République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientifique

Université Larbi Ben M'Hidi d'Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques et Informatique

Numéro d'ordre : ....

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du dîplome de Master

Filière : Mathématiques **Option** : Mathématiques appliquées

Thème

La méthode de Nikiforov-Uvarov (NU) prolongée et ses applications

Présentée par : - Bettoum Rayane

- Sarri Amira

Soutenue le : 26 / 06 / 2023

Dr. Abdelouhab Benbrahim	Président	Univ. d'Oum Elbouaghi
Dr. Issam Boussafsaf	Encadrant	Univ. d'Oum Elbouaghi
Dr Mabrouk Bragdi	Examinateur	Univ. d'Oum Elbouaghi

Session : Juin 2023

ملخص

هذا العمل مخصص لدراسة طريقة نيكيفوروف أوفاروف الممددة لإيجاد حل للمعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية التي تملك على الأكثر أربع نقاط شاذة مع بعض التطبيقات في مجال الفيزياء الرياضية.

أولا، قمنا بتقديم تعريفات وخصائص أساسية نستخدمها في هذا العمل.

ثانيا، قدمنا طريقة نيكيفوروف أوفاروف وطريقة نيكيفوروف أوفاروف الممددة.

وأخيرا، في نهاية هذا العمل قدمنا تطبيقا لطريقة نيكيفوروف أوفاروف الممتدة والمتمثل في: حل معادلة هان وهان المتجمعة وحالات معينة منها.

الكلمات المفتاحية

طريقة نيكيفوروف أوفاروف، طريقة نيكيفوروف أوفاروف الممتدة، معادلة هان، معادلة هان المتجمعة.

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de la méthode de Nikiforov-Uvarov prolongée pour trouver une solution aux équations différentielles de second degré qui possède aux plus quatre points singuliers, avec quelques applications dans le domaine de la physique mathématiques.

D'abord, on a donné des définitions et les propriétés de base que on va les utiliserons dans notre travail.

Ensuite, nous avons présenté la méthode de Nikiforov-Uvarov et sa méthode prolongée.

Enfin, et à la fin de ce travail on a présenté une application de la méthode de Nikiforov-Uvarov prolongée qui a pour objet : résoudre l'équation de Heun et Heun confluente, et quelque cas.

Mots clés

Méthode de Nikiforov-Uvarov, méthode de Nikiforov-Uvarov prolongée, équation de Schrödinger, équation de Heun, équation de Heun confluente.

Abstract

In this work, we have presented two methods that are very important in many fields of research, namely the Nikiforov-Uvarov method and the extended Nikiforov-Uvarov method, for finding a solution to second-order differential equations in polynomial form. These methods are preferred by many researchers and scientific journals over many other methods. In this work, we have mentioned and studied the extended Nikiforov-Uvarov method for solving equations containing at most four singular points. We have complemented this work with a number of applications in mathematics and physics, such as solving the confluent Heun and Heun equation, and solving the Schrödinger equation for certain potentials such as the Coulomb potential and the Coulomb potential plus harmonic potential.

Key Words

Nikiforov-Uvarov Method, Extended Nikiforov-Uvarov Method, Schrödinger Equation, Heun Equation, Confluent Heun Equation.

REMERCIEMENTS

Nous remercions d'abord et avant tout Dieu de nous avoir donné toute cette force, cette patience et ce courage pour mener à bien ce travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre encadrant, le Dr Issam Boussafsaf, **et le remercions pour sa confiance, ses précieux conseils, et pour le temps qu'il nous a accordé. Nous adressons également nos sincères remerciements aux membres du jury : Dr Benbrahim Abdelouhab et Dr Mabrouk Bragdi qui nous ont fait l'honneur d'examiner nos mémoires.**

Nous remercions tous les professeurs du Département de Mathématiques et Informatique, Université Larbi Ben Lamhidi à Oum El Bouaghi.

Enfin, nous adressons nos sincères remerciements à nos parents, sœurs, frères, amis, et à tous ceux qui ont participé, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Amira et Rayane.

Dédicace

Je remercie Dieu de m'avoir donné la force de faire ce travail pour aller de l'avant.

Je le dédie à **mon cher père Djemai** *qui a moissonné des épines sur mon chemin pour me frayer la voie pour apprendre, et qui a fait des efforts au fil des ans, Afin de gravir les marches du succès, et m'a soutenu en toutes circonstances.*

Je le dédie à **ma chère Mère**, *qui a passé sa vie pour me voir toujours heureuse, et pour ses encouragements et ses prières tout au long de mes études.*

A mes très chers frères : **Ahmed** et **Achref**.

A ma très chère sœur : **Selsabil.**

A mes amis : **Amira, Souhila, loubna, Aicha, Hala, Marwa.**

À ma binôme, **Amira** *pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.*

Je me dédie cette lettre **Rayane.**

Bettoum Rayane

Dédicace

Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté de terminer ce projet de fin d'étude.

Mes remerciements s'adressent à ma famille :

Mes chers parents : Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect mon amour. Puisse Dieu. Le très Haut vous accorder santé, Bonheur et longue vie.

Mes belles sœurs : **Feryal, Noussa, Taima.**

Mes fils de ma sœur : **Abdo, Maram, Rayane, Farah.**

À ma chère binôme, **Rayane** pour l'amour, gratitude, patience et sa compréhension.

A mon fiancé : **Raouf.**

A tous mes amis : **Rayane, selsabil, Nada, Zoubaida, Saloua, Mona, Ilhem, Feryal, Hala, Marwa, Aicha.**

Je me dédie cette lettre **Amira.**

Sarri Amira

Table des matières

Introduction

La fonction de confluente hypergéométrique a été introduite par le mathématicien Allemand Leonard Euler au 18 siècle. Euler a étudié la série de Taylor de la fonction exponentielle et a découvert que cette série pouvait être exprimée en termes de la fonction de confluente hypergéométrique. Et au 19 siècle, la mathématicien Allemand Carl Friedrich Gauss a également travaillé sur la fonction de confluente hypergéométrique et a découvert plusieurs de ses propriétés importantes.

La méthode de la fonction confluente hypergéométrique a été développée plus tard, aux 20 siècle, par les mathématiciens russes Andrei Nikiforov et Vladimir Uvarov. Ils ont utilisé la fonction de confluente hypergéométrique pour développer une méthode systématique de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

En 1976, Nikiforov et Uvarov ont publié un livre intitulé "Fonctions spéciales de la physique mathématique" [1] dans laquelle ils ont présenté leur méthode, qui est maintenant connue sous le nom de méthode de Nikivorov-Uvarov.

La méthode de Nikivorov-Uvarov utilise la théorie des groupes de lie pour résoudre les équations différentielles. Elle repose sur la recherche d'une transformation qui permet de réduire l'équation différentielle à une équation plus simple, qui peut ensuite être résolue à l'aide de fonctions spéciales, telles que les fonctions de confluente hypergéométrique, cette méthode est également utilisée en physique mathématique pour résoudre des équations différentielles qui se posent dans de nombreux domaines, tels que la mécanique quantique, la relativité générale, la théorie quantique des champs, d'autres encore elle est également utilisée dans d'autres domaines des mathématiques.

Et en 1980, les scientifiques Ryszard Horodecki, Sergei Suslov, Anatoliy Klimyk, Vladimir Spiridonov et bien d'autres ont développé la méthode de Nikiforov-Uvarov, également connue sous le nom de méthode de Nikiforov-Uvarov prolongée (étendue), ces chercheurs ont étudié et développé diverses variantes et généralisations de la méthode Nikiforov-Uvarov, en l'adaptant à la résolution d'équations différentielles plus générales et plus complexes, non seulement des équations de type hypergéométrique, mais aussi des équations différentielles du second ordre contenant au maximum quatre points singuliers. Cette méthode améliore les techniques utilisées dans la méthode Nikiforov-Uvarov.

Les travaux de ces chercheurs ont permis d'étendre l'applicabilité de la méthode à un large éventail de problèmes mathématiques et physiques.

Ce travail est organisé en trois chapitres, structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les définitions générales est les propriétés et les notions essentielles que nous utiliserons par la suite. **Le deuxième chapitre** est divisé en deux parties, dans la première partie, nous expliquerons en détails les différentes étapes de la méthode de Nikiforov-Uvarov avec quelques exemples, et dans la deuxième partie, nous avons présenté le prolongement de la méthode de Nikiforov-Uvarov et expliqué en détail ses différentes étapes.

Dans le troisième chapitre, on donne quelques applications sur la méthode de Nikiforov-Uvarov Prolongée, Dans la première application, nous avons résolu l'équation de Schrödinger pour certains potentiels tels que le potentiel de Colomb et le potentiel harmonique plus un autre potentiel, on va résoudre aussi l'équation de Heun en utilisant cette méthode, et après, nous avons traité la solution de l'équation de **Heun confluente** par la même méthode, dans ordre de trouver la solution aux valeurs propres et la fonction propre, et nous avons résolu des cas particuliers de l'équation de **Heun confluente**, dont : le problème de coulomb sur 3-sphérs, deux électrons se repoussent coulombiquement sur une sphère, et potentiel hyperbolique à double puits, et on termine ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Définition 1.0.1 ***Points singuliers et ordinaires :[2]***

Nous nous référons à l'équation linéaire homogène de deuxième ordre

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0, \tag{1.1}$$

où w est une fonction complexe d'une variable complexe z, $p(z)$ et $q(z)$ sont des fonctions de la variable z.

Un point z_0 est dit un point ordinaire de l'équation (1.1) si $p(z)$ et $q(z)$ sont deux fonctions régulières en z_0.

Tout autre point est une singularité de l'équation.

Définition 1.0.2 ***Singularités régulières et irrégulières :[2]***

Supposons que z_0 soit une singularité, si elle est en z_0, on dit que la singularité en z_0 est régulière si les limites suivantes existent :

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\,p(z) = A; \\ \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^2\,q(z) = B, \end{cases} \tag{1.2}$$

où

* $p(z)$ est régulier ou a un pôle d'ordre 1.

* $q(z)$ est régulier ou a un pôle d'ordre ne dépassant pas 2.

Sinon z_0 est un point singulier irrégulier.

1.1 Formule de Rodrigues :

En mathématiques, la formule de Rodrigues (anciennement appelée formule de Ivory-Jacobi) est une formule impliquant les polynômes de Legendre, indépendamment découverte par Olinde Rodrigues, James Ivory et Charles Gustave Jacob Jacobi.

Considérons l'équation différentielle du second ordre sans second membre suivante :

$$p(x)\, y'' + q(x)\, y' + \lambda y = 0,$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes tels que $\deg(p(x)) \leq 2$ et $\deg(q(x)) \leq 1$ et que λ est une constante.

