes des sommes* $S_1 = \dfrac{1-\rho\cos\theta}{1-\rho^2-2\rho\cos\theta}$ *et* $S_2 = \dfrac{\rho\sin\theta}{1-\rho^2-2\rho\cos\theta}$ *respectivement.*

1.1.5 Espace vectoriel des séries convergentes

Définition 1.7 – *On appelle somme de deux séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$, *la série de terme général* $(u_n + v_n)$, *et on écrit*

$$\sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 0} (u_n + v_n).$$

– *On appelle produit d'une série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *par le nombre réel ou complexe* λ, *la série de terme général* λu_n, *et on écrit*

$$\lambda \sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} \lambda u_n.$$

Proposition 1.3 *l'ensemble des séries convergentes forme un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les séries numériques.*

Preuve. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques réelles ou complexes convergente de sommes S_1 et S_2 respectivement, et soit λ un nombre réel ou complexe, la série suivante $\sum_{n\geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ est une série numérique convergente de somme $S_1 + \lambda S_2$, en effet, $\sum_{n\geq 0} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \lambda \sum_{n\geq 0} v_n$. ∎

Exemple 1.7 *La série* $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{3}{2^n} \right)$ *est convergente car les deux séries* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *et* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ *sont convergentes de somme* $S_1 = 1$ *et* $S_2 = 1$ *(la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ *est une série géométrique* *de raison* $r = \frac{1}{2} < 1$ *et de premier terme* $\frac{1}{2}$*), et comme* $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{3}{2^n}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)} + 3\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$*, alors la série* $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{3}{2^n}\right)$ *est convergente de somme* $S = S_1 + 3\ S_2 = 4$.

Proposition 1.4 *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n \sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries numériques réelles ou complexes. On a les propriétés supplémentaires suivantes*

1. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors la série $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ diverge.
2. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente, alors la séries $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ est une série divergente.

Preuve. 1. On a la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n$, donc la série $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ diverge.
2. Supposons que S est la somme de la série convergente $\sum_{n\geq 0} u_n$, et la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est divergente, et on sait que $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n = S + \sum_{n\geq 0} v_n$, mais la deuxième série est divergente ce qui assure la divergence de la série $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$. ■

Remarque 1.4 *Si les deux séries* $\sum_{n\geq 0} u_n \sum_{n\geq 0} v_n$ *sont divergentes, on ne peut rien dire sur la nature de la série somme* $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$*. En effet, on sait que les deux séries suivantes* $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1}$ *sont divergentes, car ses termes généraux ne tendent pas vers zéro, mais la série somme* $\sum_{n\geq 0} \left[(-1)^n + (-1)^{n+1}\right]$ *est convergente à somme nulle, ce qui garantit que l'ensemble des séries numériques divergentes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les séries numériques.*

1.1.6 Critère de convergence de Cauchy

Un autre critère pour déterminer la nature d'une série est le critère de Cauchy, qui est donné par la définition suivante.

Définition 1.8 *Une série à termes réels ou complexes* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est dite de Cauchy, si elle satisfait à la* *propriété suivante*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall q > p \geq n_0,\ \text{on a} \left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right| < \varepsilon. \tag{1.16}$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \text{on a} \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \tag{1.17}$$

Proposition 1.5 *Une série numérique réels ou complexes* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente, si et seulement si elle est de Cauchy.*

Preuve. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique réels ou complexes, et la suite (S_n) sa suite des sommes partielles, on a

$$|S_q - S_p| = \left| \sum_{k=0}^{q} u_k - \sum_{k=0}^{p} u_k \right| = \left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right|,$$

cette dernière expression assure que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est de Cauchy si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est de Cauchy i.e. convergente. ■

Exemple 1.8 *On va démontrer que la série harmonique* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente en utilisant le critère de Cauchy, car elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. Si on prend* $p = n$ *et* $q = 2n$*, on obtient*

$$\begin{aligned} |S_n - S_{2n}| &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{3} > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \exists q = 2n > p = n,\ \text{on a} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \right| > \frac{1}{2}.$$

alors, la suite des sommes partielles (S_n) *n'est pas de Cauchy, d'après le critère de Cauchy, la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est divergente.*

1.2 Séries à termes positifs

Les séries à termes positifs ou nuls se comportent comme les suites croissantes et sont donc plus faciles à étudier.

Définition 1.9 *La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite série à termes réels positifs (ou à termes positifs), si son terme général u_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque 1.5
1. *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes négatifs, Il suffit d'étudier la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ série à termes positifs où $v_n = -u_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs, sa suite des sommes partielles (S_n) est croissante. En effet, d'après la relation (1.3), on a $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, cela conduit à la croissance de la suite des sommes partielles.*

Théorème 1.3 *Une série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série convergente si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.*

Preuve. On sait que la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante, donc pour que cette suite soit convergente (même pour la série aussi), il faut et il suffit elle est majorée. ■

Exemple 1.9 *La série du terme général (1.4) est une série à termes positifs, car ce terme général est $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0,\ \forall n \geq 1$. D'après (1.5) la somme partielle de la série est*

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1.$$

on sait que $\dfrac{1}{n+1} \geq 0 \quad n \geq 1$, donc $1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$, d'où $S_n \leq 1\ n \geq 1$, alors la suite des sommes partielles est majorée, par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente.

Remarque 1.6
– *Si la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, sa somme S vérifie $S_n \leq S$; $\forall n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = S$.*
– *Si la suite des sommes partielles n'est pas majorée (i.e. $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$), alors la série à termes positifs est divergente, dans ce cas on écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.*
– *Les propriétés des séries à termes positifs restent valables pour les séries à termes positifs à partir d'un certain rang, car la nature de la série ne change pas en supprimant un nombre fini de ses termes.*

1.2.1 Critères de Comparaison

Critères de Comparaison est un moyen très important pour déterminer la nature des séries à termes positifs, on les compare avec des séries classiques simples.

Théorème 1.4 ***(Règle de comparaison)*** *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n \leq v_n$ *;* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Les propositions suivantes sont vraies.*

1- Si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, dans ce cas on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n. \tag{1.18}$$

2- Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Preuve. 1- Puisque $u_n \leq v_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $u_k \leq v_k$ pour $0 \leq k \leq n$, et l'inégalité reste valable pour les sommes partielles des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, alors on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k = S'_n. \tag{1.19}$$

Si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, d'après théorème1.3, sa somme partielle S'_n est majorée, de même pour la somme partielle S_n conformément l'inégalité (1.19), ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, et on obtient l'expression (1.18) en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'expression (1.19).

2- Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, sa somme partielle S'_n tend vers l'infini, de même pour la somme partielle S_n, ce qui assure la divergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$. ■

Exemple 1.10 *1. Considérons la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2(n\theta)}{n(n+1)}$; $\theta \in \mathbb{R}$, *cette série est une série à termes positifs, et comme* $\cos^2(n\theta) \leq 1$; $\forall n \geq 1$ *et* $\forall \theta \in \mathbb{R}$, *donc se terme général vérifie l'inégalité suivante*

$$\frac{\cos^2(n\theta)}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)};\ \forall n \geq 1\,,\ \forall \theta \in \mathbb{R},$$

mais la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *est convergente, alors la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2(n\theta)}{n(n+1)}$ *est convergente aussi d'après le théorème de comparaison1.4.*

2. *On sait que* $n \leq \dfrac{n^2+1}{n}$ $\forall n \geq 1$ *, et la série* $\sum\limits_{n\geq 1} n$ *est divergente, alors le critère de comparaison1.4, la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^2+1}{n}$ *est divergente.*

Proposition 1.6 *Soient* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs, s'il existe deux nombres* α *;* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ *telle que*

$$\alpha u_n \leq v_n \leq \beta u_n \quad \forall n \geq 0, \tag{1.20}$$

alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *sont de même nature.*

Preuve. Pour la preuve, on applique le théorème1.4 deux fois en utilisant la proposition1.3 et la proposition1.4. ■

Proposition 1.7 *(Comparaison logarithmique) : Soient* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs, si*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ pour } n \text{ assez grand,} \tag{1.21}$$

alors on a

1. *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *converge, alors la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
2. *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *diverge, alors la série* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*

Preuve. Suppose qu'à partir d'un certain rang p l'inégalité (1.21) soit satisfaite, donc on a

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \text{ pour } n \geq p, \tag{1.22}$$

et de même pour les autres termes, on obtient

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \ldots \leq \frac{u_p}{v_p} = \alpha, \tag{1.23}$$

ce qui conduit à l'inégalité $u_n \leq \alpha v_n$ $\forall n \geq p$,et en utilisant la proposition1.6, nous obtenons les propositions que nous recherchons. ■

Théorème 1.5 *Soient* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs, s'il existe* $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$$

alors, on a

1. *Si $l = 0$ (i.e. $(u_n) = o((v_n))$) et la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.*
2. *Si $l = +\infty$ (i.e. $(v_n) = o((u_n))$) et la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.*
3. *Si $l \in \mathbb{R}_+^*$ (i.e. $(u_n) = O((v_n))$), les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.*

Preuve. Pour démontrer le premier cas, il suffit d'appliquer la définition de la limite, ensuite on utilise le théorème de comparaison. En effet, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ ,\ \text{on a } \frac{u_n}{v_n} < \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = 1$, on obtient $u_n < v_n$, et d'après le théorème1.4 on trouve le résultat souhaité.

1. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$, en utilisant la même méthode précédente et la deuxième proposition du théorème1.4.
2. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ ,\ \text{on a } \left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \varepsilon.$$
Pour $\varepsilon < 1$, on obtient $(l-\varepsilon)\, v_n < u_n < (l+\varepsilon)\, v_n$, et la proposition1.6 assure que les deux séries sont de même nature.

■

1. **Exemple 1.11** *1. On va étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$, on sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =$ 1, donc*
$$\lim_{n\to+\infty} n(n+1) \sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = 1,$$
(on dit aussi que $\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \backsimeq \frac{1}{n(n+1)}$ au voisinage de $+\infty$), alors d'après le théorème précédant (pour $l = 1$) les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ sont de même nature, et comme la première converge, la deuxième est aussi.

2. Il en va de même pour la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, elle est convergente car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$

Théorème 1.6 *(Comparaison à une intégrale) : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante. La série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.*

Preuve. voir [1]. ■

Exemple 1.12 *1. Considérons la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *, Soit la fonction* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *telle que* $f(x)=\frac{1}{x}$*, cette fonction continue et décroissante, donc la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *et l'intégrale* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ *sont de même nature, comme l'intégrale* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ *est divergente, alors la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *est divergente.*

2. La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente car la fonction $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ telle que $f(x)=\frac{1}{x^2}$ est continue et décroissante, et l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge.

Remarque 1.7 *Les critères de comparaisons ne sont pas valables que pour les séries a terme général positifs, ou pour les série à termes positifs à partir d'un certaine rang.*

1.2.2 Règles de convergence

Règle de Riemann

La règle de de Riemann revient à comparer une série à termes positifs à la série de Riemann.

Définition 1.10 *On appelle série de Riemann, toute série numérique sous la forme suivante*

$$\sum_{n\geq 1} n^{-\alpha}\ ;\ \text{où } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Proposition 1.8 *La série de Riemann est convergente si et seulement si* $\alpha>1$.

Preuve.

1. Pour $\alpha\leq 0$, le terme général de la série ne tend pas vers zéro, alors la série est divergente.
2. Pour $\alpha>0$, on vas appliquer le critère de comparaison de la série avec une intégrale, on pose $f(x)=x^{-\alpha}$; $\alpha>0$ et $x>0$, cette fonction est positive, continue et décroissante sur $]0;+\infty[$, d'après le Théorème1.6, la série de Riemann et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ sont de même nature, on désigne deux cas

(a) Pour $\alpha = 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est divergente, ce qui conduit à la divergence de la série de Riemann.

(b) Pour $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^t = \begin{cases} +\infty \text{ pour } 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} \text{ pour } \alpha > 1. \end{cases}$$

par conséquence que la série de Riemann est divergente pour $0 < \alpha < 1$, et elle converge pour $\alpha > 1$.

■

Théorème 1.7 *Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, et $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tels que $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = l$, alors on a*

1. *Si $l = 0$, et $\alpha > 1$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.*
2. *Si $l = +\infty$, et $\alpha \leq 1$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.*
3. *Si $l \neq 0$, et $l \neq +\infty$, et $\alpha \leq 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ et la série de Riemann sont de même nature.*

Preuve.

1. Il suffit d'appliquer la définition de la limite, on a

$$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \text{ , on a } n^\alpha u_n < \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = 1$, on obtient $u_n < \frac{1}{n^\alpha}$, et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ($\alpha > 1$), alors la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

2. Par la même manière.
3. En utilisant (1) et (2), on obtient (3).

■

Règle de d'Alembert

Les règles de D'Alembert et de Cauchy reviennent à comparer une série à termes positifs à une série géométrique.

Théorème 1.8 *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, on a*

1. *Si $l < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.*
2. *Si $l > 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.*
3. *Si $l = 1$, on peut pas conclure.*

Preuve. En utilisant la définition de la limite, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \text{ , on a } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon,$$

donc $\varepsilon + l < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + l.$

1. Si $l < 1$, il existe ε assez petit qui garantit l'inégalité $\varepsilon + l < 1$, d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{(\varepsilon+l)^{n+1}}{(\varepsilon+l)^n}$, et la série géométrique du terme général $(\varepsilon+l)^n$ converge, d'après la proposition1.7 la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. En utilisant la même procédure pour la deuxième inégalité.

■

Exemple 1.13 *On va utiliser la règle de D'Alembert pour étudier la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$. On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1,$$

donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est convergente.

Règle de Cauchy

Théorème 1.9 *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, on a*

1. *Si $l < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.*
2. *Si $l > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.*
3. *Si $l = 1$, on peut pas conclure.*

Preuve. Par la définition de la limite, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ ,\ \text{on a } |\sqrt[n]{u_n} - l| < \varepsilon,$$

donc $\varepsilon + l < \sqrt[n]{u_n} < \varepsilon + l$.

1. Si $l < 1$, il existe ε assez petit qui garantit l'inégalité $\varepsilon + l < 1$, d'où $u_n < (\varepsilon + l)^n$, et la série géométrique du terme général $(\varepsilon + l)^n$ converge, qui assure la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.
2. En utilisant la même procédure pour la deuxième inégalité.

■

Exemple 1.14 *La série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^n$ est divergente car*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2 > 1.$$

Remarque 1.8 *La règle de Cauchy est plus puissante que la règle de D'Alembert, mais la commodité de la règle de D'Alembert fait qu'elle reste la plus utilisée.*

Règle de Raabe-Duhamel et de Gauss

Les règles de Raabe-Duhamel et de Gauss améliorent la règle de D'Alembert dans les cas où l'on ne peut pas conclure.

Théorème 1.10 *Soit $\sum\limits_{n} u_n$ une série à termes strictement positifs :*

1. *Règle de Raabe-Duhamel : Supposons que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admette un développement asymptotique du type*

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \beta \in \mathbb{R},$$

   alors

   (a) *Si $\beta < 1$, la série $\sum\limits_{n} u_n$ diverge.*

(b) *Si* $\beta > 1$, *la série* $\sum_n u_n$ *converge.*

(c) *Si* $\beta = 1$, *on ne peut pas conclure.*

2. *Règle de Gauss : Supposons que* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *admette un développement asymptotique du type*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^k}\right) \qquad \beta \in \mathbb{R} \text{ et } k > 1,$$

alors $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $u_n \sim \frac{c}{n^\beta}$ *au voisinage de* $+\infty$*, donc on a*

(a) *Si* $\alpha \leq 1$ *la série* $\sum_n u_n$ *diverge.*

(b) *Si* $\alpha > 1$ *la série* $\sum_n u_n$ *converge.*

Preuve. voir [11] ■

Exemple 1.15 1. *Considérons la série de terme général suivant*

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n} \qquad \forall n \geq 1.$$

Pour étudier la nature de cette série, on utilise la règle de D'Alembert, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1) \times (2n+1) \times 2 \times 4 \times ... \times 2n}{2 \times 4 \times ... \times 2n \times (2n+2) \times 1 \times 3 \times ... \times (2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

La règle de D'Alembert ne permet pas de conclure. Mais si en utilisant la règle de Raabe-Duhamel, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{n}} &= \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

$\beta = \frac{1}{2} < 1$*, d'après la règle de Raabe-Duhamel, la série* $\sum_n u_n$ *diverge.*

2. *Cosidérons maintenant la série de terme général*

$$u_n = \sqrt{(n-1)!}\sin 1 \times \sin\frac{1}{\sqrt{2}} \times \ldots \times \sin\frac{1}{\sqrt{(n-1)}} \quad \forall n \geq 1.$$

Si on utilise la règle de D'Alembert, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{n}\sqrt{(n-1)!}\sin 1 \times \sin\frac{1}{\sqrt{2}} \times \ldots \times \sin\frac{1}{\sqrt{(n-1)}} \times \sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{(n-1)!}\sin 1 \times \sin\frac{1}{\sqrt{2}} \times \ldots \times \sin\frac{1}{\sqrt{(n-1)}}} \\ &= \sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$

Donc on peut pas conclure. Mais si on utilise la règle de Gauss, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6\sqrt{n}^3} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{6}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Donc $\alpha = \frac{1}{6} < 1$, *d'après la règle de Gauss la série est divergente.*

Règle de convergence de la série de Bertrand

Définition 1.11 *On appelle série de Bertrand, toute série numérique dont le terme général est donné par*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Proposition 1.9 *1.*

1. *Si* $\alpha > 1$ *où* ($\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$)*, alors la série de Bertrand converge.*
2. *Si* $\alpha < 1$ *où* ($\alpha = 1$ *et* $\beta \leq 1$)*, alors la série de Bertrand diverge.*

Preuve. La démonstration est la même que pour les séries de Riemann, pour plus de détail sur la démonstration voir [1] page 92. ■

1.3 Séries à termes de signes quelconques

1.3.1 Séries semi-convergente (Convergence Absolue)

Définition 1.12 *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes réels ou complexes. Cette série est dite absolument convergente si la série à termes positifs* $\sum_n |u_n|$ *converge.*

Exemple 1.16 *1.*

2. *La série* $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ *est une série absolument divergente (n'est pas absolument convergente) car la série* $\sum_n \frac{1}{n}$ *est divergente.*

3. *Considérons la série* $\sum_n \frac{\sin(\ln n)}{n^2}$*, on a* $\left|\frac{\sin(\ln n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ *et la série* $\sum_n \frac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann convergente, d'après le théorème de comparaison la série* $\sum_n \frac{\sin(\ln n)}{n^2}$ *est une série absolument convergente.*

Proposition 1.10 *Toute série absolument convergente est convergente.*

Preuve. Supposons que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, donc la série $\sum_n |u_n|$ est convergente, donc la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p > q \geq n_0 \quad \text{on a} \quad \sum_{k=p+1}^{q} |u_k| < \varepsilon.$$

Grâce à l'inégalité triangulaire on obtient $\left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |u_k|$, ce qui signifie que la suite des sommes partielles de la série $\sum_n u_n$ est une suite de Cauchy, d'où la convergence de la série $\sum_n u_n$.

■

Remarque 1.9 *La réciproque de la proposition précédente est généralement fausse. En effet, la série* $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ *est une série convergente mais absolument divergente.*

Définition 1.13 *Toute série numérique réelle ou complexe qui converge mais n'est pas absolument convergente est appelée série semi-convergente.*

Exemple 1.17 *la série* $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ *est une série semi-convergente.*

1.3.2 Séries alternées

Définition 1.14 *On appelle série alternée toute série de terme général* $(-1)^n u_n$*, où* (a_n) *est une suite réelle de signe constant.*

Exemple 1.18 *Les séries suivantes* $\sum_n (-1)^n$, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_n (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ *sont des séries alternées, mais la série* $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ *n'est pas alternée.*

Remarque 1.10 *Si la suite* (a_n) *de signe constant, s'elle est positive on peut écrire la série sous la forme* $\sum_n (-1)^n |a_n|$, *s'elle est négative la série sera* $\sum_n (-1)^{n+1} |a_n|$.

1.3.3 Critère de Leibniz

La règle de Leibniz est un critère spécifique pour étudier la convergence des séries alternées.