On définit la fonction $\omega(x)$ par la formule suivante :

$$\omega(x) = \frac{1}{p(x)} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{p(t)} dt\right).$$

Alors la suite des polynômes orthogonaux qui solutionnent ce problème est donnée par la formule de Rodrigues :[9]

$$P_n(x) = \frac{c_n}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\omega(x) (p(x))^n\right];\ n \in \mathbb{N},$$

à un facteur de normalisation prés c_n $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.1.1 *Une fonction $p(x)$ carré intégrable est normalisée dans l'espace $L_2(\Omega)$ si est seulement si :*

$$\|p(x)\|_{L_2(\Omega)} = 1.$$

1.2 La fonction hypergéométrique :

Le terme de séries hypergéométriques a été introduit par John Wallis en 1656, et elles ont été étudiées pour la première fois par Gauss en 1812. Les fonctions hypergéométriques sont introduites comme généralisation de la notion de séries géométriques.

Les fonctions hypergéométriques sont des fonctions qu'on exprimer en séries entières qui ont une forme un peu spéciale et particulière, elles permettent également d'exprimer des fonctions spéciales et des polynômes orthogonaux classique tel que ceux de Bessel, de Legendre, Jacobi ou de Hermite.

Nous définissons la fonction hypergéométrique généralisée ${}_pF_q$ dépendant de plusieurs paramètres α_i et β_j de la manière suivante :

$$\begin{aligned} {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_q; x) &= {}_pF_q \left[\begin{array}{c} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; \end{array} x \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n, (\alpha_2)_n, \ldots (\alpha_p)_n \, x^n}{(\beta_1)_n, (\beta_2)_n, \ldots (\beta_q)_n \, n!}, \end{aligned}$$

avec le symbole de Pochhammer $(\alpha)_n$ définit par :

$$\begin{aligned} (\alpha)_n &= \alpha(\alpha+1), \ldots, (\alpha+n-1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Si α_i est égal à zéro ou un nombre entier négatif alors la série se termine, c-à-d ${}_pF_q$ devient un polynôme.

En particulier, discutons de trois types de fonction hypergéométrique célèbres :

– **Le cas où** $p = 1$**,** $q = 0$ **:**

$$_1F_0\left(a;x\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n}{n!} x^n,$$

est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left[(1-x)\frac{d}{dx} - a\right] \ _1F_0\left(a;x\right) = 0.$$

– **Le cas où** $p = 2$**,** $q = 0$ **:**

$$_2F_0\left(a,b;x\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n\,(b)_n}{n!} x^n,$$

est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left[x^2\frac{d^2}{dx^2} + \left[-1+(1+b+a)\,x\right]\frac{d}{dx} + ab\right] \ _2F_0\left(a,b;x\right) = 0.$$

– **Le cas où** $p = 2$**,** $q = 1$ **:**

$$_3F_0\left(a,b;c;x\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n\,(b)_n}{n!\,(c)_n} x^n,$$

est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left[x\,(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + \left[c-(a+b+1)\,x\right]\frac{d}{dx} - ab\right] \ _3F_0\left(a,b;c;x\right) = 0.$$

1.3 L'équation de Heun

1.3.1 La forme générale de l'équation de Heun (HE) :

Définition 1.3.1 *La forme générale de l'équation de Heun dans laquelle Gauss hypergéométrique, confluente hypergéométrique, Mathieu, Ince, Legendre, Laguerre, les fonctions de Bessel, est une équation différentielle linéaire du second ordre s'écrire sous la forme suivante [2] [8] :*

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-a}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z\left(z-1\right)\left(z-a\right)}y = 0, \tag{1.3}$$

ou : $z \in \mathbb{C}$ et $y\left(z\right)$ est une fonction de variable complexe z et α, β, γ, δ, ϵ, q, a sont des paramètres généralement complexes et arbitraires, lies par la contrainte Fuchsienne :

$$\delta + \gamma + \epsilon = \alpha + \beta + 1 \tag{1.4}$$

et le nombre complexe q est appelé paramètre accessoire.

L'équation de Heun (1.3-1.4) a quatre points singuliers à. $z = 0$, $z = 1$, $z = a$ et.$z = \infty$. Les solutions de Heun les plus étudiées sont les équations polynomiales de Heun, ces solutions s'écrivent sous la forme suivante :

$$Hp\left(z\right) = z^{\sigma_1}\left(z-1\right)^{\sigma_2}\left(z-a\right)^{\sigma_3}p\left(z\right),$$

où σ_1, σ_2 et σ_3 sont des constantes réels.

1.3.2 La forme générale de l'équation de Heun confluente :

L'équation différentielle de Heun confluente, écrite sous la forme uniforme la plus simple, est

$$y'' + \left(\alpha + \frac{\beta+1}{z} + \frac{\gamma+1}{z-1}\right) y' + \left(\frac{\mu}{z} + \frac{\nu}{z-1}\right) y = 0,$$

qui peut s'écrire comme suit :

$$zy'' + \left[-2z^2 - \beta z + (\alpha+1)\right] y' + \left[(\gamma - \alpha - 2) z - \frac{1}{2}(\delta + (\alpha+1)\beta)\right] y = 0.$$

Remarque 1.3.1 *l'équation de Heun confluente c'est un cas particulier parmi quatre cas confluentes, ceci est obtenu lorsque la singularité à* $z = a$ *est fusionnée avec celle à* $z = \infty$ *,résultant en une équation ayant toujours des singularités régulières à* $z = 0$ *et* 1*, et une singularité irrégulière de rang* 1 *à* ∞*.*

1.4 L'équation de Schrödinger indépendante du temps :

La fonction d'onde d'une particule dont l'énergie potentielle $V(x)$ ne dépend pas du temps doit satisfaire l'équation de Schrödinger :[4]

$$ih\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{h^2}{2m}\Delta(x) + V(x)\right]\Psi(x,t), \; x \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

cherchons s'il existe des solutions de cette équation de la forme :

$$\Psi(x,t) = \varphi(x)\chi(t), \tag{1.6}$$

nous substitution cette dernière équation dans l'équation (1.5), on obtient

$$ih\varphi(x)\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}=\left[-\frac{h^2}{2m}\Delta+V(x)\right]\varphi(x)\chi(t), \tag{1.7}$$

nous divisons les deux membres de cette équation sur le produit $\varphi(x)\chi(t)$, nous trouvons

$$\frac{ih}{\chi(t)}\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}=\frac{1}{\varphi(x)}\left[-\frac{h^2}{2m}\Delta\varphi(x)\right]+V(x),$$

on remarque que les deux coté de cette équation, la côté gauche ne dépend que du temps t, et l'autre côté dépend uniquement de la variable x. L'égalité ne peut être atteinte que si les deux coté de cette égalité sont égaux à une constante que nous poserons à E, on obtient

$$ih\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}=E\chi(t), \tag{1.8}$$

et

$$-\frac{h^2}{2m}\Delta\varphi(x)+V(x)\varphi(x)=E\varphi(x). \tag{1.9}$$

Nous obtenons alors pour $\chi(t)$ une équation différentielle qui s'intègre facilement et qui donne :

$$\chi(t)=A\exp\left(\frac{-iEt}{h}\right). \tag{1.10}$$

L'équation (1.9) peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\left[\frac{-h^2}{2m}\Delta+V(x)\right]\varphi(x)=E\varphi(x), \tag{1.11}$$

cette équation s'appelle équation de Schrödinger stationnaire qui s'écrite sous forme condensée suivante :

$$H\varphi(x)=E\varphi(x), \tag{1.12}$$

où H représente l'opérateur hamiltonien qui est défini par :

$$H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V(x) . \tag{1.13a}$$

L'équation (1.12) est une équation aux valeurs propres de l'opérateur hamiltonien H. Les valeurs propres sont les énergies du système.

Si le spectre de H est discret, donc les différentes valeurs possibles de l'énergie E et des fonctions propres $\varphi(x)$, on leur attribue un indice n, alors on a

$$H\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x) .$$

La solution générale de l'équation de Schrödinger est une formulation linéaire de solutions stationnaires. Donc, une fois que vous connaissez ces solutions, on peut écrire la solution générale de l'équation Schrödinger :

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \exp\left(\frac{-iE_nt}{h}\right),$$

où c_n coefficients dépendent des conditions initiales, on a

$$\Psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) .$$

Chapitre 2

Extension de la méthode de Nikiforov-Uvarov

2.1 La méthode de Nikiforov-Uvarov (NU)[1]

Définition 2.1.1 *La méthode de Nikiforov-Uvarov est basé sur la rédaction des équations différentielles du deuxième ordre sans second membre à une équation généralisée du type hypergéométrique, La forme de cette équation est donnée par :*

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0, \tag{2.1}$$

dans les quelles $\sigma(z)$ et $\tilde{\sigma}(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, et $\tilde{\tau}(z)$ un polynôme de degré non supérieur à 1.

Suppose que la variable z et les coefficients des polynômes $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ et $\tilde{\tau}(z)$ sont susceptibles de prendre toute valeur réelle ou complexe. Nous mettons ce changement

$$u = \varphi(z)\, y(z). \tag{2.2}$$

On calcul la première dérivée de la fonction u

$$u' = \varphi'(z)\, y(z) + \varphi(z)\, y'(z), \tag{2.3}$$

la seconde dérivée est donc

$$u'' = \varphi''(z)\, y(z) + \varphi'(z)\, y'(z) + \varphi(z)\, y''(z) + \varphi'(z)\, y'(z),$$

alors

$$u'' = \varphi''(z)\, y(z) + 2\varphi'(z)\, y'(z) + \varphi(z)\, y''(z). \tag{2.4}$$

Nous substituons les équations (2.2), (2.3) et (2.4) dans l'équation (2.1), nous trouvons

$$\varphi''(z)\, y(z) + 2\varphi'(z)\, y'(z) + \varphi(z)\, y''(z) + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}\left[\varphi'(z)\, y(z) + \varphi(z)\, y'(z)\right] + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}\varphi(z)\, y(z) = 0,$$

on écrit l'équation précédente sous forme équation différentielle du second ordre de la fonction $y(z)$, on obtient

$$y''(z) + \left[2\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}\right] y'(z) + \left[\frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}\right] y(z) = 0. \tag{2.5}$$

Pour que l'équation (2.5) prenne la forme d'une équation hypergéométrique(2.1), le coefficient du deuxième terme de cette équation doit être égal $\dfrac{\tau(z)}{\sigma(z)}$, c'est-à-dire :

$$2\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} = \frac{\tau(z)}{\sigma(z)},$$

ceci implique

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\frac{1}{2}(\tau(z) - \tilde{\tau}(z))}{\sigma(z)}.$$

Si on pose

$$\pi(z) = \frac{1}{2}(\tau(z) - \tilde{\tau}(z)),$$

on obtient

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\pi(z)}{\sigma(z)}. \tag{2.6}$$

La fonction $\pi(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1, car $\tau(z)$ et $\tilde{\tau}(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 1.

On sait que

$$(\ln\varphi(z))' = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

et

$$\left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)' = \frac{\varphi''(z)\varphi(z) - \varphi'(z)\varphi'(z)}{\varphi^2(z)},$$

alors

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} = \left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)' + \left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)^2,$$

nous substituons l'équation (2.6) dans cette dernière équation, nous trouvons

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} = \left(\frac{\pi(z)}{\sigma(z)}\right)' + \left(\frac{\pi(z)}{\sigma(z)}\right)^2. \tag{2.7}$$

Nous substituons les équations (2.6) et (2.7) dans l'équation (2.5), et nous obtenons

$$y''(z) + \left(2\frac{\pi(z)}{\sigma(z)} + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}\right)y'(z) + \left[\left(\frac{\pi(z)}{\sigma(z)}\right)' + \left(\frac{\pi(z)}{\sigma(z)}\right)^2 + \frac{\pi(z)}{\sigma(z)}\frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}\right]y(z) = 0,$$

ceci implique

$$y''(z) + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}y'(z) + \left(\frac{\pi'(z)\sigma(z) - \sigma'(z)\pi(z)}{\sigma^2(z)} + \frac{\pi^2(z)}{\sigma^2(z)} + \frac{\pi(z)\tilde{\tau}(z)}{\sigma^2(z)} + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}\right)y(z) = 0,$$

On écrit la dernière équation sous la forme condensée suivante

$$y''(z) + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} y'(z) + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} y(z) = 0, \tag{2.8}$$

où

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z), \tag{2.9}$$

et

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)(\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)) + \pi'(z)\sigma(z).$$

Il est clair que, d'aprés les formules (2.8) et (2.9), les fonctions $\tau(z)$, $\bar{\sigma}(z)$ sont deux polynômes de degrés non supérieurs à 1 et à 2 respectivement, et l'équation (2.8) est donc de même type que (2.1).

* *Nous avons trouvé de cette façon la classe des transformations qui laissent inchangé le type de l'équation : ce sont les transformations qu'on fait subir à (2.1) en opérant le changement $u = \varphi(z)\,y(z)$, où la fonction $\varphi(z)$ vérifie l'équation (2.6), quel que soit le polynôme du premier degré $\pi(z)$.*

* *Afin de pouvoir discuter de l'équation (2.8), nous choisissons la meilleure forme et la plus simple pour $\pi(z)$.*

Choisissons les coefficients du polynôme $\pi(z)$ de telle façon que le polynôme $\bar{\sigma}(z)$ figurant dans (2.8) soit un multiple exact de $\sigma(z)$, i.e.

$$\frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma(z)} = \lambda, \tag{2.10}$$

où λ est une constante non null.

Cela est possible, car en identifiant les coefficients qui affectent les puissances correspondantes de z dans les deux membres de l'égalité (2.10), on obtient trois équations pour trois constantes inconnues : la constante λ et deux coefficients du polynôme $\pi(z)$, l'équation (2.8) deviendra donc

$$y''(z) + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} y'(z) + \frac{\lambda\sigma(z)}{\sigma^2(z)} y(z) = 0.$$

On multiplie cette équation par $\sigma(z)$, et on obtient :

$$\sigma(z)\, y''(z) + \tau(z)\, y'(z) + \lambda y(z) = 0. \tag{2.11}$$

Remarque 2.1.1 *Nous dirons que (2.11) est une équation du type hypergéométrique, et ses solutions, des fonctions du type hypergéométrique. Il sera donc tout naturel d'appeler l'équation (2.1) équation généralisée du type hypergéométrique.*

Pour définie le polynôme $\pi(z)$ et la constante λ, mettons la condition (2.10) sous la forme

$$\lambda\sigma(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)\left(\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)\right) + \pi'(z)\,\sigma(z),$$

donc

$$\pi^2(z) + \left(\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)\right)\pi(z) + \tilde{\sigma}(z) - k\sigma(z) = 0, \tag{2.12}$$

dans laquelle

$$k = \lambda - \pi'(z). \tag{2.13}$$

Supposant provisoirement la constante k connue.

On a l'équation (2.12) est une équation de degré 2 en $\pi(z)$, pour trouver l'inconnu $\pi(z)$ il faut calculer le discriminant, et on a

$$\Delta = \left[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)\right]^2 - 4(\left[\tilde{\sigma}(z) - k\sigma(z)\right].$$

Les valeurs possibles de $\pi(z)$ sont données par l'expression suivante :

$$\pi(z) = \frac{\sigma'(z) - \tilde{\tau}(z)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(z) - \tilde{\tau}(z)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(z) + k\sigma(z)}, \tag{2.14}$$

$\pi(z)$ étant un polynôme de degré 1, le radicande doit être le carré d'un polynôme de degré 1. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que soit nul le discriminant d'un polynôme du second degré sous le signe de la racine. Cette condition nous conduit à l'équation, en général du second degré, pour la constante k.

Une fois k trouvé, on cherche $\pi(z)$ par la formule (2.14), puis $\varphi(z)$, $\tau(z)$ et λ à l'aide des formules (2.6), (2.9) et (2.13).il est évident qu'il existe plus d'une possibilité de réduire l'équation (2.1) à l'équation du type hypergéométrique (2.11) possibilités fournies par le choix de la constante k et celui du signe de $\pi(z)$ dans la formule (2.14).

Remarque 2.1.2 *Grâce à la transformation proposée, on aura à discuter, au lieu de l'équation (2.1).une équation plus simple du type (2.11).*

Exemple 2.1.1 *Transformer l'équation de Bessel sous la forme d'une équation de type hypergéométrique.*

$$z^2u'' + zu' + \left(z^2 - v^2\right)u = 0,$$

nous divisons cette équation sur z^2, devient

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \frac{(z^2 - v^2)}{z^2}u = 0.$$

En faisant le changement $u = \varphi(z)\,y$. L'équation de Bessel est un cas particulier de l'équation (2.1) pour : $\sigma(z) = z$, $\tilde{\tau}(z) = 1$, $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - v^2$, en remplaçant ces expressions dans (2.12), on obtient

$$\pi^2(z) + (1 - z')\,\pi(z) + z^2 - v^2 - kz = 0,$$

alors

$$\pi^2(z) = -z^2 + v^2 + kz,$$

annulant le discriminant de ce trinôme du second degré, on obtient l'équation pour la constante k :

$$k^2 + 4v^2 = 0,$$

d'où

$$k = \pm 2iv.$$

D'après (2.14) nous trouvons

$$\begin{aligned}\pi(z) &= \pm\sqrt{-z^2 + v^2 + \kappa z},\\ &= \pm\sqrt{-z^2 + v^2 \pm 2ivz},\\ &= \pm\sqrt{(iz \pm v)^2},\end{aligned}$$

donc

$$\pi(z) = \pm(iz \pm v)\,.$$

Ainsi donc, dans le cas considéré, nous pouvons mettre quatre cas différents du polynômes $\pi(z)$, nous choisissons celui dans lequel $k = 2iv$, $\pi(z) = iz + v$, alors les formules (2.6), (2.9) et (2.13) nous donnent

$$\frac{\varphi\prime(z)}{\varphi(z)} = \frac{iz + v}{z},$$

ceci implique

$$(\ln \varphi(z))' = \frac{iz+v}{z},$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\ln \varphi(z) = \int^{z} \frac{iz+v}{z} dz \ ,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \exp\left(\int^{z} i dz + \int^{z} \frac{v}{z} dz\right), \\ &= z^{v} \exp(iz). \end{aligned} \tag{2.15}$$

De l'équation (2.9), on a

$$\begin{aligned}\tau(z) &= 1 + 2(iz+v), \\ &= 2iz + 2v + 1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

À partir de l'équation (2.13), on obtient

$$\begin{aligned}\lambda &= k + \pi'(z), \\ &= 2iv + (iz+v)', \\ &= i(2v+1). \end{aligned} \tag{2.17}$$

En remplaçant (2.15), (2.16) et (2.17) dans (2.11). devient finalement

$$zy'' + (2iz + 2v + 1) y' + i(2v+1) y = 0.$$

Théorème 2.1.1 *Les dérivées d'ordre quelconque des fonctions du type hypergéométrique sont encore des fonctions du type hypergéométrique.*

Preuve. A cet effet, dérivons l'équation (2.11

$$[\sigma(z)\, y''(z) + \tau(z)\, y' + \lambda y(z)]' = 0,$$

on obtient

$$\sigma'(z)\, y''(z) + \sigma(z)\, y'''(z) + \tau'(z)\, y'(z) + \tau(z)\, y''(z) + \lambda y'(z) = 0,$$

on écrit cette dernière équation sous la forme suivante

$$\sigma(z)\, y'''(z) + (\sigma'(z) + \tau(z))\, y''(z) + (\tau'(z) + \lambda)\, y'(z) = 0.$$

Par conséquent, la fonction qui satisfait cette équation est $v_1(z) = y'(z)$

$$\sigma(z)\, v_1''(z) + \tau_1(z)\, v'(z)_1 + \mu_1(z)\, v_1(z) = 0, \tag{2.18}$$

dans lesquelles

$$\begin{cases} \tau_1(z) = \tau(z) + \sigma'(z)\,; \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \mu_1(z) = \lambda + \tau'(z)\,, \end{cases} \tag{2.19}$$

puisque $\tau_1(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1 et que μ_1 est indépendant de z, l'équation (2.18) est bien une équation du type hypergéométrique. ■

Théorème 2.1.2 *La réciproque est aussi vraie : chaque solution de l'équation (2.18) pour $\lambda \neq 0$ est dérivée d'une solution de l'équation (2.11).*

Preuve. Soit, en effet, $v_1(z)$ une solution de (2.18), si elle était dérivée d'une solution $y(z)$ de l'équation (2.11), ces deux fonctions devraient vérifier la relation suivante :

$$\sigma(z)\, y''(z) + \tau(z)\, y' + \lambda y(z) = 0,$$

donc

$$\lambda y(z) = -\left(\sigma(z)\, y''(z) + \tau(z)\, y'\right),$$

ceci implique

$$y(z) = -\frac{1}{\lambda}\left(\sigma(z)\, y''(z) + \tau(z)\, y'(z)\right),$$

alors

$$y(z) = -\frac{1}{\lambda}\left(\sigma(z)\, v_1'(z) + \tau(z)\, v_1(z)\right).$$

Montrons que la fonction $y(z)$ que nous avons obtenue satisfait l'équation (2.11) et que sa dérivée se confond avec $v_1(z)$.