Théorème 1.11 *Soit* (u_n) *une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0, alors la série alternée* $\sum_n (-1)^n u_n$ *est convergente. De plus, sa somme* S *vérifie* $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et son reste* R_n *d'ordre* n *vérifie* $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Preuve. Voir [1] page 97. ■

Exemple 1.19

1. *La série* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$ *est une série alternée est appelée série harmonique alternée.* *La suite de terme général* $a_n = \frac{1}{n}$ *est une suite décroissante vers le zéro, d'après le critère de Leibnitz, la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge.*
2. *La série* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ *est une série alternée, et la suite de terme général* $a_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$ *est une suite décroissante vers le zéro, d'après le critère de Leibnitz, la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ *converge.*

Remarque 1.11 *Dans le théorème de Leibniz, la suite* (u_n) *à termes positifs est très importante. En effet, considérons la série* $\sum_{n\geq 1} (-1)^n u_n$ *où* $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ $\forall n \geq 1$. *Il est clair que la suite* (u_n) *décroissante vers le zéro. On pose* $v_n = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - u_n\right)$; $\forall n \geq 1$, *on a*

$$\begin{aligned} v_n &= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right) \\ &= \frac{1}{n+\sqrt{n}\,(-1)^n} \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

donc $\sum_{n\geq 0} v_n$ *est une série à termes positifs et* $v_n \sim \frac{1}{n}$*, alors la série* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *est divergente, et on a* $(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - v_n$; $\forall n \geq 1$*, mais la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *série alternée converge, ce qui assure la divergence de la série* $\sum_{n\geq 1} (-1)^n u_n$.

1.3.4 Critère d'Abel

Le critère d'Abel est un outil très important pour l'étude des séries complexes ou réelles de signe non constant. Il est plus fort que le critère de Leibniz pour les séries alternées, mais il est aussi plus difficile à mettre en œuvre.

Théorème 1.12 *Soient* (a_n) *une suite réelle positive et* (b_n) *une suite réelle ou complexe satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *La suite* (a_n) *est une suite décroissante tend vers 0.*
2. *Les sommes partielles de la série* $\sum b_n$ *sont bornées, i.e.*

$$\exists M \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right| < M.$$

Alors la série $\sum a_n b_n$ *converge.*

Preuve. voir [11] ■

Exemple 1.20 *considérons la série complexe* $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$*, la suite* $\left(\frac{1}{n}\right)$ *est une suite réelle positive décroissante tend vers zéro, et on a*

$$\sum_{k=1}^{n} e^{in\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}},$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} e^{in\theta} \right| &= \left| \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \\ &\leq \frac{1}{|1 - e^{i\theta}|} + \frac{\left|e^{i(n+1)\theta}\right|}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}, \end{aligned}$$

d'après la règle d'Abel, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ *converge.*

1.4 Produit de Cauchy des séries

Définition 1.15 *Soient* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries à termes réels ou complexes, la série de terme général*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

est appelée le produit de Cauchy des séries $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$.

Théorème 1.13 *(version faible) : Soient* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries absolument convergentes, alors leur série produit de Cauchy* $\sum_n w_n$ *est absolument convergente, de plus on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Théorème 1.14 *Cauchy-Mertens (version forte) : Soient* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries convergentes, dont l'une au moins est absolument convergente. Alors leur série produit de Cauchy* $\sum_n w_n$ *est convergente, de plus on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Preuve. Voir [11]. ■

Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B

Département de MI 2023-2024

2ème Année Licence Maths(S3) Module : Analyse III

1.5 Série 1 (séries numériques)

Exercice 1 : Étudier la nature des séries suivantes :

1. a)$\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$,b)$\sum_{n\geq 1} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$, c) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{n^2}{n^2+n+1}$, d) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, e) $\sum_{n\geq 1}\cos\left(\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
(Examiner la condition nécessaire)
2. a)$\sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, b) $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{n!}$, c)$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+3n+2}$, d) $\sum_{n\geq 0}[\ln(n^2-1)-2\ln n]$. (En utilisant la somme partielle)

Exercice 2 : Calculer la somme des séries suivantes en cas de convergence

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{4^{n+1}}{5^{n-2}}$, et $\sum_{n\geq 0} 9^{1-n}(-2)^{3n}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{4^{n-1}}{3+5^{n+2}}$.
2. $\sum_{n\geq 0} nx^n$, où $0\leq x<1$.
3. $\sum_{n\geq 0}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$.

Exercice 3 : Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$.
2. $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{10^n}$, où $a_n\in[0,9]\ \forall n\in\mathbb{N}$.
3. $\sum_{n\geq 1}\arctan\frac{1}{n^2}$.

Exercice 4 : En utilisant la règle de D'Alembert, la règle de Cauchy, étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{n^2}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{n^a}{a^n}$ $a\in\mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ où $x\in\mathbb{R}_+^*$.

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{4n+3}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}, \sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \sum_{n\geq 2}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

Exercice 5 : Etudier la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}} \quad \alpha, \theta \in \mathbb{R}.$$

1.6 Correction de la série 1

Exercice 1 :

1. Les séries numériques sont divergente car le terme ne tend pas vers zéro : a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+n+1}$ =n'existe pas, d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$, e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
2. a) on pose $S_n = \sum\limits_{i=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=2}^{n} [\ln(i+1) + \ln(i-1) - \ln(i)] \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln 2 \\ &= \ln\frac{n+1}{n} - \ln 2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2, \end{aligned}$$

alors la série $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente de somme $S = -\ln 2$.

b) On pose $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{i^2}{i!}$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i-1)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!} \\ &= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!} \\ &= 2\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2e \end{aligned}$$

alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$ est convergente de somme $S = 2e$.

c) On a $\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}$, sa somme partielle est donc $S_n = 1 - \frac{1}{(n+2)} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = S$. ($S$ la somme de la série)

d) Il suffit de mettre

$$\begin{aligned} \ln(n^2-1) - 2\ln n &= \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) \\ &= \ln\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] ;\ \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

La somme partielle donc est $S_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln 2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2 = S$.

Exercice 2 :

1. On a $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{4^{n+1}}{5^{n-2}} = 4\times 5^2 \sum\limits_{n\geq 0} \frac{4^n}{5^n}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{4^n}{5^n}$ est une série géomètrique convergente de somme 5, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{4^{n+1}}{5^{n-2}}$ est une série géomètrique convergente de somme 500 d'après la linéarité. On a $\sum\limits_{n\geq 0} 9^{1-n}(-2)^{3n} = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{\left[(-2)^3\right]^n}{9^{n-1}} = 9\sum\limits_{n\geq 0}\left[\frac{(-8)}{9}\right]^n$, de la même manière que pour l'exemple précédent. On a $\frac{4^{n-1}}{3+5^{n+2}} < \frac{4^{n-1}}{5^{n+2}} \sim \frac{4^n}{5^n}$, et la série de terme général $u_n = \frac{4^n}{5^n}$ est une série géomètrique convergente, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{4^{n-1}}{3+5^{n+2}}$ est convergente d'après TC.

2. Pour étudier la série de terme général $u_n = nx^n$, on utilise la règle de D'Alembert, et on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\,x^{n+1}}{nx^n} = x < 1$$
ce qui assure la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} nx^n$. On pose
$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1+(n-1)\right]x^{n-1} \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)\,x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} + x\sum_{m=0}^{+\infty} mx^m \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} + xS \Longleftrightarrow (1-x)\,S = x\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = x\sum_{m=0}^{+\infty} x^m. \end{aligned}$$
Mais la série $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$, alors $S = \frac{x}{(1-x)^2}$.

3. On sait que $\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab} + c$ avec $c = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad ab>1 \text{ et } a>0 \text{ et } b>0; \\ -\pi & \text{si} \quad ab>1 \text{ et } a<0 \text{ et } b<0; \\ \pi & \text{si} \quad ab<1, \end{cases}$,
et on $\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1+n-n}{1+(n+1)\,n} = \frac{(1+n)+(-n)}{1+(n+1)\,(-n)}$. Si on pose $a=(1+n)$ et $b=(-n)$, on obtient
$$\begin{aligned} \arctan\frac{1}{n^2+n+1} &= \arctan\frac{(1+n)+(-n)}{1+(n+1)\,(-n)} \\ &= \arctan(1+n) + \arctan(-n) \\ &= \arctan(1+n) - \arctan(n)\,. \end{aligned}$$

formule conduisant au télescopage des termes dans la sommation des $\arctan \dfrac{1}{n^2+n+1}$, alors on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \arctan 0 - \lim_{n\to+\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3 :

1. On a par définition $n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots (n-1) \times n$, donc $(n-1)\,n \leq n!;\ \forall n \geq 2$, alors

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{(n-1)\,n};\ \forall n \geq 2,$$

mais $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{(n-1)\,n} = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$. Les séres $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} n!$ sont des séries à termes positifs, d'après TC $\sum\limits_{n\geq 0} n!$ est une série convergente.

2. On a $\dfrac{a_n}{10^n} \leq \dfrac{9}{10^n}$, et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{10^n}$ série géomètrique convergente de raison $r = \frac{1}{10} < 1$, d'après la linéarité des séries convergentes, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{9}{10^n}$ est convergente, ce qui entraine la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{10^n}$ d'après TC.

3. On sait que $\arctan \dfrac{1}{n^2} \overset{v(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, et comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann converge $(\alpha = 2)$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} \arctan \dfrac{1}{n^2}$ converge d'après (TC).

Exercice 4 :

1. Il suffit d'appliquer la règle de d'Alembert, on a

   (a)
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{2^n\,(n+1)^2} = 2 > 1,$$
   ceci entraine la divergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^n}{n^2}$.

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1} n^a}{(n+1)^a\, a^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} a \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^a = a$, il y a trois cas à distinguer

   – Si $a < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n^a}{a^n}$ converge.

– Si $a > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^a}{a^n}$ diverge.

– Si $a = 1$, la série des entiers naturels $\sum\limits_{n\geq 0} n$ diverge.

(c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$. Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n}$ converge.

(d) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}n!}{x^n\,(n+1)!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$. Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge.

2. En utilisant la règle de Cauchy, on obtient

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4n+3}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 > 1$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{4n+3}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$ diverge.

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \frac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n} = 0 < 1$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ converge.

Exercice 5 : on distingue deux cas

a) Si $\alpha \leq 0$, le terme ne tend pas vers zéro, donc la série diverge.

b) Si $\alpha > 0$, Nous étudions la convergence absolue, on a

$$\left|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall n \geq 1$$

et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann converge pour $\alpha > 1$, ce qui entraine la convergene absolue de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, donc elle converge. Il reste à étudier le cas où $0 < \alpha \leq 1$, on peut remarquer que, si $\theta = 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$, le terme $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ égale $\frac{1}{n^\alpha}$, et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann diverge. On suppose maintenant que $\theta \neq 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$, en utilisant la règle d'Abel, on a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = \sum_{n\geq 1} \left(e^{in\theta} \times \frac{1}{n^\alpha}\right) = \sum_{n\geq 1} a_n b_n,$$

où $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $b_n = e^{in\theta}\ \ \forall n \geq 1$. La suite (a_n) est une suite positive décroissante vers zéro, et pour la suite (a_n), on pose

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{in\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{1}{1-e^{i\theta}} - \frac{e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \\
&= \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} - \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\
&= \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|S_n| &= \left| \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \right| \\
&\leq \frac{2}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème d'Abel, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge (semi convergente).

Chapitre 2

Suites de fonctions

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'étude des suites de fonctions réelles ou complexes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et montrons les différents types de convergence.
Soit $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions définie sur $D \subset \mathbb{K}$.

2.1 Convergence simple (C.S)

Définition 2.1

– On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f en x_0, si la suite numérique $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $f(x_0)$.

– On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur D, lorsque la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $f(x)$ $\forall x \in D$, et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

– En d'autres termes, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur D, si

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ , \tag{2.1}$$

où n_0 dépend de ε et x. On note parfois :

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{C.S} f.$$

Exemple 2.1 *1.* $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x+1}$*;* $n \in \mathbb{N}$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$.

– Si $x = 0 \implies f_n(0) = 0$.

– Si $x \neq 0 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{n} = 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

2. $f_n(x) = \frac{1}{nx^2+1}$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

– Si $x = 0 \implies f_n(0) = 1$.

– Si $x \neq 0 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{nx^2} = 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0; \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

3. $f_n(x) = \sin^n(x)$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, \pi]$.

– Si $x = \frac{\pi}{2} \implies f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

– Si $x \neq \frac{\pi}{2} \implies \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin^n(x) = 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

4. Prenant l'exemple 2, $f_n(x) = \frac{1}{nx^2+1}$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On étudie la converge simple de cette série en utilisant la définition (2.1).

Soient $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0; \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

On a

– Si $x = 0$, si on prend $n_0 = 0$, on obtient $|f_n(0) - f(0)| = 0$; $\forall n \geq 0$.

– Si $x \neq 0$, on a $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = \left|\frac{1}{nx^2+1}\right| = \frac{1}{nx^2+1} < \varepsilon \iff 1 < \varepsilon nx^2 + \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < \varepsilon nx^2 \iff n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x^2}$.

Il suffit de prendre $n_0 = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x^2}\right] + 1$.(remarquons que n_0 dépend de ε et x)

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f qui définit par (2.2).

5. $f_n(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$.

Soient $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1; \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1[. \end{cases} \tag{2.3}$$

On a

– Si $x = 1$, si on prend $n_0 = 0$, on obtient $|f_n(1) - f(1)| = 0$; $\forall n \geq 0$.

– Si $x \neq 0$, on a $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = |x^n| = x^n < \varepsilon \iff n \ln x < \ln \varepsilon \iff n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$.

Il suffit de prendre $n_0 = \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right] + 1$.(remarquons que n_0 dépend de ε et x)

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f qui définit par (2.3).

2.2 Convergence uniforme (C.U)

Définition 2.2 *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $D \subset \mathbb{K}$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \forall x \in D \ \text{ on a } \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \ ,$$

où n_0 ne dépend que de ε. On note parfois :

$$f_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\overset{C.U}{\longrightarrow}} f.$$

Exemple 2.2 $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{nx^2+1}$; $n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, +\infty[\ \ a > 0$.

– $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx^2}{nx^2+1} = 1$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f(x) = 1$.

– On a : $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{nx^2}{nx^2+1} - 1\right| = \dfrac{1}{nx^2+1} < \dfrac{1}{na^2+1}$; $\forall x \in [a, +\infty[$.

On pose $\dfrac{1}{na^2+1} < \varepsilon \iff \varepsilon na^2 + \varepsilon < 1 \iff \varepsilon na^2 < 1 - \varepsilon \iff n > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2}$, il suffit de prendre $n_0 = \left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2}\right] + 1$.(remarquons que n_0 ne dépend que de ε)

Proposition 2.1 *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $D \subset \mathbb{K}$, si et seulement si*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_\infty = 0.$$

Preuve. - Supposons que La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \forall x \in D \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \ \ ,$$

donc

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \ \ ,$$

si on passe à la limite, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_\infty = 0.$$

- Inversement, supposons maintenant que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_\infty=0,$$

on peut écrire la limite sous a forme

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0 \text{ on a } \sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ ,$$

mais on a

$$|f_n(x)-f(x)|<\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\ \ ;\ \forall x\in D,$$

donc

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\forall x\in D\ \text{ on a }\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ ,$$

c'est-à-dire la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D. ■

Exemple 2.3 *1.* $f_n(x)=(1-x)\,x^n$ *;* $n\in\mathbb{N},\ \ \forall x\in[0,1]$.

Il est clair que $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{C.S}{\longrightarrow}} f=0.$
On a

$$|f_n(x)-f(x)|=(1-x)\,x^n.$$

Pour étudier la convergence uniforme, il faut étudier les variations de la fonction g qui définit par

$$g(x)=(1-x)\,x^n;\ \ x\in[0,1]\,.$$

On a

$$g'(x)=[n-(n+1)\,x]\,x^{n-1};\ \ x\in[0,1]\,.$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=g\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\simeq\frac{1}{ne}\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Alors $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{C.U}{\longrightarrow}} f=0$ sur $[0,1]\,.$

2. $f_n(x)=x^n$; $n\in\mathbb{N},\ \ \forall x\in[0,1]$.

On a $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{C.S}{\longrightarrow}} f$ où

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=1;\\ 0 & \text{si } x\in[0,1[\,.\end{cases}\tag{2.4}$$

On va étudier la convergence uniforme sur toute intervalle $[0,a]$ où $0<a<1$.
On a

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n,$$

donc
$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Alors $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{C.U}{\longrightarrow}} f = 0$ sur $[0,a]$ où $0 < a < 1$.

Proposition 2.2 *La convergence uniforme conduit à la convergence simple.*

Preuve. Découle immédiatement des définitions. ■

Remarque 2.1 *La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie.*

Exemple 2.4 *Dans le cas $f_n(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$ de l'exemple2.1, nous avons une convergence simple sur $[0,1]$ mais pas de convergence uniforme sur le même intervalle, car*
$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\nrightarrow} 0.$$
Proposition 2.3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions converge simplement vers f sur $D \subset \mathbb{K}$, , s'il existe une suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 telle que*
$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \ ; \ \forall x \in D.$$

Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D. (ce type de convergence est parfois appelé convergence normale(C.N)).

Preuve. Supposons qu'il existe une suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 telle que
$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \ ; \ \forall x \in D. \tag{2.5}$$
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, i.e.
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n \text{ on a } a_n < \varepsilon/2 \ ,$$
et d'après (2.5), on a
$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon\,;\ \forall x \in D.$$
Alors $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{C.U}{\longrightarrow}} f$ sur D. ■

Exemple 2.5 $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+n} = 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle, et on a
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x^2+n} \leq \frac{1}{n},$$
et il est clair que la suite positive $a_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (converge normalement) vers la fonction nulle.

2.3 Critère de Cauchy

Proposition 2.4 *Pour qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $D \subset \mathbb{K}$, , l faut et il suffit que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } p > q \geq n_0, \forall x \in D \text{ on a } |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Preuve. **La condition nécessaire** : Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \forall x \in D \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2\ .$$

Soit $\varepsilon > 0$, pout tout $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q \geq n_0$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f_q(x)| &= |f_p(x) - f(x) + f(x) - f_q(x)| \\ &\leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon/2\ + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme (proposition2.4).
La condition suffisante : Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme sur D (proposition2.4), donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } p > q \geq n_0, \forall x \in D \text{ on a } |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon/2.$$

Soit $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans D, donc elle converge vers une fonction que nous posons $f(x)$. alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n_0 \text{ on a } |f_p(x) - f(x)| < \varepsilon/2\ .$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_p(x) + f_p(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon/2\ + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D. ■

2.4 Propriétés de la convergence uniforme

2.4.1 Continuité

Théorème 2.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions converge uniformément vers f sur D, si f_n ; $\forall n \in \mathbb{N}$ sont toutes continues sur D, alors la fonction f est aussi continue sur D, et pout tout $x_0 \in D$ on écrit*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \lim_{x\longrightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0} \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Preuve. Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D, i.e.

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \forall x \in D \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \ .$$

et supposons que f_n ; $\forall n \in \mathbb{N}$ sont toutes continues en $x_0 \in D$, donc

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \forall x \in D \text{ si } |x - x_0| < \delta \text{ on a } |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3 \ .$$

En utilisant l'inégalité triangulaire deux fois, on obtient

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \ . \end{aligned}$$

d'où f est continue sur D. ■

Exemple 2.6 $f_n(x) = \dfrac{n}{nx+1}$ *;* $n \in \mathbb{N}$*,* $\forall x \in [a, 1]$ *où* $0 < a < 1$

Il est clair que $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\xrightarrow{C.S}} f = \dfrac{1}{x}$ sur $[a, 1]$, et

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n}{nx+1} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{(nx+1)x} < \frac{1}{nx^2} < \frac{1}{na^2} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

il suffit de prendre $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon a^2}\right] + 1$.

donc $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\xrightarrow{C.U}} f$ sur $[a, 1]$.

Et comme les termes de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous continus sur $[a, 1]$, alors f est continue sur $[a, 1]$.

Remarque 2.2 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues converge simplement vers f sur D, si la fonction f n'est pas continue sur D, alors la convergence n'est pas uniforme.*

Exemple 2.7 $f_n(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$.