On a

$$\begin{aligned}\lambda y(z) &= \left(\sigma(z)\, v_1'(z) + \tau(z)\, v_1(z)\right)' \\ &= -\left(\sigma(z)\, v_1''(z) + (\tau(z) + \sigma'(z)) v_1'(z) + \tau'(z)\, v_1(z)\right) \\ &= -\left[\sigma(z)\, v_1''(z) + \tau_1(z)\, v_1'(z) + \tau'(z)\, v_1(z)\right] = \lambda v_1(z),\end{aligned}$$

donc effectivement $y'(z) = v_1(z)$. ■

En portant $v_1(z) = y'(z)$ dans l'expression initiale de $y(z)$, on retrouve l'équation (2.11) pour $y(z)$.

On montre par récurrence, pour toute fonction $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, l'équation suivante est de type hypergéométrique

$$\sigma(z)\, v_n''(z) + \tau_n(z)\, v_n'(z) + \mu_n(z)\, v_n(z) = 0;\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.20}$$

dans lesquelles

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z), \\ \text{et} \\ \mu_n = \lambda + n\tau'(z) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(z). \end{array} \right. ;\ n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.21}$$

Pour $n = 1$, d'après (2.19), l'équation (2.20) est vérifiée.

Maintenant, on suppose que l'équation (2.20) est établi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et on montre pour $n+1$.

On dérive l'équation (2.20), on obtient

$$\left(\sigma(z)\, v_n''(z) + \tau_n(z)\, v_n'(z)_n + \mu_n(z)\, v_n(z)\right)' = 0,$$

alors

$$\sigma(z)\, v_n'''(z) + (\tau_n(z) + \sigma'(z))v_n''(z) + (\tau_n'(z) + \mu_n(z))v_n'(z) = 0,$$

cela implique

$$\sigma(z)\, v_n'''(z) + (\tau(z) + (n+1)\sigma'(z))v_n''(z) + (\tau_n'(z) + \mu_n(z))v_n'(z) = 0,$$

finalement

$$\sigma(z)\, v_n'''(z) + \tau_{n+1}(z)\, v_n''(z) + \mu_{n+1}(z))v_n'(z) = 0,$$

tel que

$$\begin{aligned}\mu_{n+1} &= \lambda + (n+1)\tau'(z) + \frac{n(n+1)}{2}\sigma''(z) \\ &= \lambda + n\tau'(z) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(z) + \tau'(z) + n\sigma''(z),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} \mu_{n+1} = \mu_n(z) + \tau_n'(z), \\ \text{et} \\ \tau_{n+1}(z) = \tau(z) + (n+1)\sigma'(z). \end{cases}$$

Alors, pour toute fonction $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, l'équation (2.20) est de type hypergéométrique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Toute solution de (2.20), pour $\mu_k \neq 0, k = 0.1 \dots n-1$, se laisse représenter d'ailleurs sous la forme $v_n(z) = y^{(n)}(z)$ où $y(z)$ est une solution de l'équation (2.11).

Grâce à la propriété étudiée, on peut trouver un ensemble de solutions à (2.11) pour certaines valeurs de λ. En effet, pour $\mu_n(z) = 0$ l'équation (2.20) admet une solution particulière $v_n(z) = c$ telle que c est une constante. Puisque $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, cela revient à dire que pour

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(z) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(z).$$

L'équation du type hypergéométrique admet une solution particulière $y(z) = y_n(z)$ qui est un polynôme de degré n, de telles solutions seront appelées polynômes du type hypergéométrique. Les polynômes $y_n(z)$ sont, dans un certain sens, les solutions les plus élémentaires de l'équation (2.11).

Afin d'expliciter le polynôme $y_n(z)$. On multiple l'équation (2.14) par la fonction

$\rho(z)$ qui permettent d'écrire ces équations sous forme auto-adjointe :

$$\begin{aligned}&\left[\sigma(z)\,y''(z)+\tau(z)\,y'(z)+\lambda y(z)\right]\rho(z)\\&=\sigma(z)\,\rho(z)\,y''(z)+\tau(z)\,\rho(z)\,y'(z)+\lambda\rho(z)\,y(z)=0.\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{gathered}(\sigma(z)\,\rho(z)\,y'(z))'+\lambda\rho(z)\,y(z)= \qquad (2.22)\\ \sigma'(z)\,\rho(z)\,y'(z)+\sigma(z)\,\rho'(z)\,y'(z)+\sigma(z)\,\rho(z)\,y''(z)+\lambda\rho(z)\,y(z)=\\ \sigma(z)\,\rho(z)\,y''(z)+(\sigma'(z)\,\rho(z)+\sigma(z)\,\rho'(z))y'(z)+\lambda\rho(z)\,y(z)=0,\end{gathered}$$

finalement, on obtient

$$\sigma(z)\,\rho(z)\,y''(z)+(\sigma(z)\,\rho(z))'y'(z)+\lambda\rho(z)\,y(z)=0.$$

Ici la fonction $\rho(z)$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$(\sigma(z)\,\rho(z))'=\tau(z)\,\rho(z)\,. \qquad (2.23)$$

Aussi on multiple l'équation (2.20) par la fonction $\rho_n(z)$, on obtient

$$(\sigma(z)\,\upsilon_n''(z)+\tau_n(z)\,\upsilon_n'(z)+\mu_n(z)\,\upsilon_n(z))'\rho_n(z)=0,$$

ceci implique

$$(\sigma(z)\,\rho_n(z)\,\upsilon_n'(z))'+\mu_n\rho_n(z)\,\upsilon_n(z)=0. \qquad (2.24)$$

Ici la fonction $\rho_n(z)$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$(\sigma(z)\,\rho_n(z))'=\tau_n(z)\,\rho_n(z)\,. \qquad (2.25)$$

En incluant l'expression explicite de $\tau_n(z)$, nous pouvons facilement trouver une relation entre les fonctions $\rho_n(z)$ et $\rho_0(z) = \rho(z)$, et on a

$$\begin{aligned}\frac{(\sigma(z)\rho_n(z))'}{\rho_n(z)} &= \tau_n(z)\\ &= \tau(z) + n\sigma'(z)\\ &= \frac{(\sigma(z)\rho(z))'}{\rho(z)} + n\sigma'(z),\end{aligned}$$

et d'autre part, on a

$$\frac{\sigma(z)\rho_n'(z) + \sigma'(z)\rho_n(z)}{\rho_n(z)} = \frac{\sigma(z)\rho'(z) + \sigma'(z)\rho(z)}{\rho(z)} + n\sigma'(z),$$

ainsi

$$\frac{\sigma(z)\rho_n'(z)}{\rho_n(z)} + \sigma'(z) = \frac{\sigma(z)\rho'(z)}{\rho(z)} + \sigma'(z) + n\sigma'(z),$$

en divisant les deux membres de la dernière équation par $\sigma(z)$, on trouve

$$\frac{\rho_n'(z)}{\rho_n(z)} = \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} + \frac{n\sigma'(z)}{\sigma(z)},$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\int^z \frac{\rho_n'(z)}{\rho_n(z)}dz = \int^z \frac{\rho'(z)}{\rho(z)}dz + \int^z \frac{n\sigma'(z)}{\sigma(z)}dz,$$

alors

$$\ln(\rho_n(z)) = \ln(\rho(z)) + n\ln(\sigma(z)),$$

c'est-à-dire

$$\rho_n(z) = \exp[\ln(\rho(z)) + n\ln(\sigma(z))],$$

donc

$$\rho_n(z) = \sigma^n(z)\rho(z) \qquad (n = 0, 1, 2\ldots). \tag{2.26}$$

Cherchons maintenant l'expression explicite des polynômes du type hypergéométrique $y_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_0$, tels que $a_i \in \mathbb{C}, .i = (1 \ldots n)$.

Comme $\sigma(z)\rho_n(z) = \rho_{n+1}(z)$ et $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, l'équation (2.24) se laisse transcrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\rho_n v_n &= -\frac{1}{\mu_n}\left(\sigma\rho_n v_n'\right)' \\ &= -\frac{1}{\mu_n}\left(\rho_{n+1} v_{n+1}\right)'.\end{aligned}$$

D'où, pour $m < n$, on déduit successivement

$$\rho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m}\left(\rho_{m+1} v_{m+1}\right)'.$$

On a

$$\rho_{m+1} v_{m+1} = -\frac{1}{\mu_{m+1}}\left(\rho_{m+2} v_{m+2}\right)',$$

donc

$$\left(\rho_{m+1} v_{m+1}\right)' = -\frac{1}{\mu_{m+1}}\left(\rho_{m+2} v_{m+2}\right)''.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\rho_m v_m &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right)\left(\rho_{m+2} v_{m+2}\right)'', \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+2}}\right)\left(\rho_{m+3} v_{m+3}\right)''', \\ &\vdots \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\ldots\left(-\frac{1}{\mu_{m+k-2}}\right)\left(\rho_{m+k-1} v_{m+k-1}\right)^{(k-1)}.\end{aligned}$$

On pose

$$n = m + k - 1 \Longrightarrow k = n - m + 1,$$

et comme $m < n$ donc $m - m + 1 < n - m + 1$. alors $k > 1$, par conséquant

$$\begin{aligned}
\rho_m v_m &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) ... \left(-\frac{1}{\mu_{n-1}}\right) (\rho_n v_n)^{(n-m)} \\
&= (-1)^{n-m} \prod_{k=m}^{n-1} \left(-\frac{1}{\mu_k}\right) (\rho_n v_n)^{(n-m)},
\end{aligned}$$

alors

$$\rho_m v_m = \frac{A_m}{A_n} (\rho_n v_n)^{(n-m)}. \tag{2.27}$$

où

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (\mu_k), \qquad A_0 = 1, \tag{2.28}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{A_m}{A_n} &= \frac{(-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} (\mu_k)}{(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (\mu_k)} \\
&= (-1)^{n-m} \frac{1}{\mu_m \mu_{m+1} ... \mu_{n-1}} \\
&= (-1)^{n-m} \prod_{k=m}^{n-1} \left(-\frac{1}{\mu_k}\right).
\end{aligned}$$

Si la fonction $y(z)$ est un polynôme de degré n, i.e. $y(z) = y_n(z)$, il vient

$$v_n(z) = y^{(n)}(z) = a_n = c.$$

D'après (2.27)

$$\rho_m y^{(m)}(z) = \frac{A_m}{A_n} \left(\rho_n y^{(n)}(z)\right)^{(n-m)},$$

nous divisions les deux côtés de cette équation par ρ_m, on obtient

$$y^{(m)}(z) = y^{(n)}(z)\frac{A_m}{\rho_m A_n}(\rho_n)^{(n-m)},$$

et l'on exprime $y_n^{(m)}(z)$ comme suit :

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn}B_n}{\rho_m(z)}(\rho_n(z))^{(n-m)},$$

où

$$A_{mn} = A_m(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_n},\; B_n = \frac{1}{A_{nn}}y^{(n)}(z).$$

On en déduit en particulier, pour $m = 0$, l'expression explicite des polynômes du type hypergéométrique $y_n(z)$:

$$y_n^{(0)}(z) = \frac{A_{0n}B_n}{\rho_0(z)}(\rho_n(z))^{(n-0)},$$

de (2.28) on a

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)}(\rho_n(z))^{(n)},$$

et de (2.26) nous trouvons

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)}(\sigma^n(z)\rho(z))^{(n)}; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.29}$$

Donc, de la deuxième équation de l'expression (2.21), on définit les solutions polynomiales de l'équation (2.11) d'une façon univoque. Ces solutions correspondent aux valeurs $\mu_n = 0$, i.e.

$$\lambda + n\tau'(z) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(z) = 0,$$

donc le paramètre λ est donné comme suit

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(z) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(z), \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{2.30}$$

La relation (2.29) est appelée formule de Rodrigues, pour un cas particulier des polynômes du type hypergéométrique, à savoir pour les polynômes de Legendre avec $\sigma(z) = 1 - z^2$ et $\rho(z) = 1$.

2.2 La méthode de Nikiforov-Uvarov prolongée

Cette méthode est améliorée la méthode NU, on va résoudre, en utilisant la méthode de Nikiforov-Uvarov prolongée, des équations différentielles du deuxième ordre contenant au plus quatre points singuliers. Une équation différentielle du second ordre a été réduite à la forme suivante :

$$\Psi''(z) + \frac{\tilde{\tau}_e(z)}{\sigma_e(z)}\Psi'(z) + \frac{\tilde{\sigma}_e(z)}{\sigma_e^2(z)}\Psi(z) = 0, \tag{2.31}$$

dans lesquelles $\tilde{\tau}_e(z)$, $\sigma_e(z)$, et $\tilde{\sigma}_e(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, 3, et 4 respectivement. En choisissant une fonction appropriée par les mêmes techniques que nous avons utilisée de la sous-section précédant c'est-à-dire, pour la méthode de NU, et en prenant

$$\Psi(z) = \phi_e(z)\, y(z). \tag{2.32}$$

On calcul la première dérivée

$$\Psi'(z) = \phi_e'(z)\, y(z) + \phi_e(z)\, y'(z), \tag{2.33}$$

et la seconde dérivée est donc

$$\Psi''(z) = \phi_e''(z)\, y(z) + \phi_e(z)\, y''(z) + 2\left(\phi_e'(z)\, y'(z)\right). \tag{2.34}$$

Nous substituons les équations (2.32), (2.33) et (2.34), dans (2.31) on obtient cette équation

$$\begin{gathered}\phi_e''(z)\, y(z) + \phi_e(z)\, y''(z) + 2\phi_e'(z)\, y'(z) + \frac{\tilde{\sigma}_e(z)}{\sigma_e^2(z)}\phi_e(z)\, y(z) \\ + \frac{\tilde{\tau}_e(z)}{\sigma_e(z)}\left(\phi_e'(z)\, y(z) + \phi_e(z)\, y'(z)\right) = 0,\end{gathered}$$

ou sous la forme suivante

$$\phi_e(z)\, y''(z) + \left(2\phi_e'(z) + \frac{\tilde{\tau}_e(z)}{\sigma_e(z)}\phi_e(z)\right) y'(z) + \left(\phi_e''(z) + \frac{\tilde{\tau}_e(z)}{\sigma_e(z)}\phi_e'(z) + \frac{\tilde{\sigma}_e(z)}{\sigma_e^2(z)}\phi_e(z)\right) y(z) = 0,$$

nous divisons la dernière équation sur $\phi_e(z)$, on obtient

$$y''(z) + \left(2\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} + \frac{\tilde{\tau}_e(z)}{\sigma_e(z)}\right) y'(z) + \left(\frac{\phi_e''(z)}{\phi_e(z)} + \frac{\tilde{\tau}_e(z)}{\sigma_e(z)}\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} + \frac{\tilde{\sigma}_e(z)}{\sigma_e^2(z)}\right) y(z) = 0. \tag{2.35}$$

Nous substituons le coefficient de $y'(z)$ par l'aspect $\dfrac{\tau_e(z)}{\sigma_e(z)}$, pour obtenir une forme simplifiée de l'équation (2.35), où $\tau_e(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 2, donc on a

$$2\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} + \frac{\tilde{\tau}_e(z)}{\sigma_e(z)} = \frac{\tau_e(z)}{\sigma_e(z)},$$

alors

$$\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\tau_e(z) - \tilde{\tau}_e(z)\right)}{\sigma_e(z)} = \frac{\pi_e(z)}{\sigma_e(z)}, \tag{2.36}$$

ceci signifie que $\pi_e(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 2, car :$\tau(z)$ et $\tilde{\tau}(z)$

sont des polynômes de degré non supérieur à 2 dans laquelle

$$\pi_e(z) = \frac{1}{2}\left(\tau_e(z) - \tilde{\tau}_e(z)\right),$$

de la formule précédente, la fonction $\tau_e(z)$ vaut

$$\tau_e(z) = \tilde{\tau}_e(z) + 2\pi_e(z). \tag{2.37}$$

On calcule la première dérivée du terme $\dfrac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)}$, on trouve

$$\left(\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)}\right)' = \frac{\phi_e''(z)\,\phi_e(z) - \phi_e'(z)\,\phi_e'(z)}{\phi_e^2(z)} = \left(\frac{\phi_e''(z)}{\phi_e(z)}\right) - \left(\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)}\right)^2,$$

alors

$$\frac{\phi_e''(z)}{\phi_e(z)} = \left(\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)}\right) + \left(\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)}\right)^2 = \left(\frac{\pi_e(z)}{\sigma_e(z)}\right)' + \left(\frac{\pi_e(z)}{\sigma_e(z)}\right)^2. \tag{2.38}$$

On substitue (2.36) et (2.38) dans l'équation (2.35)

$$y''(z)+\left(2\frac{\pi_e(z)}{\sigma_e(z)} + \frac{\tilde{\tau}_e(z)}{\sigma_e(z)}\right)y'(z)+\left[\left(\frac{\pi_e(z)}{\sigma_e(z)}\right)' + \left(\frac{\pi_e(z)}{\sigma_e(z)}\right)^2 + \frac{\tilde{\tau}_e(z)}{\sigma_e(z)}\frac{\pi_e(z)}{\sigma_e(z)} + \frac{\tilde{\sigma}_e(z)}{\sigma_e^2(z)}\right]y(z) = 0,$$

de l'expression (2.37), l'équation précédente devient

$$y''(z) + \frac{\tau_e(z)}{\sigma_e(z)}y'(z) + \frac{\bar{\sigma}_e(z)}{\sigma_e^2(z)}y(z) = 0, \tag{2.39}$$

où la fonction $\bar{\sigma}_e(z)$ est défini comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_e(z) &= \pi_e'(z)\,\sigma_e(z) - \sigma_e'(z)\,\pi_e(z) + \pi_e^2(z) + \pi_e(z)\,\tilde{\tau}_e(z) + \tilde{\sigma}_e(z)\\ &= \tilde{\sigma}_e(z) + \pi_e^2(z) + \left(\tilde{\tau}_e(z) - \sigma_e'(z)\right)\pi_e(z) + \sigma_e(z)\,\pi_e'(z),\end{aligned} \tag{2.40}$$

il est clair que, d'après la dernière expression, $\bar{\sigma}_e(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 4.

Afin de pouvoir discuter de l'équation (2.39), par la même technique précédente de la méthode NU, nous choisissons la meilleure forme et la plus simple pour $\pi_e(z)$, nous choisissons les coefficients du polynôme $\pi_e(z)$ de telle façon que le polynôme $\bar{\sigma}_e(z)$ figurant dans (2.39) soit un multiple exact de $\sigma_e(z)$, i.e.

$$\frac{\bar{\sigma}_e(z)}{\sigma_e(z)} = h(z), \tag{2.41}$$

où $h(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1.

En remplaçant la formule (2.41) dans l'équation (2.39), nous obtenons l'équation suivante :

$$y''(z) + \frac{\tau_e(z)}{\sigma_e(z)} y'(z) + \frac{h(z)\,\sigma_e(z)}{\sigma_e^2(z)} y(z) = 0,$$

en multipliant l'équation différentielle précédente par $\sigma_e(z)$, on obtient

$$\sigma_e(z)\,y''(z) + \tau_e(z)\,y'(z) + h(z)\,y(z) = 0. \tag{2.42}$$

Pour définir le polynôme $\pi_e(z)$, mettons la condition (2.41) sous la forme

$$\bar{\sigma}_e(z) = h(z)\,\sigma_e(z).$$

Conformément à l'équation (2.40), nous trouvons

$$\tilde{\sigma}_e(z) + \pi_e^2(z) + (\tilde{\tau}_e(z) - \sigma_e'(z))\,\pi_e(z) + \sigma_e(z)\,\pi_e'(z) = h(z)\,\sigma_e(z),$$

ou sous la forme d'une équation du second ordre suivante

$$\pi_e^2(z) + (\tilde{\tau}_e(z) - \sigma_e'(z))\,\pi_e(z) + \tilde{\sigma}_e(z) - (h(z) - \pi_e'(z))\,\sigma_e(z) = 0. \tag{2.43}$$

Si on pose

$$h(z) - \pi_e'(z) = g(z). \tag{2.44}$$

L'équation (2.43) devient l'équation suivante :

$$\pi_e^2(z) + (\tilde{\tau}_e(z) - \sigma_e'(z))\,\pi_e(z) + \tilde{\sigma}_e(z) - g(z)\,\sigma_e(z) = 0. \tag{2.45}$$

Le polynôme figurant dans l'équation (2.45) est un polynôme de degré 2 en $\pi_e(z)$.