On a $f_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\overset{C.S}{\longrightarrow}} f$ où

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1; \\ 0 & \text{si } x \in [0,1[, \end{cases} \tag{2.6}$$

mais f n'est pas continue sur $[0,1]$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

Proposition 2.5 *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues converge uniformément vers f sur D, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de D converge vers a, alors la suite numérique $(f_n(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$, et on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(a_n) = f(a).$$

Preuve. Découle immédiatement du théorème2.1. ■

Remarque 2.3 *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues converge simplement vers f sur D, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de D converge vers a, si la suite numérique $(f_n(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers $f(a)$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur D.*

Exemple 2.8 $f_n(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1,1]$.

Il est clair que $f_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\overset{C.S}{\longrightarrow}} f$ où

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \pm 1; \\ 0 & \text{si } x \in]-1,1[, \end{cases} \tag{2.7}$$

considérons la suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} \; ; \forall n \in \mathbb{N}.$$

on a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, mais

$$f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq f(1) = 1,$$

alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[-1,1]$.

2.4.2 Intégrabilité

Théorème 2.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues (intégrables) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors la fonction f est intégrable sur $[a,b]$, de plus*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Preuve. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$, on a

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0, \forall x\in[a,b]\ \text{on a}\ |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\ , \tag{2.8}$$

et d'après le théorème2.2 la fonction f est aussi continue sur $[a,b]$, donc elle est intégrable sur $[a,b]$, donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b |(f_n(x)-f(x))|\,dx \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx=\varepsilon.\end{aligned}$$

cela signifie que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

■

Exemple 2.9 $f_n(x)=\dfrac{n}{nx+1}$; $n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[a,1]$ *où* $0<a<1$

On sait que la suite de fonctions $(f_n(x))$ converge uniformément vers $f=\dfrac{1}{x}$ sur $[a,1]$, et on a

$$\int_a^1 \frac{n}{nx+1}dx=\ln\left(\frac{n+1}{na+1}\right),$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{na+1}\right)=-\ln a.$$

D'après le théorème2.2 on a

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\ln a.$$

Remarque 2.4 *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues converge simplement vers* f *sur* $[a,b]$, *si* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx\neq\int_a^b f(x)\,dx$, *alors la convergence n'est pas uniforme sur* $[a,b]$.

2.4.3 Dérivabilité

Théorème 2.3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b]$, vérifie les conditions suivantes :*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.*
2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.S vers f sur $[a,b]$.*
3. *La suite de dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g.*

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction dérivable f, de plus on a

$$f'(x) = g(x),$$

et on écrit

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right)' = f'(x).$$

Preuve. Voir [11]. ■

Remarque 2.5 *La convergence uniforme de la suite de dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ garantit la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas suffisante pour que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.*

Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B

Département de MI 2023-2024

2ème Année Licence Maths(S3) Module : Analyse III

2.5 Série 2 (suites de fonctions)

Exercice 1 : Étudier la convergence simple des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = (1-x)x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$.
2. $f_n(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$.
3. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
5. $f_n(x) = n \arctan \frac{x}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
6. $f_n(x) = e^{nx}$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
7. $f_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = nx(1-x)^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$.
2. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$; $n \in \mathbb{N}$,, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$,, $\forall x \in [0, 2\pi]$.
4. $f_n(x) = \frac{x}{nx^2 + n}$; $n \in \mathbb{N}^*$,, $\forall x \in \mathbb{R}$.
5. $f_n(x) = \cos\left(\frac{nx+1}{n}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Considérons les suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{2^n x}{2^n nx^2 + 1}$; $n \in \mathbb{N}$,, $\forall x \in [0,1]$.

(a) Étudier la convergence simple de (f_n).

(b) Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $\int_0^1 f(x)\,dx$. La convergence est-elle uniforme.

2. $g_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$; $n \in \mathbb{N}$,, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(a) Étudier la convergence simple de (g_n).

(b) Étudier la convergence uniforme de (g_n).

(c) Étudier la convergence uniforme de (g_n').

2.6 Correction de la série 2

Exercice 1 :

1. $f_n(x) = (1-x)x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$.

- Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$, et si $x = 1 \implies f_n(1) = 0$.
- Si $x \in \left]0,1\right[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} -x^{n+1} = 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

2. $f_n(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$.

- Si $x = 1$, on a $f_n(1) = 1$.
- Si $x \in \left[0,1\right[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0; \\ 0 & \text{si } x \in \left[0,1\right[. \end{cases}$$

3. $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f(x) = e^x$.

4. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin nx}{n} = 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction.

5. $f_n(x) = n \arctan \dfrac{x}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a $\arctan \dfrac{x}{n} \overset{v(\infty)}{\sim} = \dfrac{x}{n}$, donc $n\arctan \dfrac{x}{n} \overset{v(\infty)}{\sim} = x$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f(x) = x$.

6. $f_n(x) = e^{nx}$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$.
- Si $x < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{nx} = 0$.
- Si $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{nx} = +\infty$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left]-\infty, 0\right]$ vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0; \\ 0 & \text{si } x \in \left]-\infty, 0\right] . \end{cases}$$

et sur $\mathbb{R}_+^*$, nous n'avons pas de convergence, donc nous ne l'avons pas sur $\mathbb{R}$.

7. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

– Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$.

– Si $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} = \dfrac{x^2}{|x|} = |x|$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0; \\ |x| & \text{si non.} \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. $f_n(x) = nx(1-x)^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$.

– Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$, et si $x = 1 \implies f_n(1) = 0$.

– Si $x \in \,]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n(1-x)x^n = 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

On a

$$|f_n(x) - f(x)| = nx(1-x)^n = g(x),$$

donc la dérivée de g est donnée par

$$g'(x) = n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]; \quad x \in [0,1].$$

Alors

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = g\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{v(\infty)}{\simeq} \frac{1}{e} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\not\rightarrow} 0.$$

Par conséquent $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$; $n \in \mathbb{N}$,, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{C.S}{\longrightarrow}} f = 0$,

et

$$|f_n(x) - f(x)| = nxe^{-nx^2} = g(x),$$

donc la dérivée de g est donnée par

$$g'(x) = ne^{-nx^2}\left(1 - 2nx^2\right).$$

Alors

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = g\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par conséquent $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

3. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$,, $\forall x \in [0, 2\pi]$.

Il est clair que $f_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\overset{C.S}{\longrightarrow}} f = 0$ sur $[0, 2\pi]$,
et

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et la suite numérique $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers la fonction nulle sur $[0, 2\pi]$, alors elle converge uniformément.

4. $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2 + n}$; $n \in \mathbb{N}^*$,, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Il est clair que $f_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\overset{C.S}{\longrightarrow}} f = 0$ sur $\mathbb{R}$,
et

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{nx^2 + n}.$$

On définit la fonction g par

$$g(x) = \frac{x}{nx^2 + n}; \; x \geq 0,$$

sa dérivée est

$$g'(x) = \frac{x}{(nx^2 + n)^2}\left(1 - nx^2\right); \; x \geq 0,$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

5. $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{nx + 1}{n}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{nx + 1}{n}\right) = \cos x$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]-\infty, 0]$ vers la fonction $f(x) = \cos x$, et

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|\cos\left(\frac{nx+1}{n}\right) - \cos(x)\right| \\
&= \left|\cos\left(\frac{nx}{n} + \frac{1}{n}\right) - \cos(x)\right| \\
&= \left|\cos(x)\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \cos(x)\right| \\
&= \left|\cos(x)\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right] - \sin(x)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \\
&\leq |\cos(x)|\left|\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right| + |\sin(x)|\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \\
&\leq \left|\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right| + \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \overset{v(\infty)}{\simeq} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1. $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{2^n n x^2 + 1}$; $n \in \mathbb{N},, \ \forall x \in [0,1]$.

a.

- Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n x}{2^n n x^2 + 1} = 0$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

b. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{2^n x}{2^n n x^2 + 1} dx \\
&= \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{n 2^{n+1} x}{2^n n x^2 + 1} dx \\
&= \frac{1}{2n} \ln(n 2^n + 1) \\
&= \frac{1}{2n} \ln\left\{2^n\left[n\left(\frac{2^{-n}}{n} + 1\right)\right]\right\} \\
&= \frac{n\ln 2}{2n} + \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln\left(\frac{1}{n2^n} + 1\right)}{2n} \overset{v(\infty)}{\simeq} \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

mais

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2. $g_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$; $n \in \mathbb{N},, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

   a. **La convergence simple** : on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{nx^2+1} = 0$, alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g(x) = 0$,

   b. **La convergence uniforme** : on a

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{|x|}{nx^2+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{n}\,|x|}{\left(\sqrt{n}\,|x|\right)^2+1} \right). \tag{2.9}$$

En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{n}\,|x|$, l'expression précédente (2.9) devient

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{t}{t^2+1} \right). \tag{2.10}$$

Et d'autre coté, on a

$$\left(t^2+1\right) \geq 0 \Longrightarrow = \frac{t}{t^2+1} \leq \frac{1}{2} \ ; \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

De l'expression (2.10)

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

   c. **La série de dérivées** : on a

$g_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{\left(nx^2+1\right)^2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

– Si $x = 0$, on a $g_n'(0) = 1$.

– Si $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-nx^2}{\left(nx^2+1\right)^2} = 0$, alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x = 0; \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Et comme $g(x)$ n'est pas continue, alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.6 *cet exemple garantit que la convergence uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas suffisante pour que la suite $(g_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.*

Chapitre 3

Séries de fonctions

Dans le présent chapitre, nous allons étudier les différents types de convergence de séries de fonctions réelles ou complexes $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, dont le terme général est un terme général d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $D \subset \mathbb{K}$.

3.1 Convergence simple (C.S)

3.1.1 Définitions

Définition 3.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, la suite suivante

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \ ; \forall x \in D \, ; \forall n \in \mathbb{N},$$

est appelé somme partielle d'ordre n de la série $\sum f_n$.
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur D, lorsque la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur D, en d'autres termes

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0 \text{ on a } |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

dans ce cas S est la somme de la série $\sum f_n$.

Remarque 3.1 *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur D de somme S, alors la série numérique $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in D$ et de somme $S(x)$, et on écrit*

$$S(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \, ; \quad \forall x \in D.$$

Définition 3.2 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions converge simplement sur D, la fonction R_n définie par*

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x),$$

est appelé reste d'ordre n de la série $\sum f_n$.

Remarque 3.2 *On a pour tout $x \in D$*

$$R_n(x) = S_n(x) - S(x)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 3.1 $f_n(x) = x(1-x)^n$ *; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 2[$.*

- Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ donc $S_n(0) = S(0) = 0$, donc $\sum f_n(0)$ converge.
- Si $x \in \left]0, 2\right[$, on a $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} x(1-x)^k = x\dfrac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = 1-(1-x)^{n+1}$,

donc la suite de fonctions (S_n), définie ci-dessus, converge simplement sur $]0, 2[$ de somme $S(x) = 1$, alors $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 2[$ et de somme S, telle que

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si } x \in \left]0, 2\right[. \end{cases}$$

3.1.2 Condition nécessaire de la convergence simple

Théorème 3.1 *Pour qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur D, il est nécessaire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers 0.*

Remarque 3.3 *Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas sur D vers 0, alors la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas sur D.*

Exemple 3.2 $f_n(x) = \dfrac{nx^2-1}{nx^2+1}$ *; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

- Si $x = 0$, on a $f_n(0) = -1$.
- Si $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 1$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f(x)$, telle que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si non.} \end{cases}.$$

Alors la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas sur $\mathbb{R}$.

3.1.3 Critère de Cauchy pour la convergence simple

Théorème 3.2 *Pour qu'une série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* D*, il est nécessaire et suffisante que pour tout* $x \in D$*, la suite* $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy, en d'autres termes*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } p > q \geq n_0\ ,\ \forall x \in D \text{ on a } \left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

3.2 Convergence absolue (C.A)

Définition 3.3

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur D, lorsque la série de fonctions de termes positifs $\sum |f_n|$ converge simplement sur D.

Exemple 3.3 $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+\sqrt{n}}$*;* $n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

– Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$, donc $\sum f_n(0)$ converge.
– Si $x \neq 0$, on a

$$\sum |f_n(x)| = \sum \left| \frac{x^n}{1+\sqrt{n}} \right| = \sum \frac{|x^n|}{1+\sqrt{n}}.$$

En utilisant le critère de D'Alembert, on obtient

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \frac{|x^{n+1}|(1+\sqrt{n})}{|x^n|\left(1+\sqrt{n+1}\right)} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} |x|\ ,$$

donc la série $\sum |f_n|$ converge simplement si $|x| < 1$.
Si $|x| = 1$, on distingue deux cas :
– Si $x = 1$, on a $\sum \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ diverge car $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (série de Riemann diverge).
– Si $x = -1$, on a $\sum \dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ converge d'après Leibnitz.
Par conséquent $\sum f_n$ converge absolument sur $[-1, 1[$.

Remarque 3.4 *La convergence absolue conduit à la convergence simple.*

Exemple 3.4 *Dans l'exemple3.3, la série* $\sum f_n$ *converge simplement sur* $[-1, 1[$.

3.3 Convergence uniforme (C.U)

3.3.1 Définitions

Définition 3.4 *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* D*, si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* D *vers* S*, i.e.*

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall x\in D,\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0 \text{ on a } |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon\ ,$$

Définition 3.5 *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* D*, si la suite de reste* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* D *vers* 0*, en d'autre termes*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)|=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=0.$$

Exemple 3.5 $f_n(x)=x^n$ *;* $n\in\mathbb{N},\ \ x\in[0,1[$*.*

En utilisant le critère de Cauchy, on obtient

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|}=x,$$

donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$, et on a $S_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x};\ n\in\mathbb{N},\ \ x\in[0,1[$.
Il est clair que la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$, et

$$\begin{aligned}|S_n(x)-S(x)|&=\left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-\frac{1}{1-x}\right|\\&=\frac{x^{n+1}}{1-x}=g_n(x).\end{aligned}$$

En calculant la dérivée de g_n, on obtient

$$g_n'(x)=x^n\frac{n+1-nx}{(1-x)^2},$$

donc

$$\sup_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=g_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n}{1-\dfrac{n}{n+1}}\sim(n+1)e^{-1}\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Alors la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1[$.

Maintenant on va étudier la converge uniforme sur $[0,a]$ où $0<a<1$.

On a la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$, donc sur tout intervalle $[0,a]$ où $0<a<1$, et on a

$$g_n(x) = |S_n(x) - S(x)| = \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur D vers $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,a]$ vers $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

3.3.2 Condition nécessaire de la convergence uniforme

Théorème 3.3 *Pour qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur D, il est nécessaire que*

- *Elle soit converge simplement sur D.*
- *Son terme général converge uniformément sur D vers 0.*

Remarque 3.5 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions, si $\sum f_n$ ne converge pas simplement sur D ou la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur D vers 0, alors la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur D.*

Exemple 3.6 $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [1,+\infty[$.

On a $\forall x \geq 1$: $\dfrac{x}{n^2+x} \sim \dfrac{x}{n^2}$ (terme général d'une série de Riemann converge), donc la série $\sum f_n$ converge simplement.

Pour étudier la convergence uniforme, on étudier les variation de la fonction g_n qui définit par

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{n^2+x}$$

donc la dérivée g_n est

$$g_n'(x) = \frac{n^2}{(n^2+x)^2} \geq 0;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [1,+\infty[.$$

donc

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\longrightarrow+\infty} g_n(x) = 1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\not\rightarrow} 0.$$

Alors la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[1,+\infty[$.

3.3.3 Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

Théorème 3.4 *Pour qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur D, il est nécessaire et suffisante que pour tout $x \in D$ la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, en d'autre termes*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in D,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } p > q \geq n_0 \text{ on a } \left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

3.3.4 Convergence uniforme pour les séries alternées

Proposition 3.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives définies sur $D \subset \mathbb{K}$ telles que*

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers 0.
2. $\forall x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ décroit.

Alors la série alternée $\sum (-1)^n f_n$ converge uniformément sur D.

Preuve. Soit $x \in D$, on pose

$$g_n(x) = (-1)^n f_n,$$

donc la suite de restes de la série $\sum g_n$ est donnée par

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x),$$

et elle vérifié

$$|R_n(x)| = |g_{n+1}(x)| = |f_{n+1}(x)|,$$

mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers 0, alors $(R_n(x))$ converge uniformément sur D vers 0, par conséquent $\sum (-1)^n f_n$ converge uniformément sur D. ■

Exemple 3.7 *Considérons a série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{x}{n^2 + nx}$, $[0, a]$ où $a > 0$.*

La série précédente est une série alternée, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + nx}$.
On a

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x}{n^2 + nx} \right| = \frac{x}{n^2 + nx} \leq \frac{x}{n^2} \leq \frac{a}{n^2},$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, a]$ vers 0. Il est facile de voir que la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Alors la série alternée $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{x}{n^2 + nx}$ converge uniformément sur $[0, a]$ où $a > 0$.

3.3.5 Critère d'Abel pour la convergence uniforme

Théorème 3.5 *Soient (g_n) une suite réelle positive, et (f_n) une suite réelle ou complexe satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *La suite (g_n) est une suite décroissante sur D..*
2. *La suite (g_n) converge uniformément vers 0 sur D.*
3. *Il existe $M > 0$, tel que pout tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{x\in D}\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq M$$

Alors la série $\sum f_n g_n$ converge uniformément sur D.

Preuve. On va démontrer que $\sum f_n g_n$ vérifié le critère de Cauchy pour la convergence uniforme. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q$, si on pose $f_n = s_n - s_{n-1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{p+1}^{q}(f_n g_n)(x)\right| &= \left|\sum_{p+1}^{q}((s_n - s_{n-1})\, g_n)(x)\right| \\
&= \left|\sum_{p+1}^{q} s_n(x)\, g_n(x) - \sum_{p+1}^{q} s_{n-1}(x)\, g_n(x)\right| \\
&= \left|\sum_{p+1}^{q} s_n(x)\, g_n(x) - \sum_{p}^{q-1} s_n(x)\, g_{n+1}(x)\right| \\
&= \left|s_q(x)\, g_q(x) - s_p(x)\, g_{p+1}(x) + \sum_{p}^{q-1} s_n(x)\,(g_n - g_{n+1})(x)\right| \\
&\leq |s_q(x)|\,|g_q(x)| + |s_p(x)|\,|g_{p+1}(x)| + \sum_{p}^{q-1}|s_n(x)|\,|(g_n - g_{n+1})(x)| \\
&\leq 2M\,|g_p(x)| + |g_{p+1}(x)|.
\end{aligned}$$

et comme la suite (g_n) converge uniformément vers 0 sur D, donc $\sum f_n g_n$ vérifié le critère de Cauchy pour la convergence uniforme, alors la série $\sum f_n g_n$ converge uniformément sur D. ■

Exemple 3.8 *considérons la série complexe $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{inx}}{nx^2+1}$; $x \in [a, b]$ tels que $b > a > 0$.*

On va appliquer le critère d'Abel. La série précédente peut être écrite sous une forme adaptée comme suit

$$\sum_{n\geq 1}\frac{e^{inx}}{nx^2+1} = \sum f_n(x)\, g_n(x),$$

où $f_n(x) = e^{inx}$, $g_n(x) = \dfrac{1}{nx^2+1}$.
La suite (g_n) est une suite positive décroissante, et

$$\frac{1}{nx^2+1} \leq \frac{1}{na^2+1} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la suite (g_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,b]$.
Par un calcul simple, on obtient

$$\sup_{x\in D}\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right| \leq \frac{2}{\inf\limits_{x\in D}|e^{ix}-1|},$$

donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{e^{inx}}{nx^2+1}$ converge uniformément vers 0 sur $[a,b]$.