Par les mêmes techniques qu'ont utilisés dans la méthode de NU ci-dessus, le discriminant de l'équation (2.45) vaut

$$\Delta = (\tilde{\tau}_e(z) - \sigma_e'(z))^2 - 4\,(\tilde{\sigma}_e(z) - g(z)\,\sigma_e(z)),$$

donc l'inconnu $\pi_e(z)$ est donné par l'expression suivante :

$$\pi_e(z) = \frac{\sigma_e'(z) - \tilde{\tau}_e(z)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_e'(z) - \tilde{\tau}_e(z)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}_e(z) + g(z)\,\sigma_e(z)}, \tag{2.46}$$

Pour déterminer toutes les solutions possibles du polynôme $\pi_e(z)$, l'expression sous la racine doit être le carré du polynôme d'ordre 2, pour cela, il faut choisir des formules particulières de $g(z)$, et après détermination de $g(z)$ le polynôme $\pi_e(z)$ peut être obtenu à partir de l'équation(2.46).

Afin de généraliser les solutions de l'équation (2.42), nous les dérivons une fois pour obtenir une forme compréhensible

$$\begin{aligned}\sigma_e(z)\,y'''(z) + \sigma_e'(z)\,y''(z) + \tau_e'(z)\,y'(z) + \tau_e(z)\,y''(z) + h'(z)\,y(z) + h(z)\,y'(z) = \\ \sigma_e(z)\,y'''(z) + (\tau_e(z) + \sigma_e'(z))\,y''(z) + (\tau_e'(z) + h(z))\,y'(z) + h'(z)\,y(z) = 0.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Cette expression est un équation différentielle homogène du troisième ordre avec des coefficients polynomiaux de degré ne dépassant pas l'ordre de différenciation. Parce que toutes les dérivées ont la même forme, ils peuvent être dérivées n fois en utilisant la nouvelle représentation $y^{(n)}(z) = v_n(z)$.

$$\begin{aligned}
&\Big\{\sigma_e(z)\, v_n^{(3)}(z) + (\tau_e(z) + (n+1)\,\sigma_e'(z))\, v_n''(z) \\
&+ \left((n+1)\,\tau_e'(z) + \frac{n(n+1)}{2}\sigma_e''(z) + h(z)\right) v_n'(z) \\
&+ \left((n+1)\,h'(z) + \frac{n(n+1)}{2}\tau_e''(z) + \frac{n(n+1)(n-1)}{6}\sigma_e^{(3)}(z)\right) v_n(z) = 0\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Remarque 2.2.1 *cette équation peut être obtenue à partir des dérivées séquentielles de l'équation (2.47), en prenant des représentations de $y'(z) = v_1(z)$ dans la dérivée première, $y''(z) = v_2(z)$ dans la dérivée second, et enfin $y^{(n)}(z) = v_n(z)$ dans la n ième dérivée.*

Preuve. On montre par récurrence. Pour $n = 1$, l'équation (2.48) est coïncide avec l'équation (2.47), donc la propriété est satisfaite. ■

Maintenant, on suppose que l'équation (2.48) est établi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et on montre pour $n + 1$.

On dérive l'équation (2.48), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\sigma_e'(z)\,v_n^{(3)}(z)+\sigma_e(z)\,v_n^{(4)}(z)+\left(\tau_e'(z)+(n+1)\,\sigma_e''(z)\right)v_n''(z)\\
&+\left(\tau_e(z)+(n+1)\,\sigma_e'(z)\right)v_n^{(3)}(z)+\left((n+1)\,\tau_e''(z)+\frac{n(n+1)}{2}\sigma_e^{(3)}(z)+h'(z)\right)v_n'(z)\\
&+\left((n+1)\,\tau_e'(z)+\frac{n(n+1)}{2}\sigma_e''(z)+h(z)\right)v_n''(z)\\
&+\left((n+1)\,h'(z)+\frac{n(n+1)}{2}\tau_e''(z)+\frac{n(n+1)(n-1)}{2}\sigma_e^{(3)}(z)\right)v_n'(z)\\
&+\left((n+1)\,h''(z)+\frac{n(n+1)}{2}\tau_e^{(3)}(z)+\frac{n(n+1)(n-1)}{6}\sigma_e^{(4)}(z)\right)v_n(z)\Big\}\\
&=0.
\end{aligned}
$$

On écrire l'équation par ordre décroissant de la dérivée de v_n, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\sigma_e(z)\,v_n^{(4)}(z)+\left((n+2)\,\sigma_e'(z)+\tau_e(z)\right)v_n^{(3)}(z)\\
&+\Big\{\left[(n+2)\,\tau_e'(z)+\frac{(n+2)(n+1)}{2}\sigma_e''(z)+h(z)\right]v_n''(z)\\
&+\left[(n+2)\,h'(z)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\tau_e''(z)+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\sigma_e^{(3)}(z)\right]v_n'(z)\Big\}\\
&=0.
\end{aligned}
$$

Donc l'équation (2.48) est satisfaite.

Lorsque le coefficient de $v_n(z)$ dans l'équation (2.48) est égale à zéro, donc

$$
(n+1)\,h'(z)+\frac{n(n+1)}{2}\tau_e''(z)+\frac{n(n+1)(n-1)}{2}\sigma_e^{(3)}(z)=0,
$$

alors

$$
h'(z)=-\frac{n}{2}\tau_e''(z)-\frac{n(n-1)}{2}\sigma_e^{(3)}(z),
$$

en intégrant les deux membres de cette équation, on obtient

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}\tau_e'(z) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma_e''(z) + c_n, \tag{2.49}$$

où c_n est une constante d'intégration. Par conséquent, l'équation (2.48) se réduit à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\sigma_e(z)\, v_n^{(3)}(z) + (\tau_e(z) + (n+1)\,\sigma_e'(z))\, v_n''(z) \\
&+ \left((n+1)\,\tau_e'(z) + \frac{n(n+1)}{2}\sigma_e''(z) - \frac{n}{2}\tau_e'(z) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma_e''(z) + c_n\right) v_n'(z) \\
&= \sigma_e(z)\, v_n^{(3)}(z) + (\tau_e(z) + (n+1)\,\sigma_e'(z))\, v_n''(z) \\
&+ \left(\frac{2n+2-n}{2}\tau_e'(z) + \frac{3n^2+3n-n^2+n}{6}\sigma_e''(z) + c_n\right) v_n'(z) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

par simplification de cette équation, nous trouvons

$$\sigma_e(z)\, v_n^{(3)}(z) + [\tau_e(z) + (n+1)\,\sigma_e'(z)]\, v_n''(z) + \left[\left(\frac{n}{2}+1\right)\tau_e'(z) + \frac{n(n+2)}{3}\sigma_e''(z) + c_n\right] v_n'(z) = 0. \tag{2.50}$$

Cette équation possède une solution particulière de la forme $y(z) = y_n(z)$ qu'est un polynôme de degré n. Pour obtenir cette solution polynomiale, il faut construire une relation entre $h(z)$ et $h_n(z)$ par les équations (2.44) et (2.49).

Chapitre 3

Application

3.1 Solution de l'équation de Schrödinger pour le potentiel : $V(r) = -\alpha r^{-1} + \beta r + kr^2$

Considérons le potentiel suivant

$$V(r) = -\alpha r^{-1} + \beta r + kr^2$$

où $(\alpha, \beta, k) \in \mathbb{R}^3$

l'équation suivante :

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}R(r) + \left[2E + \frac{\alpha}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \beta r - kr^2\right]R(r) = 0, \tag{3.1}$$

pour résoudre cette dernière équation, on utilise la méthode de Nikivorov-Uvarov prolongée, où

$$\tilde{\tau}_e(z) = 2, \tag{3.2}$$

$$\sigma_e(z) = z, \tag{3.3}$$

$$\tilde{\sigma}_e(z) = -kz^4 - \beta z^3 + 2Ez^2 + \alpha z - l(l+1). \tag{3.4}$$

En substituant ces polynômes dans l'équation (2.46), le polynôme $\pi_e(z)$ peut être obtenu

$$\begin{aligned}\pi_e(z) &= \frac{1-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2}{2}\right)^2 + kz^4 + \beta z^3 - 2Ez^2 - \alpha z + l(l+1) + g(z)z} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4kz^4 + 4\beta z^3 - 8Ez^2 - 4\alpha z + 4g(z)z + (2l+1)^2},\end{aligned}$$

Puisque $\pi_e(z)$ est un polynôme du second degré, l'expression sous la racine carrée doit être un polynôme du second degré. On a choisi deux cas de polynôme $g(z)$ comme suit :

1. si on prend $g_1(z) = \left[\frac{\beta^2}{4k} - (2l+1)\sqrt{k} + 2E\right]z - \frac{\beta(2l+1)}{2\sqrt{k}} + \alpha$, la fonction $\pi_e(z)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_e(z) = &-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\left\{4kz^4 + 4\beta z^3 - 8Ez^2 - 4\alpha z\right. \\ &+ 4\left(\left(\frac{\beta^2}{4k} - (2l+1)\sqrt{k} + 2E\right)z - \frac{\beta(2l+1)}{2\sqrt{k}} + \alpha\right)z \\ &\left.+ (2l+1)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ = &-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k}\left(z\beta + 2kz^2 - 2\sqrt{k}l - \sqrt{k}\right)^2},\end{aligned}$$

par simplification de cette dernière équation, nous trouvons

$$\pi_{e1}(z) = -z^2\sqrt{k} - \frac{\beta}{2\sqrt{k}}z + l, \tag{3.5}$$

et

$$\pi_{e2}(z) = \sqrt{k}z^2 + \frac{z\beta}{2\sqrt{k}} - (l+1). \tag{3.6}$$

2. Pour $g_2(z) = \left[\frac{\beta^2}{4k} + (2l+1)\sqrt{k} + 2E\right]z + \frac{\beta(2l+1)}{2\sqrt{k}} + \alpha$, la fonction $\pi_e(z)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_e(z) = & -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\left\{4kz^4 + 4\beta z^3 - 8Ez^2 - 4\alpha z\right. \\ & +4\left[\left(\frac{\beta^2}{4k} + (2l+1)\sqrt{k} + 2E\right)z + \frac{\beta(2l+1)}{2\sqrt{k}} + \alpha\right]z \\ & \left.+(2l+1)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ & = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k}\left(z\beta + 2kz^2 + 2\sqrt{k}l + \sqrt{k}\right)^2},\end{aligned}$$

par simplification de cette dernière équation, nous trouvons

$$\pi_{e3}(z) = \sqrt{k}z^2 + \frac{\beta}{2\sqrt{k}}z + l, \tag{3.7}$$

et

$$\pi_{e4}(z) = -\sqrt{k}z^2 - \frac{z\beta}{2\sqrt{k}} - (l+1). \tag{3.8}$$

D'après (2.44).et (3.5), la fonction $h(z)$ est donnée comme suite :

$$\begin{aligned}h(z) &= \left[\frac{\beta^2}{4k} - (2l+1)\sqrt{k} + 2E\right]z - \frac{\beta(2l+1)}{2\sqrt{k}} + \alpha + \left(-z^2\sqrt{k} - \frac{\beta}{2\sqrt{k}}z + l\right)' \\ &= \left[\frac{\beta^2}{4k} - (2l+3)\sqrt{k} + 2E\right]z - \frac{\beta(2l+1)}{2\sqrt{k}} + \alpha, \end{aligned} \tag{3.9}$$