3.4 Convergence normale (C.N)

Définition 3.6 *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur D, s'il existe une suite numérique positive converge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$|f_n(x)| \leq a_n \text{ ; } \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in D.$$

Remarque 3.6 *Pour que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur D, il faut et il suffit que la série $\sum \sup\limits_{x\in D}|f_n(x)|$ converge.*

Preuve. La démonstration est immédiate, il suffit de prendre $a_n = \sup\limits_{x\in D}|f_n(x)|$; $\forall n\in\mathbb{N}$. ■

Proposition 3.2 *La convergence normale conduit à la convergence uniforme.*

Preuve. Supposons que $\sum f_n$ converge normalement sur D, pour démontrer la convergence uniforme de $\sum f_n$ on utilise le critère de Cauchy pour la convergence uniforme.
D'après la remarque3.6, la série $\sum \sup\limits_{x\in D}|f_n(x)|$ converge, donc elle vérifié le critère de Cauchy pour les séries numériques (proposition1.5), donc

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ \forall p,q\in\mathbb{N} \text{ tels que } p>q\geq n_0, \forall x\in D \text{ on a } \sum_{p+1}^{q}\sup_{x\in D}|f_p(x)|<\varepsilon. \tag{3.1}$$

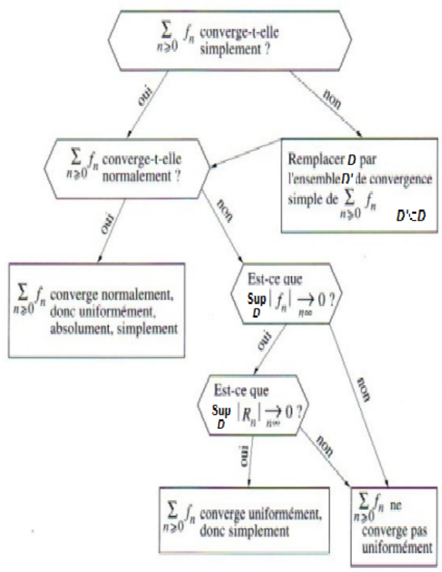
Mais on a

$$\sup_{x\in D}\sum_{p+1}^{q}|f_p(x)| \leq \sum_{p+1}^{q}\sup_{x\in D}|f_p(x)|, \tag{3.2}$$

donc la série $\sum f_n$ est de Cauchy, alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur D. ■

Remarque 3.7 *Il s'agit d'étudier, sur un exemple donné, la convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$. On peut proposer le plan suivant*

2



1.pdf
FIG 1 : Procédure d'étude d'une série de fonctions.

Exemple 3.9 $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad ;\forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ série de Riemann converge, donc $\sum \dfrac{\sin nx}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors elle converge pour tous les autres types de convergence.

3.5 Propriétés de la convergence uniforme

3.5.1 Continuité

Théorème 3.6 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur D et converge uniformément sur D de somme S, Alors sa somme est une fonction continue sur D, et pout tout $x_0 \in D$ on écrit*

$$S(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \sum f_n(x) = \sum \lim_{x \longrightarrow x_0} f_n(x) = \sum f(x_0).$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème2.1 à la suite des sommes partielles (S_n). ■

Remarque 3.8 *Si $\sum f_n$ une série de fonctions continues converge simplement sur D de somme S, si la fonction S n'est pas continue sur D, alors la convergence n'est pas uniforme sur D.*

Exemple 3.10 $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$; $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$, donc $\sum f_n(0)$ converge.
- Si $x \neq 0$, on a

$$\sum f_n(x) = \sum \frac{x}{(1+x^2)^n} = x \sum \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Cette dernière série, est une série géométrique de raison $r = \dfrac{1}{1+x^2} < 1$, et de somme $S(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$, donc $\sum f_n$ converge simplement vers S telle que

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0; \\ \dfrac{1+x^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

mais $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ continue sur $\mathbb{R}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$, et comme $S(x)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, alors $\sum f_n(x)$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

3.5.2 Intégrabilité terme à terme

Théorème 3.7 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues converge uniformément sur $[a, b]$ de somme S, alors*

1. La somme S est une fonction intégrable sur $[a, b]$.

2. La série $\sum \int_a^b f_n(x)\,dx$ converge et

$$\sum \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum f_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème2.2 à la suite des sommes partielles (S_n). ■

Exemple 3.11 $f_n(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, a]$ *où* $0 < a < 1$

On sait que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$ est une série géométrique de raison $r = \dfrac{1}{1-x} < 1$.
On a $x^n < a^n$; $\forall x \in [0, a]$, et la série numérique $\sum_{n\geq 0} a^n$ et converge, donc$\sum_{n\geq 0} x^n$ converge uniformément vers $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sur $[0, a]$, et on a

$$\sum_{n\geq 0} \int_0^a f_n(x)\,dx = \sum_{n\geq 0} \int_0^a x^n dx = \sum_{n\geq 0} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a = \sum_{n\geq 0} \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

et

$$\int_0^a S(x)\,dx = \int_0^a \frac{1}{1-x} dx = \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

D'après le théorème3.7 on a

$$\ln\left(\frac{1}{1-a}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{a^{n+1}}{n+1}. \tag{3.3}$$

Si on pose $b = -a$, l'expression précédente (3.3), devient

$$\ln(1+b) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

Remarque 3.9 *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions continues converge simplement vers* S *sur* $[a, b]$, *si* $\sum \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b S(x)\,dx$*, alors la convergence n'est pas uniforme sur* $[a, b]$.

3.5.3 Dérivabilité terme à terme

Théorème 3.8 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions dérivable sur $[a,b]$, vérifie les conditions suivantes :*

1. $\sum f_n$ *C.S vers* f *sur* $[a,b]$.
2. $\sum f_n'$ *C.U vers* g *sur* $[a,b]$.

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément vers sa somme S, et la somme est une fonction dérivable, et on écrit

$$S'(x) = \left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x) = g(x).$$

Exemple 3.12 $f_n(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,a]$ *où* $0 < a < 1$

On sait que la série de fonctions $\sum f_n(x) = \sum x^n$ est une série dérivables converge simplement vers $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sur $[0,a]$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}(x^n)' &= \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1}(n-1+1)x^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 1}(n-1)x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0} n x^n + \sum_{n\geq 0} x^n \end{aligned} \tag{3.4}$$

donc

$$\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 0} n x^n \tag{3.5}$$

de (3.4) et (3.5), on obtient

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)\sum_{n\geq 0} n x^n = \sum_{n\geq 0} x^n$$

d'où

$$\sum_{n\geq 0} n x^n = \left(\frac{x}{1-x}\right)\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Alors $\sum_{n\geq 0}(x^n)'$ converge simplement sur $[0,a]$.
Autrement, $(x^n)' = n x^{n-1} \leq n a^{n-1}$, et $\sum_{n\geq 1} n a^{n-1}$ série numérique converge d'après le critère de D'Alembert, donc $\sum_{n\geq 0}(x^n)'$ converge uniformément sur $[0,a]$, alors $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge uniformément sur $[0,a]$, et on a

$$\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Alors, la somme de la série dérivée est

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B

Département de MI 2023-2024

2ème Année Licence Maths(S3) Module : Analyse III

3.6 Série 3 (séries de fonctions)

Exercice 1 : Considérons la série de terme général

$$f_n(x) = \ln x \cos^n x;\ n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [1, \pi/2].$$

1. Montrer que la série $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $[1, \pi/2]$.
2. La série $\sum f_n(x)$ est-elle simplement convergente sur $[1, \pi/2]$?

Exercice 2 : Considérons la série de terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1};\ n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n(x)$.
2. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n(x)$.

Exercice 3 : Considérons la série de terme général

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n};\ n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n(x)$ sur $[a, b]$ où $0 < a < b$.
4. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n(x)$ sur $[a, +\infty[$.
5. Calculer l'intégrale
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^e f_n(x)\, dx.$$

Exercice 4 : Considérons la série

$$\sum \frac{x \sin nx}{\sqrt{n} + \cos x}; \; n \in \mathbb{N}^*, \; \forall x \in \left]0, 2\pi\right[. \tag{3.6}$$

1. Montrer que la série (3.6) converge simplement sur $\left]0, 2\pi\right[$.
2. Montrer que la série (3.6) converge uniformément sur tout intervalle $[a, b] \subset \left]0, 2\pi\right[$.

3.7 Correction de la série 3

Exercice 1 :

1. On a $f_n(x) = \ln x \cos^n x;\ n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [1, \pi/2]$.

- Si $x = 1$, on a $f_n(1) = 0$.
- Si $x \in]1, \pi/2]$, la série $\sum \ln x \cos^n x$ est une série géométrique converge simplement vers sa somme $\dfrac{\ln x}{1 - \cos x}$. Alors $\sum \ln x \cos^n x$ converge simplement vers la fonction S telle que

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1; \\ \dfrac{\ln x}{1 - \cos x} & \text{si } x \in]1, \pi/2]. \end{cases}$$

Il est claire que la fonction S n'est pas continue sur $[1, \pi/2]$, alors la convergence n'est pas uniforme sur $[1, \pi/2]$.

Exercice 2 :

1. La série $\sum (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}$ est une série alternée car la suite $(a_n)_n$ est une suite positive où $a_n = \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, de plus cette suite est décroissante vers 0, alors la série $\sum (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.(on peut étudier la convergence absolue ou on utilise le critère de Leibnitz pour étudier la convergence simple)
2. On a
$$\frac{e^{-nx^2}}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1},$$
alors la série $\sum (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1. Pour étudier la convergence simple, nous distinguons les cas suivants
   - Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$.
   - Si $x \neq 0$, on a $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$, terme général d'une série géométrique converge simplement vers sa somme $\dfrac{x^2+1}{x}$. Alors $\sum \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ converge simplement vers la fonction S telle que
$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0; \\ \dfrac{x^2+1}{x} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$
2. Puisque la fonction S n'est pas continue sur$\mathbb{R}$, alors la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in [a, b]$ où $0 < a < b$, on a

$$|f_n(x)| = \frac{x}{(1+x^2)^n} \leq \frac{b}{(1+a^2)^n},$$

et comme la série numérique $\sum \frac{b}{(1+a^2)^n}$ converge (série géométrique), la série de fonctions $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$ converge normalement, donc uniformément sur $[a, b]$.

4. Soit $x \in [a, +\infty[$, on considère (S_n) la suite de sommes partielles de la série $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$, on a

$$\begin{aligned}
|S_n(x) - S(x)| &= \left| x \frac{1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} - \frac{x^2+1}{x} \right| \\
&= \left| \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1+a^2} \right)^n \right| = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1+a^2} \right)^n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

donc la suite de sommes partielles (S_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$, alors la série $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$ est aussi.

5. La série $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, d'après la propriété de l'intégration terme à terme, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^e f_n(x)\, dx &= \int_1^e \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\, dx \\
&= \int_1^e S(x) dx. \\
&= \int_1^e \frac{x^2+1}{x} dx. \\
&= \frac{e^2-1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 4 : Considérons les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$f_n(x) = \sin nx \text{ et } g_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n} + \cos x};\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left]0, 2\pi\right[.$$

1. On a $0 \leq \sqrt{n} + \cos x \leq \sqrt{n} + 1$, $\dfrac{x}{\sqrt{n+1} + \cos x} \leq \dfrac{x}{\sqrt{n} + \cos x}$, et $\lim \dfrac{x}{\sqrt{n} + \cos x} = 0$, donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et décroissante vers 0, et d'autre côté on a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} \exp ikx\right| \\
&= \left|\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \exp ikx\right| \\
&\leq \frac{2}{|\exp(ix) - 1|},
\end{aligned}$$

alors la série $\sum \dfrac{x \sin nx}{\sqrt{n} + \cos x}$ converge simplement sur $]0, 2\pi[$.

2. Soit $x \in [a, b] \subset]0, 2\pi[$, on a

$$\frac{x}{\sqrt{n} + \cos x} \leq \frac{b}{\sqrt{n} - 1} \; \forall n \geq 2,$$

et la suite numérique $\left(\dfrac{b}{\sqrt{n} - 1}\right)_n$ converge vers 0, donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $[a, b]$, alors la série (3.6) converge uniformément sur $[a, b]$.

Chapitre 4

Séries entières

Les séries entières sont très importantes dans de nombreuses branches des mathématiques, telles que la combinatoire et la théorie des nombres, sans oublier leur rôle dans la résolution d'équations différentielles. Elles constituent un type particulier de séries de fonctions, avec des propriétés de convergence remarquables.

4.1 Rayon de convergence

4.1.1 Définitions

Définition 4.1 *On appelle série entière d'une variable réelle ou complexe z, tout série de fonctions $\sum f_n(z)$ telle que*

$$f_n(z) = a_n z^n; \forall n \in \mathbb{N},$$

et la somme de cette série entière, s'iI existe, dite fonction entière.

Lemme 4.1 *(d'Abel) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $|z| < |z_0|$.*

Preuve. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, i.e. $|a_n z_0^n| < M$; $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, on a

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M r^n.$$

où $r = \left|\frac{z}{z_0}\right| \in [0, 1[$, Alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument. ■

Théorème 4.1 *II existe un seul nombre réel positifs R et un tel que*

– La série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$.
– La série entière $\sum a_n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$.

Preuve. Immédiat du lemme précédent. ■

Définition 4.2 *On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément R, qui définit par*

$$R = \sup \{r \geq 0, \text{ où la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\} \subset [0, +\infty[\,,$$

et le disque ouvert (resp. intervalle ouvert (si la variable $z = x$ réelle)) $D = D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| < R\}$ est le disque (resp. intervalle) de convergence de la série entière, et l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, \ |z| = R\}$ est appelé le cercle d'incertitude.

– Si $R = 0$, la disque $D = \phi$ est vide.
– Si $R = +\infty$, la disque D coïncide avec $\mathbb{C}$.
– Si $R \in \mathbb{R}^*$, on ne sait pas à priori si la série entière $\sum a_n z^n$ converge sur le cercle d'incertitude.

Exemple 4.1 - *La série $\sum x^n$ est une série entière réelle où $a_n = 1$. Elle converge absolument sur $D = \{x \in \mathbb{R}, \ |x| < 1\}$ (série géométrique), donc le rayon de convergence $R = 1$, et diverge pour* $|x| \geq 1$.

- La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est une série entière réelle où $a_n = \frac{1}{n!}$. Elle converge absolument sur $D = \mathbb{R}$ (critère D'Alembert), donc le rayon de convergence $R = +\infty$.

4.1.2 Comparaison de rayons de convergence

Théorème 4.2 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a , R_b.*

1. Si $|a_n| < |b_n|$; $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $R_a > R_b$.
2. Si $a_n = O(b_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $R_a \geq R_b$.
3. Si $a_n \overset{v(+\infty)}{\sim} b_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $R_a = R_b$.
4. Le rayon de convergence R de la série somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieurs à $min(R_a; R_b)$, et si $R_a \neq R_b$, on a $R = min(R_a; R_b)$.
5. Soit $\lambda \neq 0$, le rayon de convergence R de la série $\lambda \sum a_n z^n = \sum \lambda a_n z^n$ est $R = R_a$.
6. Le rayon de convergence R de la série produit $\sum a_n z^n \times \sum b_n z^n = \sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \,; \forall n \in \mathbb{N},$$

est supérieurs à $min(R_a; R_b)$.

Preuve. Voir [11]. ■

4.2 Méthodes pratiques pour calculer le rayon de convergence

4.2.1 Règle de d'Alembert

Théorème 4.3 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si la suite de terme général $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge vers $l \in [0, +\infty]$, alors $R = 1/l$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.*

Preuve. En utilisant le critère de D'Alembert, on obtient

$$\left|\frac{u_{n+1} z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = l\,|z|\,,$$

donc la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < 1$ c'est-à-dire elle converge absolument sur $D = \left\{z \in \mathbb{C},\ \ |z| < \frac{1}{l}\right\}$, ce qui assure que la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument sue le disque de convergence $D = \left\{z \in \mathbb{C},\ \ |z| < \frac{1}{l}\right\}$, alors son rayon de convergence $R = \frac{1}{l}$. ■

Exemple 4.2 *- Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est $R = 1$, en utilisant la règle de d'Alembert on obtient*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

où $a_n = 1$, donc $\sum z^n$ converge absolument sur $D = \{z \in \mathbb{C},\ \ |z| < 1\}$.

- Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $R = +\infty$, car d'après la règle de d'Alembert on obtient

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = 0$$

où $a_n = n!$, donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument sur $D = \mathbb{C}$.

4.2.2 Règle de Cauchy

Théorème 4.4 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si la suite de terme général $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ converge vers $l \in [0, +\infty]$, alors $R = 1/l$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.*

Preuve. On utilise le critère de Cauchy pour étudier la convergence absolue de la série de fonction $\sum a_n z^n$. ■

Exemple 4.3 - *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum \frac{3z^n}{2^n}$ *est* $R = 2$, *car si l'on utilise la règle de Cauchy on obtient*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

où $a_n = \frac{3}{2^n}$, *donc* $\sum \frac{3z^n}{2^n}$ *converge absolument sur* $D = \{z \in \mathbb{C},\ |x| < 2\}$.

- *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum \frac{2z^n}{(n+1)^n}$ *est* $R = +\infty$, car si l'on utilise la règle de Cauchy on obtient

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{2}{(n+1)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

où $a_n = \frac{2}{(n+1)^n}$, *donc* $\sum \frac{2z^n}{(n+1)^n}$ *converge absolument sur* $D = \mathbb{C}$.

4.3 Convergence uniforme

Théorème 4.5 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de disque de convergence* D, *cette série converge normalement sur toute partie compacte incluse dans* D.

Preuve. Soit K un compact inclus dans le disque de convergence D. La fonction $z \longrightarrow |z|$ est une fonction réelle à variable complexe continue sur le compact K, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $r \in [0, +\infty[$ tel que

$$K \subset \overline{D}(0, r) \subset D(0, R),$$

donc on a

$$|a_n z^n| \leq |a_n|\, r^n \ \forall z \in K,$$

ce qui assure

$$\sup_{z \in K} |a_n z^n| \leq |a_n|\, r^n\ .$$

Mais la série numérique $\sum |a_n|\, r^n \ \ (0 \leq r < R)$, il en résulte que la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur K. ■

4.4 Propriétés des séries entières

4.4.1 Continuité de la somme

Théorème 4.6 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence R. Alors la somme S est une fonction continue sur le disque ouvert $D(0,R)$.*

Preuve. Il est claire que et toutes les fonctions $z \longrightarrow a_n z^n$ sont continués sur $\mathbb{C}$, donc sur $D(0,R)$ (polynôme dans $\mathbb{C}$). D'après la propriété de la convergence uniforme des séries de fonctions, la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence $D(0,R)$, et d'après théorème2.1 on conclut que la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert $D(0,R)$. ■

Exemple 4.4 *Reprenons l'exemple de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$, on a $R = +\infty$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument sur $\mathbb{C}$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ continue sur $\mathbb{C}$.*

4.4.2 Intégrabilité de la somme

Théorème 4.7 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence R et de somme S, et soit $[a,b] \subset]-R,R[$. Alors*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

Preuve. Immédiate d'après la propriété de la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum a_n x^n$. ■

Remarque 4.1 *Le théorème précédent permet d'intégrer terme à terme, sur toute segment $[a,b]$ incluse dans $]-R,R[$, la série entière $\sum a_n x^n$, la série primitive donc est $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ de même rayon de convergence R.*

Exemple 4.5 *On va calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$.*

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ est la série primitive de $\sum_{n\geq 0} x^n$, le rayon de convergence de la série primitive donc $R = 1$, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \int_a^b \sum_{n\geq 0} x^n dx = \int_a^b \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) \;\; \forall x \in]-1,1[\,.$$

4.4.3 Dérivabilité de la somme

Théorème 4.8 *Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence R et de somme S, alors la somme S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.*

Preuve. Immédiate d'après la propriété de la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum a_n x^n$. ■

Remarque 4.2 *Le théorème précédent permet de dériver terme à terme, dans $]-R, R[$, la série entière $\sum a_n x^n$, ces dérivées successives ont le même rayon de convergence R, et on a*

$$S^{(p)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n \ ; \ \forall x \in]-R, R[\ ; \forall p \geq 0.$$

tels que les coefficients a_n de la série entière $\sum a_n x^n$ satisfis la relation suivante

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \ \forall n \geq 0.$$

Exemple 4.6 *On va calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$.*

La série $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$ est la dérivée de la série $\sum_{n\geq 0} x^n$, le rayon de convergence de la série est $R = 1$, et on a

$$\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \ \forall x \in]-1, 1[\,.$$

En calculant d'abord la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1} &= \sum_{n\geq 1} \left(n^2 - n + n\right) x^{n-1}\\ &= \sum_{n\geq 1} n(n-1) x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}\\ &= x\sum_{n\geq 2} n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 2} n(n-1) x^{n-2}$ est la seconde dérivée de la série $\sum_{n\geq 0} x^n$, et on a

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1) x^{n-2} = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)'' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3} \ \forall x \in]-1, 1[\,.$$

Alors

$$\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad \forall x \in]-1, 1[\,.$$

4.5 Fonctions développables en série entière

4.5.1 Définitions

Définition 4.3 *Soit f une fonction définie dans un intervalle I contenant 0 dans $\mathbb{K}$. On dit que f est développable en série entière en 0 si et seulement si, il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$; et un nombre $r > 0$ tels que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-r, r[\cap I.$$

Définition 4.4 *On dit que f est développable en série entière en un point x_0, si la fonction $f(x - x_0)$ est développable en série entière en 0.*

Théorème 4.9 *(Condition nécessaire) : Soit f une fonction de $]-r, r[$ dans $\mathbb{K}$, développable en série entière en 0 telle que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-r, r[\cap I.$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \; \forall n \geq 0.$$

Théorème 4.10 *(Condition suffisante) : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle de la forme $]-r, r[$ dans $\mathbb{K}$. S'il existe $M > 0$ telle que*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M \,;\, \forall x \in]-r, r[\,;\, \forall n \geq 0.$$

Alors la série $\sum_{n \geq 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ est simplement convergente dans $]-r, r[$, et on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \,;\, \forall x \in]-r, r[\,.$$

Preuve. Voir [1]. ■

Théorème 4.11 *(Condition nécessaire et suffisante) : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle de la forme $]-r, r[$ dans $\mathbb{K}$. La fonction f est développable en série entière en 0 si et seulement si le reste de Mac-Laurin $\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{x+1}$ (où $0 < \theta < 1$) tend vers 0 pout tout $x \in]-r, r[$.*

Exemple 4.7 $f(x) = \exp(x)$.

La fonction exponentielle de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$, et le reste de Mac-Laurin est

$$\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{x+1} = \frac{\exp(\theta x)}{(n+1)!} x^{x+1} \text{ où } 0 < \theta < 1.$$

La série de fonction $\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(\theta x)}{(n+1)!} x^{x+1}$ converge absolument sur $\mathbb{R}$, sont terme générale qui est le reste de Mac-Laurin tend vers 0, alors la fonction exponentielle est développable en série entière en 0, et on a

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \,;\, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.5.2 Opérations sur les fonctions développables en série entière

Proposition 4.1 *Soient f et g deux fonctions développables en série entière en 0, de développements respectifs $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est aussi développable en série entière en 0, et son développement est la série entière $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$.*

Proposition 4.2 *Soient f et g deux fonctions développables en série entière en 0, de développements respectifs $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. Alors, la fonction fg est développable en série entière en 0, et son développement est le produit des deux séries entières.*

4.6 Application à la résolution des équations différentielles

Nous allons expliquer la méthode de résolution des équations différentielles à l'aide de séries entières, en examinant l'exemple suivant.
Considérons l'équation différentielle suivante

$$2xy' + y - \frac{1}{1-x} = 0. \tag{4.1}$$

Supposons qu'il existe une série entière

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \tag{4.2}$$

de rayon de convergence $R > 0$.

En substituant l'expression (4.2) dans l'équation différentielle (4.1), on obtient

$$\begin{aligned} 2x\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^n - \frac{1}{1-x} &= \sum_{n\geq 1} 2na_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n - \frac{1}{1-x} \\ &= a_0 + \sum_{n\geq 0} (2n+1)\, a_n x^n - \frac{1}{1-x} = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Mais la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $\left]-1, 1\right[$, et on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{n\geq 1} x^n. \tag{4.4}$$

En substituant la série (4.4) dans l'équation différentielle (4.3), on obtient

$$a_0 + \sum_{n\geq 0} (2n+1)\, a_n x^n - 1 - \sum_{n\geq 1} x^n = 0.$$

Donc

$$a_0 + \sum_{n\geq 0} (2n+1)\, a_n x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} x^n.$$

Alors, les coefficients a_n de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sont

$$\begin{cases} a_0 = 1; \\ a_n = \frac{1}{2n+1} \quad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

par conséquent

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1} \quad \forall x \in \left]-1, 1\right[.$$

Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B

Département de MI 2023-2024

2ème Année Licence Maths(S3) Module : Analyse III

4.7 Série 4 (séries entières)

Exercice 1 : Déterminer le rayon et le domaine de convergence des séries suivantes

1. $\sum (n+3)\, x^n$.
2. $\sum \dfrac{(-1)^n}{(n-1)^n} x^n$.
3. $\sum \dfrac{x^n}{n+1}$.
4. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2+2} x^n$.
5. $\sum \dfrac{2^n}{n+1} x^{2n+1}$.
6. $\sum \dfrac{n^n}{n!} x^n$.

Exercice 2 : Calculer la valeur des sommes suivantes

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)\, x^n$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{n+1} x^n$.
3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n\,(n-1)}$.

Exercice 3 : Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} (1+x^2)\, y'' - 2y = 0. \\ y\,(0) = 0 \ ; \quad y'\,(0) = 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

1. Résoudre le problème (4.5) en utilisant une série entière.
2. Montrer que cette série entière converge normalement sur l'intervalle $[-1, 1]$.
3. Calculer le rayon de convergence ce cette série.
4. Trouver l'expression explicite de la fonction y

   $\left(\text{Indication : calculer la dérivée } \left(\frac{y'(x)-1}{x}\right)' \text{ pour } x \neq 0\right)$.

4.8 Correction de la série 4

Exercice 1 : Détermination du rayon et du domaine de convergence

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum (n+3)\, x^n$ est $R = 1$, car si l'on utilise la règle de d'Alembert on obtient

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{n+4}{n+3} \right| = 1,$$

où $a_n = (n+3)$, et puisque les séries numériques $\sum (n+3)$ (pour $x = 1$) et $\sum (\, n+3)\, (-1)^n$ (pour $x = -1$) sont divergentes, donc $\sum (n+3)\, x^n$ converge absolument sur $D =]-1, 1[$.

2. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{(n-1)^n} x^n$ est $R = 1$, car si l'on utilise la règle de de Cauchy, on obtient

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n-1)^n} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 1.$$

où $a_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)^n}$, donc $\sum \frac{2z^n}{(n+1)^n}$ converge absolument sur $D =]-1, 1[$.

3. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n+1}$ est $R = 1$, car si l'on utilise la règle de d'Alembert on obtient

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = 1,$$

où $a_n = \frac{1}{n+1}$, et puisque la série numérique $\sum \frac{1}{n+1}$ (pour $x = 1$) diverge (série harmonique), et la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ (pour $x = -1$) converge (série harmonique alternée), donc $\sum \frac{x^n}{n+1}$. converge absolument sur $D = [-1, 1[$.

4. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+2} x^n$ est $R = 1$, car si l'on utilise la règle de d'Alembert on obtient

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{n^2+2}{n^2+2n+4} \right| = 1,$$

où $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+2}$, et puisque les séries numériques $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+2}$ (pour $x = 1$) et $\sum \frac{1}{n^2+2}$ (pour $x = -1$) sont convergentes (séries de Riemann), donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+2} x^n$ converge absolument sur $D = [-1, 1]$.

5. En utilisant a règle de d'Alembert, on obtient
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)\,x^{2n+2}}{2^n(n+2)\,x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{2(n+1)\,x}{(n+2)}\right|=2\,|x|\,,$$
où $u_n=\dfrac{2^n}{n+1}x^{2n+1}$, la série converge si $|x|<1/2$, et puisque la série numérique $\sum\dfrac{1}{2n+2}$ (pour $x=1$)diverge (série harmonique), et $\sum\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+2}=-\sum\dfrac{1}{2n+2}$ (pour $x=-1$) diverge (série harmonique), donc $\sum\dfrac{(-1)^n}{n^2+2}x^n$ converge absolument sur $D=\left]-1,1\right[$.

6. Le rayon de convergence de la série entière $\sum\dfrac{n^n}{n!}x^n$ est $R=1/e$, car si l'on utilise la règle de d'Alembert on obtient
$$\frac{1}{R}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{n!\,(n+1)^{n+1}}{n^n\,(n+1)!}\right|=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right|=e,$$
où $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$, et puisque les séries numériques $\sum\dfrac{n^n}{n!}$ (pour $x=1$) et $\sum\dfrac{(-n)^n}{n!}$ (pour $x=-1$) sont divergentes , donc $\sum\dfrac{n^n}{n!}x^n$ converge absolument sur $D=\left]-1/e,1/e\right[$.

Exercice 2 : Calcul de sommes

1. On sait que la série $\sum(n+1)\,x^n$ converge absolument sur $D=\left]-1,1\right[$, on a
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)\,x^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}3x^n\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n+3\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\\&=x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}+\frac{3}{1-x}\\&=x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)'+\frac{3}{1-x}\\&=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'+\frac{3}{1-x}\\&=\frac{3-2x}{(1-x)^2}\quad;\ \forall x\in\left]-1,1\right[.\end{aligned}$$

2. Le rayon de convergence de la série entière $\sum(-1)^n\dfrac{2^n}{n+1}x^n$ est $R=1/2$, car si l'on utilise la règle de d'Alembert on obtient
$$\frac{1}{R}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)\,2^{n+1}}{(-1)^n\,2^n\,(n+2)}\right|=2,$$

où $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{n+1}$, et puisque la série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ (pour $x = 1/2$) est convergente (d'après Leibnitz), et $\sum \dfrac{1}{n+1}$ (pour $x = -1$) diverge (séries de harmonique), donc $\sum (-1)^n \dfrac{2^n}{n+1} x^n$ converge absolument sur $D =]-1/2, 1/2]$, et on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n &= \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{2x} \ln(1+2x) \quad ; \; \forall x \in]-1/2, 1/2].\end{aligned}$$

3. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n(n-1)}$. est $R = 1$, car si l'on utilise la règle de d'Alembert on obtient

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{n(n-1)}{n(n+1)} \right| = 1,$$

où $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$, et puisque les séries numériques $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ (pour $x = 1$) et $\sum \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ (pour $x = -1$) sont convergentes (séries de Riemann), donc $\sum \dfrac{x^n}{n(n-1)}$. converge absolument sur $D = [-1, 1]$, En utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x \right) \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + x \\ &= (x-1) \left(\int^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n} dt \right) + x \\ &= (x-1) \left(\int^{x} \frac{1}{1-t} dt \right) + x \\ &= (1-x) \ln(1-x) + x.\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. Supposons qu'il existe une série entière telle que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{4.6}$$

Les dérivées première et seconde de y sont données par

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \tag{4.7}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{4.8}$$

En substituant les expressions (4.6, 4.7, 4.8) dans l'équation différentielle du problème (4.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(1+x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n. \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + (n(n-1)-2) a_n\right] x^n \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

D'après l'équation (4.9), tous les coefficients de la série sont nuls, i.e.

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} + (n(n-1)-2) a_n = 0,$$

ou d'une manière équivalente

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} = (2 - n(n-1)) a_n,$$

donc, on obtient la relation de récurrence suivante

$$a_{n+2} = \frac{2-n}{2+n} a_n \ ; \ \forall n \geq 0. \tag{4.10}$$

On remarque de l'expression (4.10) que tous les termes d'indice paire sont nuls $(a_{2p} = 0 \ ; \ \forall p \geq 4.)$, donc il nous reste à calculer les termes a_0, a_2 , a_{2p+1} ; $\forall p \geq 0$. En utilisant les conditions initiales du problème, on obtient

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\implies a_0 = 0 \implies a_2 = 0; \\ y'(0) = 1 &\implies a_1 = 1. \end{aligned}$$

En appliquant les résultats obtenus dans la relation de récurrence (**??**), on obtient les valeurs des autres termes de la série (4.6)

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{3}; \\ a_5 &= -\frac{1}{5} a_3 = -\frac{1}{3 \times 5}; \\ &\vdots \\ a_{2p+1} &= \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)(2p+1)} \ ; \ \forall p \geq 2. \end{aligned}$$

Alors, la solution du problème (4.5) sous forme une série entière est

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}. \tag{4.11}$$

2. On a
$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1} \right| \leq \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \overset{v(\infty)}{\sim} \frac{1}{4n^2} \ ; \ \forall x \in [-1, 1].$$

   et la série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann converge ce qui assure la convergence uniforme de la série entière $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$ sur $[-1, 1]$.

3. Le rayon de convergence est $R = 1$, car si l'on utilise la règle de d'Alembert on obtient
$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = 1.$$

4. On dérive terme à terme la série (4.11) , on obtient
$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} x^{2n}; \ \ \forall x \in [-1, 1],$$

ce qui implique

$$\frac{y'(x)-1}{x} = \frac{-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}x^{2n}}{x}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}x^{2n-1}; \quad \forall x\in[-1,1]\,, \text{ où } x\neq 0. \tag{4.12}$$

On dérive terme à terme la série (4.12), on obtient

$$\left(\frac{y'(x)-1}{x}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}; \quad \forall x\in[-1,1]\,.$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}x^{2n}; \quad \forall x\in[-1,1]$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-x)^{2n}; \quad \forall x\in[-1,1]\,.$$

Alors

$$\left(\frac{y'(x)-1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{4.13}$$

En intégrant les deux côtés de l'expression (4.13), on obtient

$$\frac{y'(x)-1}{x} = \arctan x + c, \tag{4.14}$$

mais d'après la condition initial du problème (4.5), on a

$$y'(x) = x\arctan x + 1. \tag{4.15}$$

En intégrant l'expression (4.15) par partie, on obtient l'expression explicite de la fonction y

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x + \frac{x}{2}. \tag{4.16}$$

Chapitre 5

Séries de Fourier

La série de Fourier est un outil très intéressant en mathématiques, en particulier dans l'étude des fonctions périodiques. Elle joue un rôle très important dans de nombreuses nouvelles branches telles que la théorie du signal et la théorie des ondes.

5.1 Fonctions périodiques

Définition 5.1 *On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est période de la période $T > 0$ (ou T-périodique),si*

$$f(x+T) = f(x) \ \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Proposition 5.1 *Soit f une fonction T-périodique. On a alors les propriétés suivantes*

1. La fonction f est aussi $-T$-périodique.
2. La fonction f est aussi nT-périodique où $n \in \mathbb{Z}$.
3. La fonction $g(x) = f(ax+b)$ est $\frac{T}{a}$-périodique où $a \neq 0$.
4. Si f est intégrable sur un intervalle $[\alpha, \alpha+T]$, on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx. \tag{5.2}$$

Preuve.

1. La fonction f est T-périodique, donc

$$f(x-T) = f((x-T)+T) = f(x) \ \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

donc f est $-T$-périodique.

2. On démontre par récurrence, pour $n = 1$ est identique à la relation (5.1). On suppose que la relation est vraie pour n i.e.

$$f(x + nT) = f(x) \;\; ; \; \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

on a

$$\begin{aligned} f(x + (n+1)T) &= f(x + (n+1)T) \\ &= f(x + nT + T) \\ &= f((x+T) + nT) \;\; ; \; \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

de la relation (5.3), on obtient

$$f((x+T) + nT) = f(x+T) = f(x) \;\; ; \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. On a

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{T}{a}\right) &= f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right) = f((ax+b) + T) \\ &= f((ax+b)) = g(x) \;\; ; \; \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Supposons que f est intégrable, on a

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_\alpha^T f(x)\,dx + \int_T^{\alpha+T} f(x)\,dx \tag{5.4}$$

et comme f est $-T$-périodique, on obtient

$$\int_\alpha^T f(x)\,dx + \int_T^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_\alpha^T f(x)\,dx + \int_T^{\alpha+T} f(x-T)\,dx \tag{5.5}$$

En utilisant le changement $y = x - T$, l'intégrale précédente devient

$$\int_\alpha^T f(x)\,dx + \int_T^{\alpha+T} f(x-T)\,dx = \int_\alpha^T f(x)\,dx + \int_0^\alpha f(y)\,dy = \int_0^T f(x)\,dx.$$

■

Remarque 5.1 *l'intégrale (5.2) ne dépend pas de α, la valeur de cette intégrale commune s'appelle l'intégrale de f sur une période.*

5.2 Séries trigonométriques

Définition 5.2 *On appelle série trigonométrique toute série de fonctions écrite sous la forme*

– Trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right), \tag{5.6}$$

où $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites de numérique, réelles ou complexes, $T = 2\omega$ s'appelle la période de la série.

– Exponentielle

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp\left(i\frac{n\pi x}{\omega}\right).$$

où $(c_n)_n$ est suite de numérique, réelle ou complexe.

Proposition 5.2 *Si les deux séries numériques $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique (5.6) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$\left| a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)\right| \leq |a_n| + |b_n| \;\; ; \;\forall x \in \mathbb{R}.$$

■

Proposition 5.3 *Si les suites numériques $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont positives, décroissantes et convergent vers 0, alors la série trigonométrique (5.6) converge simplement pour tout $x \neq 2\omega k$; $k \in \mathbb{Z}$, et uniformément sur tout intervalle $[2k\pi + \lambda, 2(k+1)\pi + \lambda]$; $0 < \lambda < 1$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la règle d'Abel pour les séries de fonction $\sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)$.

■

Exemple 5.1 *On pose*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}; \quad \forall n \geq 0.$$
$$b_n = \frac{n+1}{n!}; \quad \forall n \geq 1.$$

Il est clair que les deux séries numériques $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n!}$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique

$$\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) + \frac{n+1}{n!} \sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right),$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

5.2.1 Calcul de coefficients d'une série trigonométrique

Proposition 5.4 *Supposons que les deux séries numériques* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *sont absolument convergentes.*

– **La forme trigonométrique**: posons

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right), \tag{5.7}$$

alors les coefficients de cette série sont donnés par

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} s(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx; \quad \forall n \geq 0, \\ b_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} s(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx; \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

– **La forme exponentielle** : posons

$$S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp\left(i\frac{n\pi x}{\omega}\right). \tag{5.8}$$

alors les coefficients de cette série sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} s(x)\exp\left(i\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx; \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{5.9}$$

Preuve.

– La forme trigonométrique : Si en multipliant la série trigonométrique (5.6) par $\cos\left(\frac{m\pi x}{\omega}\right)$; $m \geq 0$, la série obtenue converge uniformément, de plus si on intègre terme à terme, et sous les propriétés

$$\int\limits_{-\omega}^{\omega} \cos\left(\frac{m\pi x}{\omega}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx = 0 \text{ si } m \neq n,$$

et

$$\int\limits_{-\omega}^{\omega} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx = \omega \text{ si } m = n\ ,$$

on obtient

$$a_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} s(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx; \quad \forall n \geq 0.$$

Pour calculer la valeur des coefficient b_n, on multiplie la série trigonométrique (5.6) par $\sin\left(\frac{m\pi x}{\omega}\right)$; $m \geq 0$,et par les mêmes techniques on obtient le résultat recherché.

– La forme exponentielle : en multipliant la série (5.8) par $\exp\left(i\frac{m\pi x}{\omega}\right)$; $m \geq 0$, en intégrant terme à terme la série obtenue, et en utilisant le fait que

$$\int_{-\omega}^{\omega} \exp\left(i\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 2\omega & \text{si } m = n, \end{cases}$$

on obtient l'expression (5.9) .

■

5.3 Série de Fourier

Définition 5.3 *On appelle série de Fourier d'une fonction f $2\omega-$périodique et intégrable sur l'intervalle $[-\omega, \omega]$, prenant l'une des formes suivantes*

– La forme trigonométrique :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right), \tag{5.10}$$

où ces coefficients a_n et b_n sont définis par

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx; & \forall n \geq 0, \\ b_n = \frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx; & \forall n \geq 1. \end{cases}$$

– La forme exponentielle :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp\left(i\frac{n\pi x}{\omega}\right),$$

où les c_n sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\exp\left(i\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx; \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

Les coefficients a_n, b_n et c_n sont appelés les coefficients de Fourier de f. On notera $S(f)$ la somme de la série de Fourier de f.