De l'équation (2.37), on trouve

$$\tau_e(z) = -2\sqrt{k}z^2 - \frac{\beta}{\sqrt{k}}z + 2(l+1). \tag{3.10}$$

D'après l'équation (2.49), le polynôme $h_n(z)$ est obtenu comme suite :

$$h_n(z) = \frac{n}{2}\left(4\sqrt{k}z + \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right) + c_{n1}.$$

En utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on obtient

$$c_{n1} + \frac{n}{2}\frac{\beta}{\sqrt{k}} = -\frac{\beta(2l+1)}{2\sqrt{k}} + \alpha,$$

et

$$2n\sqrt{k} = \frac{\beta^2}{4k} - (2l+3)\sqrt{k} + 2E,$$

ça veut dire

$$E = -\frac{\beta^2}{8k}\left(n + l + \frac{3}{2}\right)\sqrt{k},$$

et

$$c_{n1} = -\frac{\beta}{2\sqrt{k}}(2l+2+n) + \alpha.$$

Nous calculons la fonction $\phi_e(z)$ à partir de l'équation (2.36), et on a

$$\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} = \frac{\pi_{e1}}{\sigma_e(z)} = \frac{-z^2\sqrt{k} - \dfrac{\beta}{2\sqrt{k}}z + l}{z},$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned}\int^{z} [\ln \phi_e(z)]' \, dz &= -\int^{z} z\sqrt{k}dz - \int^{z} \frac{\beta}{2\sqrt{k}}dz + \int^{z} \frac{l}{z}dz \\ &= \frac{-z^2}{2}\sqrt{k} - \frac{\beta}{2\sqrt{k}}z + l\ln(z),\end{aligned}$$

alors la fonction $\phi_e(z)$ est donnée par

$$\phi_e(z) = \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{k}}{2}z^2 + \frac{\beta}{2\sqrt{k}}z\right)\right] \times z^l.$$

et la solution donc est :

$$\Psi_1(z) = \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{k}}{2}z^2 + \frac{\beta}{2\sqrt{k}}z\right)\right] \times z^l \times y_1(z).$$

Nous substituons les équations (3.3), (3.10) et (3.9) dans l'équation (2.42), devient

$$\begin{aligned}&zy_1''(z) + \left[-2\sqrt{k}z^2 - \frac{\beta}{\sqrt{k}}z + 2(l+1)\right]y_1'(z) + \left[\left(\frac{\beta^2}{4k} - (2l+3)\sqrt{k} + 2E\right)z \right.\\ &\left.-\frac{\beta(2l+1)}{2\sqrt{k}} + \alpha y_1(z)\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Nous suivre les mêmes étapes, pour trouver les valeurs propres E (l'énergie du problème) et les vecteurs propres $\Psi(z)$ (la solution du problème), en utilisant les équations (3.6), (3.7) et (3.8).

De l'équation (3.6), on a

$$E = -\frac{\beta^2}{8k} - \sqrt{k}\left(n - l + \frac{1}{2}\right),$$
$$\Psi_2(z) = \exp\left[\frac{\sqrt{k}}{2}z^2 + \frac{\beta}{2\sqrt{k}}z\right] \times z^{-(l+1)} \times y_2(z).$$

De l'équation (3.7), on a

$$E = -\frac{\beta^2}{8k} - \sqrt{k}\left(n + l + \frac{3}{2}\right),$$
$$\Psi_3(z) = \exp\left[\frac{\sqrt{k}}{2}z^2 + \frac{\beta}{2\sqrt{k}}z\right] \times z^{l} \times y_3(z).$$

De l'équation (3.8), on a

$$E = -\frac{\beta^2}{8k} + \sqrt{k}\left(n - l + \frac{1}{2}\right),$$
$$\Psi_4(z) = \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{k}}{2}z^2 + \frac{\beta}{2\sqrt{k}}z\right)\right] \times z^{-(l+1)} \times y_4(z).$$

3.2 Solution de l'équation de Schrödinger pour un potentiel de racine carré inverse

Le potentiel de racine carré inverse est donné par

$$V(r) = \frac{-\alpha}{\sqrt{r}}. \tag{3.11}$$

L'équation de Schrödinger stationnaire (1.11) pour le potentiel (3.11) est

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\alpha}{\sqrt{r}}\right]u(r) = 0. \tag{3.12}$$

où K est un nombre imaginaire pure tel que sa partie imaginaire est strictement positive

En utilisant le changement de variable suivant :

$$z = \sqrt{-2iKr},$$

et

$$\lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{2iK}}, \tag{3.13}$$

l'équation (3.12) prend la forme suivante :

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{du(z)}{dz} - \left[\frac{z^4 + 4l(l+1) + 2\lambda z^3}{z^2}\right]u(z) = 0, \tag{3.14}$$

cette dernière équation prend la forme de l'équation (2.31), donc on peut appliquer la méthode de Nikivorov-Uvarov prolongée pour résoudre l'équation (3.14) où

$$\tilde{\tau}_e(z) = -1, \tag{3.15}$$

$$\sigma_e(z) = z, \tag{3.16}$$

$$\tilde{\sigma}_e(z) = -\left[z^4 + 4l(l+1) + 2\lambda z^3\right]. \tag{3.17}$$

En substituant ces polynômes dans l'équation (2.46), le polynôme $\pi_e(z)$ peut être obtenu

$$\pi_e(z) = 1 \pm \sqrt{1 + z^4 + 4l(l+1) + 2\lambda z^3 + g(z)z}. \tag{3.18}$$

Puisque $\pi_e(z)$ est un polynôme du second degré, l'expression sous la racine carrée doit être un polynôme du second degré. On a choisi deux cas de polynôme $g(z)$ comme suit :

1. Si on prend $g_1(z) = [\lambda^2 - 2(2l+1)]\, z - 2\lambda(2l+1)$, la fonction $\pi_e(z)$ est

$$\pi_e(z) = 1 \pm \sqrt{1 + z^4 + 2\lambda z^3 + 4l(l+1) + [(\lambda^2 - 2(2l+1))\, z - 2\lambda(2l+1)]\, z},$$

par simplification de cette dernière équation, nous trouvons

$$\pi_e(z) = 1 \pm \sqrt{(z^2 + \lambda z - 2l - 1)^2},$$

donc on a deux possibilités

$$\pi_{e1}(z) = -z^2 - \lambda z + 2l + 2, \tag{3.19}$$

et

$$\pi_{e2}(z) = z^2 + \lambda z - 2l. \tag{3.20}$$

2. Pour $g_2(z) = [\lambda^2 + 2(2l+1)]\, z + 2\lambda(2l+1)$, la fonction $\pi_e(z)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_e(z) &= 1 \pm \sqrt{1 + z^4 + 2\lambda z^3 + 4l(l+1) + [(\lambda^2 + 2(2l+1))\, z + 2\lambda(2l+1)]\, z} \\ &= 1 \pm \sqrt{(z^2 + \lambda z + 2l + 1)^2},\end{aligned}$$

alors

$$\pi_{e3}(z) = z^2 + \lambda z + 2l + 2, \tag{3.21}$$

et

$$\pi_{e4}(z) = -\left(z^2 + \lambda z + 2l\right). \tag{3.22}$$

À partir de l'équation (3.19), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$\begin{aligned} h(z) &= \left(-z^2 - \lambda z + 2l + 2\right)' + \left[\lambda^2 + 2(2l+1)\right] z + 2\lambda(2l+1) \\ &= \left[\lambda^2 + 2(2l+1)\right] z + 2\lambda(2l+1) - 2z - \lambda. \end{aligned}$$

On utilise l'équation (2.49) pour calculer le polynôme $h_n(z)$, on obtient

$$\begin{aligned} h_n(z) &= \frac{-n}{2}\left(-2z^2 - 2\lambda z + 4l + 3\right)' + c_{n1}, \\ &= n(2z+\lambda) + c_{n1}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

dans laquelle

$$\tau_e(z) = -2z^2 - 2\lambda z + 4l + 3 \tag{3.24}$$

Pour trouver la valeur propre, on utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$

$$\lambda^2 + 2(2l+1) - 2 = 2n, \tag{3.25}$$

et

$$c_{n1} = -\lambda(n - 4l - 1). \tag{3.26}$$

Nous substituons $\lambda = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2iK}}$ dans l'équation (3.25), on obtient

$$iK^3 = \frac{\alpha^2}{4(n-2l)},$$

si on pose $K = ik$, tel que $k > 0$, on trouve

$$k^3 = \frac{\alpha^2}{4(n-2l)}.$$

Nous calculons la fonction $\phi_e(z)$ à partir de l'équation (2.36), et on a

$$\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} = \frac{\pi_{e1}}{\sigma_e(z)} = \frac{-z^2 - \lambda z + 2l + 2}{z},$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned}\int^z [\ln \phi_e(z)]' \, dz &= -\int^z z dz - \int^z \lambda dz + \int^z \frac{2l+2}{z} dz \\ &= \frac{-z^2}{2} - \lambda z + (2l+2)\ln(z),\end{aligned}$$

alors la fonction $\phi_e(z)$ est donnée par

$$\phi_e(z) = z^{(2l+2)} \exp\left[-\left(\frac{z^2}{2} + \lambda z\right)\right].$$

Alors la solution est

$$\Psi_1(z) = z^{(2l+2)} \exp\left[-\left(\frac{z^2}{2} + \lambda z\right)\right] y_1(z).$$

Nous substituons les équations (3.16), (3.23) et (3.24) dans l'équation (2.42), on obtient

$$zy_1''(z) - \left[2z^2 + 2\lambda z - 4l + 3\right] y_1'(z) + \left[\left(\lambda^2 + 4l\right) z + \lambda (4l+1)\right] y_1(z) = 0.$$

En utilisant les mêmes techniques, on calcul la solution pour les cas (3.20), (3.21) et (3.22).