Remarque 5.2 – *On peut calculer les coefficients de Fourier d'une fonction f en intégrant sur tout intervalle du type $[\lambda, \lambda + 2\omega]$, donc on a*

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\omega} \int\limits_{\lambda}^{\lambda+2\omega} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx; \quad \forall n \geq 0, \\ b_n = \frac{1}{\omega} \int\limits_{\lambda}^{\lambda+2\omega} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx; \quad \forall n \geq 1, \\ c_n = \frac{1}{2\omega} \int\limits_{\lambda}^{\lambda+2\omega} f(x) \exp\left(i\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx; \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

– *Si la fonction f est paire, les coefficients de Fourier sont donnés par*

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\omega} \int\limits_{0}^{\omega} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx; \quad \forall n \geq 0, \\ b_n = 0. \end{cases}$$

– *Si la fonction f est impaire, les coefficients de Fourier sont donnés par*

$$\begin{cases} a_n = 0; \quad \forall n \geq 0, \\ b_n = \frac{2}{\omega} \int\limits_{0}^{\omega} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx; \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Preuve.

– Immédiate en utilisant les propriétés de fonction périodique.

– Supposons que f est paire, on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\omega} \int\limits_{-\omega}^{\omega} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\int\limits_{-\omega}^{0} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx + \int\limits_{0}^{\omega} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx \right) \\ &= \frac{1}{\omega} \left(-\int\limits_{\omega}^{0} f(-x) \cos\left(-\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx + \int\limits_{0}^{\omega} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx \right) \\ &= \frac{2}{\omega} \int\limits_{0}^{\omega} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx; \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx \\
&= \frac{1}{\omega}\left(\int_{-\omega}^{0} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx + \int_{0}^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx\right) \\
&= \frac{1}{\omega}\left(-\int_{\omega}^{0} f(-x)\sin\left(-\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx + \int_{0}^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx\right) \\
&= \frac{1}{\omega}\left(-\int_{0}^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx + \int_{0}^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx\right) \\
&= 0;\ \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

– La démonstration est analogue pour le cas où f est impair.

■

Exemple 5.2 *Soit $f(x) = x$ une fonction $2\pi-$périodique, la fonction f est impaire donc $a_n = 0$; $\forall n \geq 0$, et on a*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx; \quad \forall n \geq 1.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\right] \\
&= 2\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

La série de Fourier dans ce cas est

$$S(f) = \sum_{n\geq 1} 2\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx).$$

5.4 Condition de convergence de série de Fourier

5.4.1 Condition nécessaire

Théorème 5.1 *Soit f une fonction $2\omega-$périodique et intégrable sur l'intervalle $[-\omega, \omega]$, alors les suites des coefficients de Fourier (a_n) et (b_n) convergent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.*

Preuve. Voir [1]. ■

Définition 5.4 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ sauf au point x_0. On dit que f admet des discontinuités de première espèce au point x_0 lorsqu'elle admet en ce point une limite à droite $f(x_0^+)$ différente de la limite à gauche $f(x_0^-)$.*

Définition 5.5 *Une fonction f définie sur un intervalle $[a; b]$ est dite continue par morceaux sur cet intervalle, s'il existe une subdivision $\{[x_{j-1}, x_j[\,,\ j = 1, 2, ..., n\}$ de $[a; b]$ tel que :*

- f continue sur chaque intervalle de la subdivision.
- f admet des discontinuités de première espèce aux point x_j, $j = 1, 2, ..., n$.

Définition 5.6 *Une fonction f définie sur un intervalle $[a; b]$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur cet intervalle, s'il existe une subdivision $\{[x_{j-1}, x_j[\,,\ j = 1, 2, ..., n\}$ de $[a; b]$ tel que :*

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle de la subdivision.
- f admet des dérivées à droite et des dérivées à gauche aux point x_j, $j = 1, 2, ..., n$, qui sont distincts.

5.4.2 Condition suffisante (théorème de Dirichlet)

Théorème 5.2 *Soit f une fonction $2\omega-$périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceau sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge simplement pour tout $x \neq 2\omega k$; $k \in \mathbb{Z}$, et a pour somme :*

$$S(x) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

De plus si f est continue, la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et

$$S(x) = f(x); \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Voir [1] ■

5.5 Formule de Parseval

Théorème 5.3 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $2\omega-$périodique et intégrable sur l'intervalle $[-\omega,\omega]$, tel que*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right), \tag{5.11}$$

alors la fonction f vérifie la formule de Parseval suivante

$$\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n^2+b_n^2.$$

Preuve. Supposons que f est $2\omega-$périodique et intégrable sur l'intervalle $[-\omega,\omega]$, tel que

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right). \tag{5.12}$$

On pose (S_n) la suite de sommes partielles de la série de Fourier, donc on a

$$\begin{aligned}|f(x)-S_n(x)| &= \left|\sum_{p\geq n+1} a_p\cos\left(\frac{p\pi x}{\omega}\right)+b_p\sin\left(\frac{p\pi x}{\omega}\right)\right| \\ &\leq \sum_{p\geq n+1} |a_p|+|b_p| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

et d'autre part on a

$$\begin{aligned}\left|f^2(x)-S_n^2(x)\right| &= |f(x)-S_n(x)|\,|f(x)+S_n(x)| \\ &\leq 2\,|f(x)-S_n(x)|\,|f(x)| \\ &\leq 2\left(\sum_{p\geq n+1}|a_p|+|b_p|\right)\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{p\geq n+1}|a_p|+|b_p|\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

donc la suite (S_n) converge uniformément vers $f^2(x)$, et en utilisant la propriété des suites uniformément convergentes, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f^2(x)\,dx &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} S_n^2(x)\,dx\right) \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left\{\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{p\geq n+1} a_p\cos\left(\frac{p\pi x}{\omega}\right)+b_p\sin\left(\frac{p\pi x}{\omega}\right)\right)^2 dx\right\} \\ &= \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n^2+b_n^2.\end{aligned}$$

■

Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B

Département de MI 2023-2024

2ème Année Licence Maths(S3) Module : Analyse III

5.6 Série 5 (séries de Fourier)

Exercice 1 : On considère la fonction $2\pi-$périodique f définie par

$$f(x) = x.$$

1. Montrer que f est développable en série de Fourier et calculer les coefficients de Fourier.
2. En déduire les sommes de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
3. Calculer en appliquant la formule de Parseval la somme de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2 : On considère la fonction $2\pi-$périodique f définie par

$$f(x) = |x|.$$

1. Montrer que f est développable en série de Fourier et calculer les coefficients de Fourier.
2. En déduire les sommes de la série numérique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$.

Exercice 3 : On considère la fonction $2\pi-$périodique f définie par

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } & x \in]-\pi, 0[; \\ 1 \text{ si } & x \in]0, \pi[, \end{cases}.$$

1. Montrer que f est développable en série de Fourier et calculer les coefficients de Fourier.
2. En déduire les sommes de la série numérique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 4 : On considère la fonction $2\pi-$périodique f définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

1. Montrer que f est développable en série de Fourier et calculer les coefficients de Fourier.
2. En déduire les sommes des séries numériques $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
3. Calculer en appliquant la formule de Parseval la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

5.7 Correction de la série 5

Exercice 1 :

1. Soit f la fonction $2\pi-$périodique suivante

$$f(x) = x.$$

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$, donc elle vérifie les conditions de Dirichlet, alors elle développable en série de Fourier, et comme la fonction f est impaire on a

$$\begin{cases} a_n = 0; \quad \forall n \geq 0, \\ \qquad b_n == \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx \\ \qquad = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi)\right] \\ \qquad = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

La série de Fourier dans ce cas est

$$\begin{aligned} S(f) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} \sin(2n+1)\, x. \end{aligned}$$

2. On pose $x = \frac{\pi}{2}$, d'une part, on a

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} (-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

et d'autre part, on a

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}. \tag{5.14}$$

En comparant les deux expressions (5.13) et (5.14), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

3. En appliquant la formule de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx &= \sum_{n\geq 1} b_n^2\\ &= \sum_{n\geq 1}\left(2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^2\\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

et

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\omega}^{\omega} x^2dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Alors

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2 :

1. Soit f la fonction $2\pi-$périodique suivante

$$f(x) = |x|.$$

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]-\pi,\pi[$, donc elle vérifie les conditions de Dirichlet, alors elle développable en série de Fourier, et comme la fonction f est paire, on a

$$b_n = 0;\quad \forall n \geq 1.$$

et on a

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi;$$

et

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx\right)\\ &= \frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\quad \forall n\geq 1\\ &= \begin{cases} 0 \ \text{ si } n \text{ paire}; & \forall n\geq 1,\\ \dfrac{-4}{\pi n^2}\text{si } n \text{ impaire}; & \forall n\geq 1,\end{cases}\end{aligned}$$

ceci implique

$$a_n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi\left(2n+1\right)^2}; \quad \forall n \geq 1,$$

La série de Fourier dans ce cas est

$$S(f) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi\left(2n+1\right)^2} \cos\left(2n+1\right)x$$

2. On pose $x = 0$, d'une part, on a

$$S\left(0\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi\left(2n+1\right)^2} \tag{5.15}$$

et d'autre part, on a

$$f\left(0\right) = 0. \tag{5.16}$$

En comparant les deux expressions (5.15) et (5.16), on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi\left(2n+1\right)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 3 :

1. Soit f la fonction $2\pi-$périodique suivante

$$f\left(x\right) = sgn(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } & x \in \left]-\pi, 0\right[; \\ 1 \text{ si } & x \in \left]0, \pi\right[, \end{cases}.$$

Il est clair que f est de classe par morceaux $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\pi, \pi\right[$, donc elle vérifie les conditions de Dirichlet, alors elle développable en série de Fourier, et comme la fonction f est impaire on a

$$\begin{cases} a_n = 0; \quad \forall n \geq 0, \\ \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right) dx \\ \qquad = \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{1}{n}\cos\left(n\pi\right)\right] \\ \quad = \dfrac{4}{n\pi}\left(1 - \left(-1\right)^n\right) \quad \forall n \geq 1 \\ = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ paire}; \quad \forall n \geq 1, \\ \dfrac{4}{n\pi} \text{si } n \text{ impaire}; \quad \forall n \geq 1, \end{cases} \\ \quad = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)}; \quad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

La série de Fourier dans ce cas est

$$S(f) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left(2n+1\right)x.$$

2. On pose $x = \frac{\pi}{2}$, d'une part, on a

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{5.17}$$

et d'autre part, on a

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \tag{5.18}$$

En comparant les deux expressions (5.17) et (5.18), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4 :

1. Soit f la fonction $2\pi-$périodique suivante

$$f\left(x\right) = \frac{x^2}{2}.$$

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$, donc elle vérifie les conditions de Dirichlet, alors elle développable en série de Fourier, et comme la fonction f est paire, on a

$$b_n = 0\ ;\quad \forall n \geq 1,$$

et

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = \frac{\pi^2}{3};$$

et pour $n \geq 1$, on a

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}\cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx$$

Par intérgation par parties deux fois, on obtient

$$a_n = 2\frac{(-1)^n}{n^2}\quad \forall n \geq 1$$

La série de Fourier donc est

$$S(f) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

2.

– On pose $x = \pi$, d'une part, on a

$$S(\pi) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$
$$= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}. \tag{5.19}$$

et d'autre part, on a

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{2}. \tag{5.20}$$

En comparant les deux expressions (5.19) et (5.20), on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

– Si on pose $x = 0$, d'une part, on a

$$S(0) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \tag{5.21}$$

et d'autre part, on a

$$f(0) = 0. \tag{5.22}$$

de l'expression (5.21), on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3. En appliquant la formule de Parseval, on obtient

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2$$
$$= \frac{\pi^4}{9} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

et

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\omega}^{\omega} \frac{x^4}{4} dx = \frac{\pi^4}{10}.$$

alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

Chapitre 6

Intégrales généralisées (impropres)

Dans ce chapitre, nous abordons le concept d'intégrale généralisée, qui est une intégrale dans laquelle soit la fonction continue sur un intervalle d'intégration n'est pas bornée, soit la fonction n'est pas continue sur l'intervalle d'intégration fermé.

6.1 Intégrale généralisée sur un intervalle non bornée

Définition 6.1 *Soit $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur toute intervalle $[a, x]$ où $x \geq a$. On dit que l'intégrale*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \tag{6.1}$$

converge si la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe, et on écrit

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

- L'intégrale (6.1) s'appelle intégrale généralisée ou intégrale impropre.
- Si cette limite $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ n'existe pas, on dit que l'intégrale (6.1) diverge.
- Pour étudier la convergence des intégrales de type $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$, nous étudions l'existence de la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \int_x^a f(t)\,dt$.

Exemple 6.1 *Considérons l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$; $\alpha \in \mathbb{R}$. On calcule d'abord l'intégrale $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt$, on distingue deux cas*

- Si $\alpha = 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln(x),$$

et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\ln(x)=+\infty$, ce qui assure la divergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$.

– Si $\alpha\neq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt=\int_1^x t^{-\alpha}dt=\frac{1}{(\alpha-1)\,t^{\alpha-1}},$$

et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{(\alpha-1)\,t^{\alpha-1}}=\begin{cases}0 & \text{si} \quad \alpha>1;\\ +\infty & \text{si} \quad \alpha<1;\end{cases}$, par conséquent l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Remarque 6.1 *L'intégrale ci-dessus est appelée intégrale de Riemann.*

Proposition 6.1 *Pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty}f(t)\,dt$ converge, il suffit de montrer que, quelle que soit la suite $(x_n)_n$ tendant vers $+\infty$, la suite $\left(\int_a^{x_n}f(t)\,dt\right)_n$ converge.*

Définition 6.2 *Soient $f:\left]-\infty;+\infty\right[\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur toute intervalle $[x,y]$ où $y\geq x$. et $c\in\left]-\infty;+\infty\right[$. On dit que l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt \tag{6.2}$$

converge si les deux intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{c}f(t)\,dt$ et $\int_c^{+\infty}f(t)\,dt$ sont convergentes, de plus on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{c}f(t)\,dt+\int_c^{+\infty}f(t)\,dt. \tag{6.3}$$

– Si l'une des intégrales précédentes diverge, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$ est divergente.

Remarque 6.2 *L'intégrale généralisée précédente s'appelle intégrale doublement généralisée.*

6.2 Espace vectoriel des intégrales généralisées

6.2.1 Linéarité

Proposition 6.2 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur toute intervalle $[a,x]$ où $x\geq a$. Si les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty}f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty}g(t)\,dt$ sont convergent, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty}(\lambda f(t)+\mu g(t))\,dt$ est convergente, et on écrit*

$$\int_a^{+\infty}(\lambda f(t)+\mu g(t))\,dt=\lambda\int_a^{+\infty}f(t)\,dt+\mu\int_a^{+\infty}g(t)\,dt.$$

6.2.2 Positivité

Proposition 6.3 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur toute intervalle $[a,x]$ où $x \geq a$ telles que $f(x) \leq g(x)$; $\forall x \in [a;+\infty[$. Si les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ sont convergent, alors on a*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,dt.$$

En particulier, si $f(x) = 0$ (g est une fonction positive), on a

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt \geq 0.$$

donc intégrale de g est positive.

Remarque 6.3 *L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a;+\infty[$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

6.3 Intégrale généralisée d'une fonction non bornée

Définition 6.3 *Soit $f : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur toute intervalle $[a,x]$ où $a \leq x < b$. On dit que l'intégrale généralisée*

$$\int_a^b f(t)\,dt \tag{6.4}$$

converge si la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow b} \int_a^x f(t)\,dt$ existe, et on écrit

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\longrightarrow b} \int_a^x f(t)\,dt.$$

- Si la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow b} \int_a^x f(t)\,dt$ n'existe pas, on dit que l'intégrale (6.4) diverge.
- Si f une fonction définie sur un intervalle de type $]a;b]$ et intégrable sur toute intervalle $[x,b]$ où $a < x \leq b$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow a} \int_x^b f(t)\,dt$ existe.

Exemple 6.2 *Considérons l'intégrale de Riemann suivante $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$; $\alpha \in \mathbb{R}$. On calcule premièrement l'intégrale $\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$, on distingue aussi deux cas*

- Si $\alpha = 1$, on a

$$\int_x^1 \frac{1}{t}dt = -\ln(x),$$

et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(-\ln(x)) = -\infty$, ce qui assure la divergence de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$.

– Si $\alpha \neq 1$, on a
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \int_0^1 t^{-\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right),$$
et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha < 1; \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha > 1; \end{cases}$, par conséquent l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Définition 6.4 *Soient $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur toute intervalle $[x,y]$ où $a < x \leq y < b$, et $c \in]a;b[$. On dit que l'intégrale*
$$\int_a^b f(t)\,dt \tag{6.5}$$
converge si les deux intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ sont convergentes, de plus
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \tag{6.6}$$
Si l'une des intégrales précédentes diverge, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente, cette intégrale est également connue sous le nom d'intégrale doublement généralisée.

Exemple 6.3 *L'intégrale doublement généralisée suivante $\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^2-1}dt$ est divergente, car les deux intégrales généralisées $\int_1^2 \frac{t}{t^2-1}dt$ et $\int_2^{+\infty} \frac{t}{t^2-1}dt$ sont divergentes, par exemple*
$$\int_1^2 \frac{t}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\left[\ln\left(t^2-1\right)\right]_1^2 = \infty.$$

6.4 Intégrales de fonctions positives

Dans cette partie nous nous intéressons à l'intégrale des fonctions de signe positif qui constitue la base de ce qui suit, nous donnons les différents critères pour étudier le type d'intégrales généralisées de ces fonctions.

Théorème 6.1 *Soit $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur toute intervalle $[a,x]$ où $x \geq a$. Alors les l'intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$ converge.*

Preuve. Considérons la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Pour tout $x \leq y$ on a

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_a^y f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt \quad \text{(d'après la relation de Chasles)} \\ &\leq \int_a^x f(t)\,dt = F(x) \quad \text{(d'après la positivité de l'intégrale),} \end{aligned}$$

ce qui assure que $F(x)$ est croissante, et elle est positive (intégrale de fonction positive), donc pour que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x)$ existe il faut et il suffit que elle est majorée, alors l'intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$ converge. ■

6.4.1 Critère de comparaison

Proposition 6.4 *Soit $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur toute intervalle $[a,x]$ où $x \geq a$. Alors les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$ est de même nature.*

Preuve. Il suffit d'utiliser la relation de Chasles

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^{+\infty} f(t)\,dt,$$

et l'intégrale $\int_a^c f(t)\,dt$ est l'intégrale de Riemann converge. ■

Proposition 6.5 *Soient f et g deux fonctions positives, intégrables sur toute intervalle $[a,x]$ où $x \geq a$. On suppose qu'il existe $c \geq a$ telles que $f(x) \leq g(x)$; $\forall x \geq c$, on a*

– Si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ est converge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge aussi.
– Si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ est diverge aussi.

Remarque 6.4 *On peut appliquer cette proposition dans le cas $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, et on obtient les mêmes résultats que ci-dessus.*

6.4.2 Critère d'équivalence

Proposition 6.6 *Soient f et g deux fonctions positives et intégrables sur toute intervalle $[a,x]$ où $x \geq a$. On suppose que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in [0,+\infty]$. Alors*

- Si $l \notin \{+\infty, 0\}$, alors les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ est de même nature.
- Si $l = 0$, si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
- Si $l = +\infty$, si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

6.4.3 Critères de Riemann

Proposition 6.7 *Soit f une fonction positive et intégrable sur toute intervalle $[a, x]$ où $x \geq a$. On suppose qu'il existe $l \in \overline{\mathbb{R}^+} = [0, +\infty]$ tel que*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{\alpha} f(x) = l; \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Si $\alpha > 1$ et $l \neq +\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
- Si $\alpha \leq 1$ et $l = +\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

6.5 Intégrales de fonctions de signe arbitraires

6.5.1 Convergence absolue

Définition 6.5 *On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente, si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.*

Proposition 6.8 *Toute intégrale généralisée converge absolument elle converge.*

Remarque 6.5 *La réciproque de cette proposition est généralement fausse.*

Définition 6.6 *On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est semi-convergente lorsqu' elle est convergente sans converge absolument.*

6.5.2 Critère de Cauchy

Proposition 6.9 *Soit f une fonction intégrable sur toute intervalle $[a, x]$ où $x \geq a$. Pour que l'intégrale $\int_a^b f(t)$ soit convergente, il faut et il suffit que*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \forall x \in [a; b[\ \textit{tels que } b - \delta < x < y < b \ \textit{ on a } \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| < \varepsilon. \tag{6.7}$$

Preuve. Considérons la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, on a

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^y f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \\ &= \int_x^y f(t)\,dt. \end{aligned}$$

En appliquant le critère de Cauchy pour $F(x)$, on obtient

$$F(y) - F(x) < \varepsilon.$$

donc la proposition (6.7) est vraie. ■

6.5.3 Critère d'Abel-Dirichlet

Proposition 6.10 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur toute intervalle $[a, x]$ où $x \geq a$, vérifiant les propriétés*

– *La fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, positive, décroissante sur $[a; b[$, et*

$$\lim_{x \longrightarrow b} f(x) = 0.$$

– *La fonction g satisfait la propriété suivante*

$$\exists M > 0,\ \forall x, y \in [a; b[\quad \left| \int_x^y g(t)\,dt \right| < M.$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ converge, de plus

$$\left| \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \right| < M f(x), \quad \forall x \in [a; b[\tag{6.8}$$

6.6 Intégrale généralisée et série numérique

Ce critère permet de déterminer la nature d'une intégrale impropre à partir de la nature d'une série numérique, et vice versa.

Théorème 6.2 *Soient $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive, intégrable sur toute intervalle $[a, x]$ où $x \geq a$, et $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique croissante telle que $x_1 = a$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = +\infty$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et la série numérique $\sum\limits_{n \geq 1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ ont la même nature.*

Preuve. Considérons $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$, En utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_n}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \\ &= \int_{x_1=a}^{x_2} f(t)\,dt + \int_{x_2}^{x_3} f(t)\,dt + \ldots + \int_{x_n}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \\ &= \int_a^{x_n} f(t)\,dt, \end{aligned}$$

cette égalité donne que la nature de la suite $\left(\int_a^{x_n} f(t)\,dt\right)_n$ de la nature de la suite $(S_n)_n$, et la proposition6.1 assure que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ ont la même nature. ■

Théorème 6.3 *Soient $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante. Alors l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ et la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ ont la même nature.*

Preuve. La fonction f est positive et décroissante, on a

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \;\; ; \text{ où } \; x \in [k, k+1] \text{ pour tout } k > 0.$$

En utilisant le critère de la croissance de l'intégration, on obtient

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx \ ,$$

ceci implique

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \ ,$$

en sommant de 1 à $n-1$ l'expression précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ ,$$

ou sous la forme

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ ,$$

en utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ ,$$

l'expression précédente devient

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ ,$$

ou encore

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1} \ . \tag{6.9}$$

La relation (6.9) assure que la suite $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)_n$ et la suite des sommes partielles ont la même nature, ceci implique l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ et la série numérique $\sum_{n\geq 1} f(n)$ ont la même nature (d'après théorème1.6). ■

Exemple 6.4 *La suite de Riemann* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *et l'intégrale de Riemann* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *ont la même nature.*

6.7 Changement de variable dans une intégrale impropre

Théorème 6.4 *Soient* $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction intégrable sur toute intervalle* $[a,x]$ *où* $x \geq a$*, et* $\varphi : [\alpha;\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $\varphi(\alpha) = a$ *et* $\varphi(\beta) = x$*. Alors*

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

6.8 Intégration par parties dans une intégrale impropre

Théorème 6.5 *Soient* f*,* $g : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$*. Alors*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,g'(t)\,dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} [f(t)\,g(t)]_a^x - \int_a^{+\infty} f'(t)\,g(t)\,dt.$$

6.9 Formules de la moyenne

6.9.1 Première formule de la moyenne

Théorème 6.6 *Soient* f *,* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* f *est intégrable de signe constant et* g *est continue, alors*

$$\exists c \in [a,b] \text{ tel que } \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt.$$

Preuve. Notons que si $f(x)=0$ l'égalité est triviale. Supposons maintenant que $f(x)>0$, on a

$$m\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \leq M\int_a^b f(t)\,dt, \tag{6.10}$$

où $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)$, et $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} g(x)$.
Comme $f(x)\neq 0$, les inégalités (6.10) deviennent

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt}{\int_a^b f(t)\,dt} \leq M, \tag{6.11}$$

et comme g est continue, donc

$$\exists c\in[a,b] \text{ tel que } \frac{\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt}{\int_a^b f(t)\,dt} = g(c),$$

puis le résultat souhaité. ■

6.9.2 Seconde formule de la moyenne

Théorème 6.7 *Soient f, $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est positive, décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ et g est continue, alors*

$$\exists c\in[a,b] \textit{ tel que } \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(a)\int_a^b g(t)\,dt.$$

Preuve. Voir [7] ■

6.10 Valeur principale de Cauchy

Proposition 6.11 *Soit $f\ :]-\infty;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ existe.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}\int_x^a f(t)\,dt + \lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_a^x f(t)\,dt \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_{-x}^a f(t)\,dt + \lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_a^x f(t)\,dt \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\int_{-x}^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_{-x}^x f(t)\,dt,
\end{aligned}$$

et si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \int_{-x}^{x} f'(t)\,dt$ existe. ∎

Remarque 6.6 *La réciproque de cette proposition généralement est fausse, par exemple*

$$\int_{-x}^{x} tdt = 0 \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_{-x}^{x} tdt = 0,$$

mais $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ diverge.

La limite $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \int_{-x}^{x} tdt$ s'appelle valeur principale de Cauchy de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$, et on écrit

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_{-x}^{x} tdt = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} tdt$$

Définition 6.7 *Soit $f :]-\infty; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente. On dit valeur principale de Cauchy de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ la limite, si elle existe, suivante*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\,dt.$$

Remarque 6.7 *Dans la cas où f une fonction continue sur $[a; b]$ mais admet un seul point singulier $c \in]a; b[$, alors valeur principale de Cauchy de l'intégrale $\int_{a}^{b} f(t)\,dt$ la valeur suivante*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\int_{a}^{c-x} f(t)\,dt + \int_{c+x}^{b} f(t)\,dt \right).$$

Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B

Département de MI 2023-2024

2ème Année Licence Maths(S3) Module : Analyse III

6.11 Série 6 (intégrales généralisées)

Exercice 1 : Étudiez la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t\,(t+1)}$.
2. $\int_{-1}^{1} \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.
3. $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$.
4. $\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\, dt$.

Exercice 2 : Étudiez la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \dfrac{1+\sin t}{\sqrt{t^3}}dt$.
2. $\int_0^{1} \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}}dt$.
3. $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}dt$.
4. $\int_2^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
5. $\int_0^{+\infty} x\exp(-x)\sin(x)\, dt$.

Exercice 3 : Étudiez la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ en utilisant les intégrales généralisées.

1. En déduire la nature de cette série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$.
2. Démontrer que l'intégrale impropre $\int_a^b \dfrac{1}{t}dt$, où $a<0<b$, est divergente.
3. Calculer la valeur principale de l'intégrale $\int_a^b \dfrac{1}{t}dt$ où $a<0<b$.
4. En déduire

$$v.p. \int_{-1}^{e} \frac{1}{t}dt.$$

6.12 Correction de la série 6

Exercice 1 :

1. En utilisant la décomposition en élément simple, on obtient

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1},$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)} &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t+1} dt \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^{x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x}{x+1} + \ln 2\right) \\
&= \ln 2,
\end{aligned}$$

donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(t+1)}$ est convergente.

2. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= 2 \lim_{x \longrightarrow 1} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= 2 \lim_{x \longrightarrow 1} [\arcsin t]_0^x \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

alors $\int_{-1}^{1} \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente.

3. En utilisant le changement $y = \sqrt{t}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt &= 2 \int_1^{+\infty} \cos y dy \\
&= 2 \int_1^{+\infty} \cos y dy \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$ est divergente.

4. On pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\, dt$$
En utilisant l'intégration par parties, on pose $f(t) = t^n$ et $g(t) = \exp(-t)$, on a
$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\, g'(t)\, dt. &= \int_0^x t^n \exp(-t)\, dt. \\ &= [f(t)\, g(t)]_0^x - \int_0^x f'(t)\, g(t)\, dt \\ &= -\left[t^n \exp(-t)\right]_0^x + n \int_0^x t^{n-1} \exp(-t)\, dt.\end{aligned}$$
par le passage à la limite lorsque $x \longrightarrow +\infty$, on obtient
$$I_n = n I_{n-1}.$$
Par récurrence on peut montrer que
$$I_n = n! I_0 = n! \left(\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x \exp(-t)\, dt \right) = n!.$$
Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\, dt$ est convergente.

Exercice 2 :

1. On a
$$0 \leq \frac{1+\sin t}{\sqrt{t^3}} \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}; \quad \forall t \geq 1$$
et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est l'intégrale de Riemann converge, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin t}{\sqrt{t^3}} dt$ est convergente d'après la règle de comparaison.
2. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ est doublement généralisée, il faut donc la décomposer, et on a
$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} = \int_0^a \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} + \int_a^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} \text{ où } a \in \left]0;1\right[,$$
pour étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$, il faut étudier la nature des intégrales $\int_0^a \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ et $\int_a^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$.
   – Pout l'intégrale $\int_0^a \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$, on pose $f(t) = \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ et $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, et on a
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{(1-t)} = 1,$$

donc $\int_0^a \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ et $\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t}}$ ont la même nature selon le critère d'équivalence, et comme $\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t}}$ intégrale de Riemann converge, alors l'intégrale $\int_0^a \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ est converge aussi.

– Pout l'intégrale $\int_a^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$, on pose $f(t) = \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ et $g(t) = \frac{1}{1-t}$, et on a

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{t}} = 1,$$

donc $\int_a^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ et $\int_a^1 \frac{dt}{1-t}$ ont la même nature selon le critère d'équivalence, et comme $\int_a^1 \frac{dt}{1-t}$ diverge, alors l'intégrale $\int_0^a \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ est diverge aussi. Par conséquent l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}dt$ est divergente.

3. On pose $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin t$, et il est clair que la fonction f est positive, décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; +\infty[$, et on a

$$\begin{aligned}\int_1^x \sin t dt &= -[\cos t]_1^x \\ &= (\cos 1 - \cos x) \\ &= \cos 1 - \cos x\end{aligned}$$

donc

$$\left|\int_1^x \sin t dt\right| = |\cos 1 - \cos x| \leq 1 + \cos 1$$

d'où

$$\left|\int_1^{+\infty} \sin t dt\right| \leq M = 1 + \cos 1.$$

Alors d'après la règle de Dirichlet l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

4. Posons $f(t) = \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$.

– Pour $\alpha > 1$, on a

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} t^\lambda f(t) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1}{t^{\alpha-\lambda}\ln^\beta t} = 0; \quad \lambda \in]1, \alpha[$$

d'après le critère de Riemann ($\alpha - \lambda > 0$), l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$ converge.

– Pour $\alpha < 1$, on a

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} t^\lambda f(t) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1}{t^{\alpha-\lambda}\ln^\beta t} = +\infty; \quad \lambda \in]\alpha, 1[$$

d'après le critère de Riemann ($\alpha - \lambda < 0$), l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$ diverge.

– Pour $\alpha = 1$, en utilisant le changement de variable $y = \varphi(t) = \ln t$, on obtient

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} dt = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta},$$

et cette dernière intégrale est une intégrale de Riemann converge pour $\beta < 1$ et diverge pour $\beta \geq 1$.

Remarque 6.8 *Cette dernière intégrale s'appelle intégrale de Bertrand.*

5. En étudiant la convergence absolue, on a

$$|x \exp(-x) \sin(x)| \leq x \exp(-x).$$

et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2 [x \exp(-x)] = 0$, d'après le critère de Riemann $\int_0^{+\infty} x \exp(-x)\, dt$ converge, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} x \exp(-x) \sin(x)\, dt$ est absolument convergente.

Exercice 3 :

1. En utilisant le changement de variable $y = \ln(t+1)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{dt}{(t+1)\ln(t+1)} &= \int_{\ln 2}^{\ln(x+1)} \frac{dy}{y} \\ &= [\ln y]_{\ln 2}^{\ln(x+1)} \\ &= \ln[\ln(x+1)] - \ln(\ln 2)\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)\ln(t+1)} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{(t+1)\ln(t+1)} \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln[\ln(x+1)] - \ln(\ln 2) \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

donc l'intégrale généralisée est divergente, et d'après le théorème de comparaison série-intégrale, la série est aussi divergente.

2. On a

$$0 < \frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{\ln n}; \quad \forall n \geq 2,$$

et

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n},$$

donc la série $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

3. On étudier la nature de l'intégrale $\int_0^b \frac{1}{t}dt$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{1}{t}dt &= \lim_{x\longrightarrow 0}\int_x^b \frac{1}{t}dt \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}[\ln t]_x^b \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}(\ln b - \ln x) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

alors l'intégrale impropre $\int_0^b \frac{1}{t}dt$ est divergente, ce qui entraîne la divergence de l'intégrale impropre $\int_a^b \frac{1}{t}dt$, où $a < 0 < b$.

4. On sait que $f(t) = \frac{1}{t}$une fonction continue sur $[a;b]$, admet un seul point singulier $0 \in]a;b[$, donc

$$\begin{aligned}v.p. \int_a^b \frac{1}{t}dt &= \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\int_a^{-x} f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\int_a^{-x} \frac{1}{t}dt + \int_x^b \frac{1}{t}dt\right) \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\left([\ln|t|]_a^{-x} + [\ln|t|]_x^b\right) \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}(\ln|-x| - \ln|a| + \ln b - \ln x) \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}(\ln x - \ln(-a) + \ln b - \ln x) \\ &= \ln b - \ln(-a) \\ &= \ln\left(-\frac{b}{a}\right).\end{aligned}$$

5. Pour $a = -1$ et $b = e$, on obtient

$$v.p. \int_{-1}^e \frac{1}{t}dt = \ln e = 1.$$

Chapitre 7

Fonctions définies par une intégrale

Ce chapitre est consacré à l'étude de toutes les propriétés (limite, continuité, différentiabilité et intégrabilité) d'une fonction définie par une intégrale, et nous introduisons quelques fonctions spéciales définies par une intégrale.

7.1 Intégrale propre dépendant d'un paramètre

Définition 7.1 *Soit*

$$\begin{aligned} f : [a, b] \times [u, v] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto f(x, t) \end{aligned}$$

une fonction intégrable par rapport à $t \in [u, v]$ *, où* u *et* v *sont des fonctions de* $x \in [a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *ou des constantes. On dit fonction définie par une intégrale toute fonction* $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que*

$$F(x) = \int_u^v f(x, t)\, dt.$$

7.2 Propriétés d'une fonction définie par une intégrale propre

7.2.1 Continuité

Proposition 7.1 *Si $f(x,t)$ est continue sur $[a,b]\times[u,v]$ et $u(x)$ et $v(x)$ sont continués sur $[a,b]$, alors la fonction $F(x)$ est continue sur $[a,b]$, en particulier*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow x_0} F(x) &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\int_u^v f(x,t)\,dt\\ &= \int_u^v \lim_{x\longrightarrow x_0} f(x,t)\,dt\\ &= \int_u^v f(x_0,t)\,dt\\ &= F(x_0).\end{aligned}$$

Exemple 7.1 *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ par*

$$f(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xt)}{t} & si\ \ (x,t)\in\mathbb{R}\times]0,\pi]\\ 1 \quad si & \qquad t=0\quad ,\end{cases}$$

Il est clair que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ et u et v sont des constantes, alors la fonction $F(x)=\int_0^\pi \dfrac{\sin(xt)}{t}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

7.2.2 Dérivabilité

Proposition 7.2 *Si $f(x,t)$ et $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$ sont continués sur $[a,b]\times[u,v]$ et $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables sur $[a,b]$, alors la fonction $F(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et on a*

$$F'(x)=f(x,v)\,v'(x)-f(x,u)\,u'(x)+\int_u^v\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt.$$

Exemple 7.2 *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ par*

$$f(x,t)=t\sin(xt)$$

Il est clair que la fonction f et $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$ sont continués sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ et

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)=t^2\cos(xt)$$

et u et v sont des constantes, alors la fonction $F(x)=\int_0^\pi\dfrac{\sin(xt)}{t}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt\\ &=\int_0^\pi t^2\cos(xt)\,dt.\end{aligned}$$

7.2.3 Intégrabilité

Proposition 7.3 *Si $f(x,t)$ est continue sur $[a,b]\times[u,v]$ et $u(x)$ et $v(x)$ sont continués sur $[a,b]$, alors la fonction $F(x)$ est intégrable sur $[a,b]$, en particulier*

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)\,dx &= \int_a^b\int_u^v f(x,t)\,dtdx\\ &= \int_u^v\int_a^b f(x,t)\,dxdt\end{aligned}$$

Exemple 7.3 *Considérons la fonction f définie sur $[0,1]\times[0,\pi]$ par*

$$f(x,t) = t\sin(xt)$$

Il est clair que la fonction f est continue sur $[0,1]\times[0,\pi]$ et $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) = t^2\cos(xt)$ et u et v sont des constantes, alors la fonction $F(x) = \int_0^\pi \dfrac{\sin(xt)}{t}dt$ est intégrable sur $[0,1]$, et on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,dx &= \int_0^1\int_0^\pi f(x,t)\,dtdx\\ &= \int_0^1\int_0^\pi t\sin(xt)\,dtdx\\ &= \int_0^\pi\int_0^1 t\sin(xt)\,dxdt\\ &= -\int_0^\pi \cos(xt)\,dt.\end{aligned}$$

7.3 Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre

Définition 7.2 *Soit f une fonction définie par*

$$\begin{aligned} f : [a,b]\times[u,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,t) &\longmapsto f(x,t)\end{aligned}$$

où u et v sont des fonctions de $x\in[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou des constantes. On dit intégrale généralisée dépendant d'un paramètre $x\in[a,b]$ l'intégrale suivante

$$\int_u^{+\infty} f(x,t)\,dt. \tag{7.1}$$

et on dit que l'intégrale (7.1) converge si $\lim\limits_{v\longrightarrow+\infty}\int_u^v f(x,t)\,dt$ existe et on écrit

$$F(x) = \int_u^{+\infty} f(x,t)\,dt. \tag{7.2}$$

Remarque 7.1 *par analogie avec les intégrales généralisées du chapitre 6, nous définissons les autres types d'intégrales généralisées en fonction d'un paramètre, c'est-à-dire que pour l'intégrale généralisée* $\int_{-\infty}^{u} f(x,t)\,dt$ *ou l'intégrale généralisée* $\int_{u}^{v} f(x,t)\,dt$ *ou pour l'intégrale généralisée doublement généralisée. Nous admettons aussi, pour les autres types, les propriétés suivantes*

7.3.1 Convergence uniforme des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Définition 7.3 *On dit que l'intégrale généralisée (7.1) est uniformément convergente sur* $[a,b]$*, si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in [a,b], \forall y \geq \delta \text{ on a } \left| F(x) - \int_{u}^{y} f(x,t)\,dt \right| < \varepsilon. \tag{7.3}$$

Théorème 7.1 *Soit* f *une fonction définie par*

$$f : [a,b] \times [u,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t)$$

telle que l'intégrale généralisée $\int_{u}^{+\infty} f(x,t)\,dt$ *existe* $\forall x \in [a,b]$*. Alors l'intégrale généralisée* $\int_{u}^{+\infty} f(x,t)\,dt$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *si, et seulement si la suite de fonctions de terme général* $F_n(y) = \int_{u}^{y_n} f(x,t)\,dt$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *où* $(y_n)_n$ *est une suite de* $[u,+\infty[$*, telle que* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} y_n = +\infty$.

Preuve. La preuve de ce théorème découle immédiatement du théorème du chapitre 6. ■

Critère de Cauchy

Théorème 7.2 *L'intégrale généralisée (7.1) est uniformément convergente sur* $[a,b]$*, si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in [a,b], \forall y_1 > y_2 \geq \delta \text{ on a } \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x,t)\,dt \right| < \varepsilon. \tag{7.4}$$

Preuve. Supposons que l'intégrale généralisée (7.1) soit uniformément convergente sur $[a,b]$. On a alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in [a,b], \forall y_1 > y_2 \geq \delta \text{ on a } \left| \int_{y_1}^{+\infty} f(x,t)\,dt \right| < \varepsilon/2 \text{ et } \left| \int_{y_2}^{+\infty} f(x,t)\,dt \right| < \varepsilon/2. \tag{7.5}$$

Et d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x,t)\,dt\right| &= \left|\int_{y_1}^{+\infty} f(x,t)\,dt - \int_{y_2}^{+\infty} f(x,t)\,dt\right| \\ &\leq \left|\int_{y_1}^{+\infty} f(x,t)\,dt\right| + \left|\int_{y_2}^{+\infty} f(x,t)\,dt\right| \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon. \quad \forall x\in[a,b],\ \forall y_1>y_2\geq\delta.\end{aligned}$$

Réciproquement : Supposons maintenant que l'intégrale généralisée (7.1) vérifie le critère de Cauchy, donc

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0, \forall x\in[a,b], \forall y_1>y_2\geq\delta \text{ on a } \left|\int_{y_1}^{y_2} f(x,t)\,dt\right|<\varepsilon.$$

Et par le passage à la limite, quand $y_2 \longrightarrow +\infty$, alors l'intégrale généralisée (7.1) est uniformément convergente sur $[a,b]$. ■

Critère de Weierstrass

Théorème 7.3 *Supposons qu'il existe une fonction réelle $\varphi(t)$ positive et intégrable sur $[u,v]$ (appelée fonction majorante) vérifiant*

- $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $x\in[a,b]$.
- $\int_u^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ converge.

Alors l'intégrale généralisée $\int_u^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge absolument et uniformément sur $[a,b]$.

Preuve. On a $\int_u^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ converge, donc

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0, \forall x\in[a,b] \text{ on a } \left|\int_u^{+\infty}\varphi(t)\,dt\right|<\varepsilon.$$

et comme $|f(x,t)|\leq\varphi(t)$ pour tout $x\in[a,b]$, ce qui assure que $\int_u^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge normalement sur $[a,b]$, donc absolument et uniformément sur $[a,b]$. ■

Exemple 7.4 *Considérons la fonction f définie sur $[1,+\infty[\times[0,\pi]$ par*

$$f(x,t)=\frac{\sin(xt)}{t^\alpha} \text{ où } \alpha>1.$$

On a

$$\left|\frac{\sin(xt)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha},$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$ intégrale de Riemann $\alpha>1$ converge, alors d'après le critère de Weierstrass l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t^\alpha}dt$ converge absolument et uniformément sur $[0,\pi]$.

Critère d'Abel-Dirichlet

Théorème 7.4 *Soient f , g :$[a,b]\times[u,+\infty[$ deux fonctions bornées et intégrables par rapport à t sur toute intervalle $[u,v]$ où $v\geq u$, vérifiant les propriétés*

– La fonction f est positive, décroissante sur $[a,b]$, et

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} f(x,t)=0 \text{ uniformément } \forall x\in[a,b].$$

– La fonction g satisfait la propriété suivante

$$\exists M>0,\ \forall v\geq u\quad \left|\int_u^v g(x,t)\,dt\right|<M.$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(x,t)\,g(x,t)\,dt$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Preuve. La preuve de ce théorème découle immédiatement de la proposition6.10. ■

7.3.2 Propriétés des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Continuité

Proposition 7.4 *Soit $f(x,t)$ est continue sur $[a,b]\times[u,+\infty[$. Si l'intégrale (7.1) converge uniformément vers $F(x)$ sur $[a,b]$, alors la fonction $F(x)$ est continue sur $[a,b]$, en particulier*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow x_0} F(x) &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\int_u^{+\infty} f(x,t)\,dt\\ &= \int_u^{+\infty}\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x,t)\,dt\\ &= \int_u^{+\infty} f(x_0,t)\,dt\\ &= F(x_0).\end{aligned}$$

Preuve. On pose $F_n(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\int_u^n f(x,t)\,dt$, et comme l'intégrale (7.1) converge uniformément vers $F(x)$, alors la suite $(F_n(x))_n$ converge uniformément, et comme les termes de la suite $(F_n(x))_n$ sont des fonctions continues, d'après théorème2.1, la limite $F(x)$ est continue. ■

Dérivabilité

Proposition 7.5 *Supposons que $f(x,t)$ et $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$ sont continués sur $[a,b]\times[u,+\infty[$. Si l'intégrale (7.1) converge vers $F(x)$ sur $[a,b]$ et $\int_u^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors on a*

– L'intégrale (7.1) converge uniformément sur $[a,b]$.

– La fonction $F(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$F'(x) = \int_u^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt.$$

Preuve. On pose $F_n(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \int_u^n f(x,t)\, dt$, d'après la proposition7.2, la suite $(F_n'(x))_n$ suite des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et on a

$$F_n'(x) = \int_u^n \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt.$$

Et comme la suite $(F_n(x))_n$ converge uniformément (car $\int_u^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt$ converge uniformément sur $[a,b]$), d'après le thérème2.3, la limite $F(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$F'(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} F_n'(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_u^n \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt = \int_u^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt.$$

■

Intégrabilité

Proposition 7.6 *Si $f(x,t)$ est continue sur $[a,b] \times [u,+\infty[$. Si l'intégrale (7.1) converge uniformément vers $F(x)$ sur $[a,b]$, alors la fonction $F(x)$ est intégrable sur $[a,b]$, en particulier*

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)\, dx &= \int_a^b \int_u^{+\infty} f(x,t)\, dt dx \\ &= \int_u^{+\infty} \int_a^b f(x,t)\, dx dt \end{aligned}$$

Preuve. On pose $F_n(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \int_u^n f(x,t)\, dt$, et comme l'intégrale (7.1) converge uniformément vers $F(x)$, d'après la proposition7.3, la suite $(F_n(x))_n$ est une suite des fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$, en utilisant le théorème2.2, la limite $F(x)$ est intégrable sur $[a,b]$, et on a

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)\, dx &= \int_a^b \int_u^{+\infty} f(x,t)\, dt dx \\ &= \int_a^b \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} \int_u^n f(x,t)\, dt \right) dx \\ &= \lim_{x \longrightarrow x_0} \int_a^b \int_u^n f(x,t)\, dt dx \\ &= \lim_{x \longrightarrow x_0} \int_u^n \int_a^b f(x,t)\, dt dx \\ &= \int_u^{+\infty} \int_a^b f(x,t)\, dx dt. \end{aligned}$$

■

7.4 Fonctions Eulériennes spéciales

Dans cette section, nous étudions les fonctions Eulériennes, qui sont la fonction Gamma et la fonction Bêta. Ces fonctions sont utilisées dans de nombreux problèmes mathématiques et physiques.

7.4.1 La fonction Gamma

Définition 7.4 *La fonction Gamma, est la fonction Γ définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \tag{7.6}$$

7.4.2 Propriétés de la fonction Gamma

Proposition 7.7 *La fonction Gamma définie par l'intégrale (7.6) vérifié les propositions suivantes :*

1. L'intégrale (7.6) converge sur $]0, +\infty[$.
2. L'intégrale (7.6) converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$, en déduire que la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. La fonction Γ est de casse $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
4. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \; . \tag{7.7}$$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{7.8}$$
6. la fonction Γ peut être étendue à des valeurs négatives.

Preuve.

1. D'après la relation de Chasles, on écrit
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^{1} e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{7.9}$$
et on a $e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1} \quad \forall t \geq 0$, comme l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge sur $]0, +\infty[$, donc d'après la règle de comparaison, l'intégrale $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ converge sur $]0, +\infty[$. Pour démontrer la convergence de la deuxième intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, on pose $f(t) = e^{-t} t^{x-1}$ et $g(t) = e^{-t/2}$, on a $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} e^{-t/2} t^{x-1} = 0$, et comme $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge sur $\mathbb{R}$, donc $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge sur $\mathbb{R}$, par conséquent l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge sur $]0, +\infty[$, alors la fonction Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

2. Soient $t \in]0,1]$ et $x \geq a > 0$, on a $|e^{-t}t^{x-1}| = e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{a-1}$, et comme $\int_0^1 e^{-t}t^{a-1}dt$ converge, le critère de Weierstrass assure que l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$. Pour démontrer la convergence de la deuxième intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$, on prend $t \in [1,+\infty[$ et $0 < x \leq b$, on a $|e^{-t}t^{x-1}| = e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{b-1}$, et d'après le même critère intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ uniformément sur $]0,b]$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge uniformément sur $[a,b]$ où $0 < a < b < +\infty$.
3. Supposons que la fonction Γ est dérivable, donc

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\,dt. \tag{7.10}$$

En utilisant la relation de Chasles, on écrit

$$\Gamma'(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\,dt,$$

et d'après le critère de Weierstrass et l'inégalités

$$\left|e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\right| = e^{-t}t^{x-1}|\ln(t)| \leq e^{-t}t^{a-1}|\ln(t)| \quad \forall t \in]0,1], x \geq a > 0,$$

l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\,dt$ converge uniformément car $\int_0^1 e^{-t}t^{a-1}|\ln(t)|\,dt$ converge. De même, pour $t \in [1,+\infty[$ et $0 < x \leq b$, on a

$$\left|e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\right| \leq e^{-t}t^{x-1}\ln(t) \leq e^{-t}t^{b-1}\ln(t)$$

et $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}\ln(t)\,dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\,dt$ converge uniformément sur $[a,b]$ où $0 < a < b < +\infty$. Comme la fonction $e^{-t}t^{x-1}\ln(t)$ de casse $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, alors la fonction Γ est de casse $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et leur dérivée est donnée par l'expression (7.10). De proche à proche, nous pouvons démontrer que la fonction Γ est de casse $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
4. On a

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt$$

En utilisant l'intégration par parties, on pose $f(t) = t^x$ et $g'(t) = e^{-t}$, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_a^{+\infty} f(t)\,g'(t)\,dt \\
&= \lim_{y \longrightarrow +\infty} [f(t)\,g(t)]_a^y - \int_a^{+\infty} f'(t)\,g(t)\,dt \\
&= \lim_{y \longrightarrow +\infty} \left[e^{-t}t^x\right]_a^y - x\int_a^{+\infty} e^{-t}t^x dt \\
&= x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

5. Il est facile de voir que $\Gamma(1) = 1 = 0!$, et en utilisant (7.7), on obtient $\Gamma(2) = 1 = 1!$ et $\Gamma(3) = 2 = 2!$ et $\Gamma(4) = 2 \times 3 = 3!$, et par récurrence on obtient $\Gamma(n+1) = n!\,;\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
6. On sait que la fonction $\Gamma(x)$ est bien définie sur $]0,1[$, donc par translation la fonction $\Gamma(x+1)$ est bien définie sur $]0,1[$, et d'après (7.7), on a $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ donc $\Gamma(x)$ est bien définie sur $]-1,0[$, de proche à proche, la fonction $\Gamma(x)$ est bien définie sur tout intervalle de la forme $]-n-1,-n[\,;\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, Nous trouvons donc une extension de la fonction factorielle.

■

7.4.3 La fonction Bêta

Définition 7.5 *La fonction Bêta, est la fonction β définie par l'intégrale suivante*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \tag{7.11}$$

7.4.4 Propriétés de la fonction Bêta

Proposition 7.8 *La fonction Bêta définie par l'intégrale (7.11) vérifié les propositions suivantes :*

1. L'intégrale (7.6) converge pour $p,q \in\ ]0,+\infty[$.
2. $\beta(p,q) = \beta(q,p)$ pour $p,q \in\ ]0,+\infty[$.
3. Pour $p,q \in\ ]0,+\infty[$, on a
$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{7.12}$$

Preuve.

1. Pour $p,q \geq 1$, l'intégrale (7.11) est propre. Pour $p,q \in\ ]0,1[$, l'intégrale (7.11) est doublement généralisée, il peut être décomposé comme suit
$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$
Pour $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, on pose $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ et $g(x) = x^{p-1}$, donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} (1-x)^{q-1} = 1$, et comme $\int_0^a x^{p-1}dx$ converge pour $0 < p < 1$, d'après le critère d'équivalence $\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ converge pour $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, de même pour $p > 0$ et $q < 1$, on pose $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ et $g(x) = (1-x)^{q-1}$, donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} x^{p-1} = 1$, et comme $\int_a^1 (1-x)^{q-1}\,dx$ converge pour $p > 0$, d'après le critère d'équivalence $\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ converge pour $p > 0$ et $q < 1$, par conséquent l'intégrale (7.6) converge pour $p,q \in\ ]0,+\infty[$, et la fonction Bêta bien définie pour $p,q \in\ ]0,+\infty[$.

2. Il est immédiate.
3. Pour $p, q \in]0, +\infty[$, et si on prend $x = p$, l'intégrale (7.7) devient

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt,$$

en utilisant le changement $t = u^2$, on obtient

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2p-1} du. \tag{7.13}$$

De même pour $x = q$ et $t = v^2$, l'intégrale (7.7) sera

$$\Gamma(q) = 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2q-1} dv. \tag{7.14}$$

En multipliant (7.13) par (7.14), on obtient

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\left(u^2+v^2\right)} u^{2p-1} v^{2q-1} dudv.$$

En passant aux coordonnées polaires, nous posons $u = r\cos\theta$ et $v = r\sin\theta$, l'intégrale précédente devient

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta dr. \tag{7.15}$$

D'autre côté, on a

$$\Gamma(p+q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p+q-1} dt,$$

On utilise le changement de variable $t = r^2$, on obtient

$$\Gamma(p+q) = 2\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr. \tag{7.16}$$

On sait que

$$\beta(p,q) = \beta(q,p) = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1} dx.$$

On utilise maintenant le changement de variable $c = \sin^2\theta$, on obtient

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta. \tag{7.17}$$

De (7.15), (7.16) et (7.17), on obtient la relation (7.12).

■

Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B

Département de MI 2023-2024

2ème Année Licence Maths(S3) Module : Analyse III

7.5 Série 7 (Fonctions définies par une intégrale)

Exercice 1 :

1. Considérons la fonction suivante

$$f(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2t^2)}{2+t^2} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Démontrer que cette intégrale est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

   (b) Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Considérons la fonction suivante

$$f(x,t) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\exp(-xt)\, dt \;\; \forall x \in \left]0,+\infty\right[.$$

   (a) Démontrer que cette intégrale est uniformément convergente sur $\left]0,+\infty\right[$.

   (b) Démontrer que la fonction f est continue sur v.

Exercice 2 : Soit $f(x,t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R} \times \left]0,+\infty\right[$ par

$$f(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \exp(-t)\, dt$$

1. Démontrer que cette intégrale est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que $f(x,t)$ est de casse $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f'(x,t)$, en déduire $f(x,t)$.

Exercice 3 : Soit Γ la fonctin Gamma d'Euler

1. Déterminer $\Gamma(\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

2. Démontre que
$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^{\alpha}\right) dt = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \; ; \alpha > 0. \tag{7.18}$$

3. Calculer la valeur de $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, en déduire $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. Calculer l'intégrale de Gauss suivante
$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) dt.$$

7.6 Correction de la série 7

Exercice 1 :

1. Considérons la fonction suivante
$$f(x,t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2t^2\right)}{2+t^2}dt \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
   (a) On a
$$\left|\frac{\sin\left(x^2t^2\right)}{2+t^2}\right|\leq\frac{1}{2+t^2} \quad \forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\left]0,+\infty\right[,$$
   et comme $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2+t^2}dt$ converge sur$]0,+\infty[$, alors $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2t^2\right)}{2+t^2}dt$ converge uniformément d'après critère de Weierstrass.

   (b) La fonction $\frac{\sin\left(x^2t^2\right)}{2+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2t^2\right)}{2+t^2}dt$ converge uniformément, alors $f(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}$.

2. Considérons la fonction suivante
$$f(x,t)=\int_0^{+\infty}\sin(xt)\exp(-xt)\,dt \quad \forall x\in\left]0,+\infty\right[.$$
   (a) On a
$$|\sin(xt)\exp(-xt)|\leq\exp(-xt)\quad\leq\exp(-at)\quad\forall(x,t)\in[a,b]\times\left]0,+\infty\right[,$$
   où $0<a<b$, et comme $\int_0^{+\infty}\exp(-at)\,dt$ converge sur $]0,+\infty[$, alors $\int_0^{+\infty}\sin(xt)\exp(-xt)\,dt$ converge uniformément d'après critère de Weierstrass.

   (b) La fonction $\sin(xt)\exp(-xt)$ est continus sur $(]0,+\infty[)^2$, et comme $\int_0^{+\infty}\sin(xt)\exp(-xt)\,dt$ converge uniformément, alors $f(x,t)$ continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2 :

1. l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\,dt$ est doublement généralisée, il peut être décomposé comme suit
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\,dt=\int_0^{1}\frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\,dt.$$
   a. Si $0<t\leq1$, On a
$$\left|\frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\right|\leq\frac{\exp(-t)}{t}.$$
   La fonction $h(x,t)=\frac{1}{t}$ est positive, décroissante, et
$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}h(x,t)=0$$
   et la fonction $k(x,t)=\exp(-t)$ vérifie

$$\left|\int_0^1 \exp(-t)\,dt\right| = \int_0^1 \exp(-t)\,dt = 1 - e^{-1}.$$

Alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\,dt$ converge uniformément d'après le critère d'Abel.
b. Si $t \geq 1$, On a

$$\left|\frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\right| \leq \exp(-t).$$

et $\int_1^{+\infty} \exp(-t)\,dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\,dt$ converge uniformément, alors $f(x,t)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $g(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable $\frac{\partial}{\partial x}g(x,t) = \cos(xt)\exp(-t)$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$, et il est clair que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp(-t)\,dt$ converge uniformément, alors la fonction $f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\begin{aligned} f'(x,t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}g(x,t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp(-t)\,dt. \end{aligned}$$

3. On sait que

$$\cos x = \text{Re}\left(e^{ix}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x,t) &= \int_0^{+\infty} \text{Re}\left(e^{ix}\right)\exp(-t)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \text{Re}\left(e^{(ix-1)t}\right)dt \\ &= \text{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}dt\right) \\ &= \text{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière formule entre 0 et x, on obtient

$$f(x,t) = \arctan x.$$

Exercice 3 :

1. D'après la définition, on a

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt\,;\,\alpha > 0$$

2. Considérons l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^\alpha\right) dt.$$
En utilisant le changement de variable $u = t^\alpha$, on obtient
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^\alpha\right) dt &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-t} u^{\dfrac{1}{\alpha}-1} du \\ &= \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\ ;\ \alpha > 0.\end{aligned}$$

3. D'après la définition, on a
$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x\right)^{-\frac{1}{2}} dx$$
En utilisant le changement de variable $u = t^{-\frac{1}{2}}$, on obtient
$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 u^{-1}\left(1-u^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2udu \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du \\ &= 2\left[\arcsin u\right]_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.\end{aligned}$$
Posant $p = q = \dfrac{1}{2}$, la relation (7.12) devient
$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1\right)}. \tag{7.19}$$
mais $\Gamma\left(1\right) = 1$, donc
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi}$$

4. Pour $\alpha = 2,$, la relation (7.18) sera
$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$
et comme $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, alors l'intégrale de Gauss vaut
$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Bibliographie

[1] M. E. Amrani, *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*, Ellipses (2011).

[2] J. M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de mathématiques, tome 2 -Analyse,* Dunod (1988)

[3] J. M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de mathématiques, tome 3 -Compléments d'analyse*, Dunod (1993).

[4] J. M. Arnaudiès, P. Delezoide, H. Fraysse, *Exercices résolus des compléments d'analyse du cours de mathématiques 3,* Dunod, Paris, (1995).

[5] J. M. Arnaudiès, *Problèmes de préparation à l'agrégation de mathématiques 3, Analyse - séries, séries de fonctions, séries entières*, Ellipses (1997).

[6] J. M. Arnaudiès, *Séries entières, série de Puiseux, séries de Fourier et compléments sur les fonctions presque-périodiques*, Ellipses Marketing (1999).

[7] E. Azoulay, et al, *Mathematiques 3 Analyse*, McGraw-Hill (1984).

[8] B. Beck, I. Selon, *Analyse 2ème année PC PSI*, HACHETTE LIVRE Paris (2004).

[9] J. L. Ferrand, J.M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques (Tome 4) Equations différentielles Intégrales multiples*, DUNOD (1977).

[10] A. Lesfari, *Eléments d'analyse - Cours et exercices - Séries et intégrales généralisées*, Sochepress (1991).

[11] J. P. Marco, P. Thieullen, J. A. Weil, *Mathematiques L2 cursus LMD Cours complet avec 700 tests et exercices corriges*, Pearson Education France (2007).

[12] P. Thuillier, J. C. Belloc, *Analyse 3,* DUNOD (1982).