De l'équation (3.20), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$\begin{aligned} h(z) &= \left[z^2 + \lambda z - 2l\right]' + \left[\lambda^2 - 2(2l+1)\right] z - 2\lambda(2l+1) \\ &= \left(\lambda^2 - 4l\right) z - \lambda(1+4l), \end{aligned}$$

le polynôme $h_n(z)$ est

$$h_n(z) = -n(2z+\lambda) + c_{n2}.$$

On utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on trouve

$$\lambda^2 - 4l = 2n, \tag{3.27}$$

et

$$c_{n2} = -\lambda(1+4l+n), \tag{3.28}$$

La fonction $\phi_e(z)$ est :

$$\phi_e(z) = \exp\left(\frac{1}{2}z^2 + \lambda z\right) z^{-2l},$$

la solution donc est :

$$\Psi_2(z) = \exp\left(\frac{1}{2}z^2 + \lambda z\right) z^{(-2l)} \times y_2(z).$$

À partir de l'équation (3.21), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$h(z) = \left(\lambda^2 + 3 + 2l\right) z + \lambda(4l+3).$$

Si on calcule le polynôme $h_n(z)$, on obtient

$$h_n(z) = -n(2z+\lambda) + c_{n3}.$$

En utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on obtient

$$\lambda^2 + 3 + 2l = -2n,$$

et

$$c_{n3} = \lambda(4l + 3 + n).$$

De l'expression (2.36), on a

$$\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} = \frac{\pi_{e3}}{\sigma_e(z)} = \frac{z^2 + \lambda z + 2l + 2}{z},$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned}\int^z [\ln \phi_e(z)]' \, dz &= \int^z z dz + \int^z \lambda dz + \int^z \frac{2l+2}{z} dz \\ &= \frac{z^2}{2} + \lambda z + (2l+2)\ln(z),\end{aligned}$$

alors la fonction $\phi_e(z)$ est donnée par

$$\phi_e(z) = z^{(2l+2)} \exp\left[\left(\frac{z^2}{2} + \lambda z\right)\right].$$

Alors la solution est

$$\Psi_3(z) = z^{(2l+2)} \exp\left[-\left(\frac{z^2}{2} + \lambda z\right)\right] y_3(z).$$

De l'équation (3.22), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$h(z) = \left(\lambda^2 - 4l\right) z + \lambda(1 + 4l),$$

et le polynôme $h_n(z)$.est donné par

$$h_n(z) = n(2z+\lambda) + c_{n4}.$$

En utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on trouve

$$\lambda^2 + 4l = 2n, \tag{3.29}$$

et

$$c_{n4} = -\lambda(4l+1-n). \tag{3.30}$$

La fonction $\phi_e(z)$ est :

$$\phi_e(z) = \exp\left[-\left(\frac{1}{2}z^2 + \lambda z\right)\right] \times z^{-2l},$$

et la solution donc est :

$$\Psi_4(z) = \exp\left[-\left(\frac{1}{2}z^2 + \lambda z\right)\right] \times z^{-2l} \times y_4(z).$$

3.3 Solution de l'équation de Heun

On va utiliser la méthode de Nikivorov-Uvarov prolongée pour résoudre (pour trouver la solution polynomiale) l'équation de Heun (1.3-1.4). Pour trouver la relation entre les polynômes de la méthode de NU prolongée et les paramètres de l'équation de Heun, nous comparons les équations (1.3) et (2.31), pour cela, on écrit l'équation (1.3) sous la forme suivante

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{\gamma(z-1)(z-a) + \delta z(z-a) + \epsilon z(z-1)}{z(z-1)(z-a)}\frac{d\omega}{dz} + \frac{(\alpha\beta z - q)z(z-1)(z-a)}{(z(z-1)(z-a))^2}\omega = 0,$$

donc les polynômes de la méthode de NU prolongée sont donnés par les relations suivantes

$$\tilde{\tau}_e(z) = \gamma(z-1)(z-a) + \delta z(z-a) + \epsilon z(z-1), \tag{3.31}$$

$$\sigma_e(z) = z(z-1)(z-a), \tag{3.32}$$

$$\tilde{\sigma}_e(z) = (\alpha\beta z - q)\, z(z-1)(z-a). \tag{3.33}$$

En remplaçant ces polynômes dans l'équation (2.46), on obtient

$$\begin{aligned}
\pi_e(z) &= \frac{(z(z-1)(z-a))' - \gamma(z-1)(z-a) - \delta z(z-a) - \epsilon z(z-1)}{2} \\
&\pm \frac{1}{2}\left\{\left[(z(z-1)(z-a))' - \gamma(z-1)(z-a) - \delta z(z-a) - \epsilon z(z-1)\right]^2\right. \\
&\left. - (\alpha\beta z - q)\, z(z-1)(z-a) + g(z)\, z(z-1)(z-a)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(z-1)(z-a) + z(z-a) + z(z-1) - \gamma(z-1)(z-a) - \delta z(z-a) - \epsilon z(z-1)}{2} \\
&\pm \frac{1}{2}\left\{\left[(z-1)(z-a) + z(z-a) + z(z-1) - \gamma(z-1)(z-a) - \delta z(z-a) - \epsilon z(z-1)\right]^2\right. \\
&\left. - (\alpha\beta z - q)\, z(z-1)(z-a) + g(z)\, z(z-1)(z-a)\right\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

la forme finale de la fonction $\pi(z)$ est donc

$$\begin{aligned}
\pi_e(z) = &\frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\delta)\, z(z-a) + (1-\epsilon)\, z(z-1)}{2} \\
&\pm \frac{1}{2}\left\{\left[(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\delta)\, z(z-a) + (1-\epsilon)\, z(z-1)\right]^2\right. \\
&\left. -4(\alpha\beta z - q)\, z(z-1)(z-a) + 4g(z)\, z(z-1)(z-a)\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

La fonction $\pi_e(z)$ est défini comme un polynôme quadratique, donc l'expression sous le signe de la racine carrée doit être le carré du polynôme second degré. Ainsi, toutes les solutions possibles de $\pi_e(z)$ correspondant à certaines valeurs du polynôme $g(z)$ peuvent être énumérées comme suit :

Pour : $g_1(z) = \alpha\beta z - q$, la fonction $\pi_e(z)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\pi_e(z) &= \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{2} \\
&\pm \frac{1}{2}\left\{((1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1))^2\right. \\
&\left.-4(\alpha\beta z-q)z(z-1)(z-a)+4(\alpha\beta z-q)z(z-1)(z-a)\right\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ainsi on trouve

$$\pi_{e1}(z) = (1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1), \tag{3.35}$$

et

$$\pi_{e2}(z) = 0. \tag{3.36}$$

Si nous prenons : $g_2 = \alpha\beta z - q - (1-\gamma)\left[(1-\delta)(z-a)+(1-\epsilon)(z-1)\right]$, la fonction $\pi_e(z)$ est

$$\begin{aligned}
\pi_e(z) &= \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{2} \\
&\pm \frac{1}{2}\left\{((1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1))^2\right. \\
&-4(\alpha\beta z-q)z(z-1)(z-a) \\
&\left.+4(\alpha\beta z-q-(1-\gamma)[(1-\delta)(z-a)+(1-\epsilon)(z-1)])z(z-1)(z-a)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{2} \\
&\pm \frac{1}{2}\left\{\left(a-2z-a\gamma+z\gamma+z\epsilon-z^2\gamma-z^2\delta-z^2\epsilon-2az+3z^2+az\gamma+az\delta\right)^2\right. \\
&\left.-4z(\gamma-1)(a-z)(z-1)(a-2z-\epsilon-a\delta+z\delta+z\epsilon+1)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{2}\right. \\
&\left.\pm\left(a-a\gamma+z\gamma-z\epsilon-z^2\gamma+z^2\delta+z^2\epsilon-z^2+az\gamma-az\delta\right)\right\},
\end{aligned}$$

finalement

$$\pi_{e3}(z) = \left\{ \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\delta)z(z-a) + (1-\epsilon)z(z-1)}{2} \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}\left(a - a\gamma + z\gamma - z\epsilon - z^2\gamma + z^2\delta + z^2\epsilon - z^2 + az\gamma - az\delta\right) \right\},$$
$$= (1-\gamma)(z-a)(z-1). \tag{3.37}$$

et

$$\pi_{e4}(z) = \left\{ \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\delta)z(z-a) + (1-\epsilon)z(z-1)}{2} \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\left(a - a\gamma + z\gamma - z\epsilon - z^2\gamma + z^2\delta + z^2\epsilon - z^2 + az\gamma - az\delta\right) \right\},$$
$$= -z(a - 2z - \epsilon - a\delta + z\delta + z\epsilon + 1),$$
$$= (1-\delta)z(z-a) + (1-\epsilon)z(z-1). \tag{3.38}$$

En substituant g_3 par $\alpha\beta z - q - (1-\epsilon)((1-\gamma)(z-1) + (1-\delta)z)$ dans l'équation (3.34), la fonction $\pi_e(z)$ sera

$$\pi_e(z) = \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\delta)z(z-a) + (1-\epsilon)z(z-1)}{2}$$
$$\pm\frac{1}{2}\left\{((1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\delta)z(z-a) + (1-\epsilon)z(z-1))^2\right.$$
$$-4(\alpha\beta z - q)z(z-1)(z-a)$$
$$\left.+4(\alpha\beta z - q - (1-\epsilon)((1-\gamma)(z-1) + (1-\delta)z))(z-1)(z-a)z\right\}^{\frac{1}{2}},$$
$$= \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\delta)z(z-a) + (1-\epsilon)z(z-1)}{2}$$
$$\pm\frac{1}{2}\left\{\left(a - 2z - a\gamma + z\gamma + z\epsilon - z^2\gamma - z^2\delta - z^2\epsilon - 2az + 3z^2 + az\gamma + az\delta\right)^2\right.$$
$$\left.+4z(\epsilon-1)(a-z)(z-1)(z\gamma - \gamma - 2z + z\delta + 1)\right\},$$
$$= \left\{\frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\delta)z(z-a) + (1-\epsilon)z(z-1)}{2}\right.$$
$$\left.\pm\frac{1}{2}\left(a - a\gamma + z\gamma - z\epsilon - z^2\gamma - z^2\delta + z^2\epsilon - 2az + z^2 + az\gamma + az\delta\right)^2\right\},$$

cela implique

$$\pi_{e5}(z) = \left[\frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(a-a\gamma+z\gamma-z\epsilon-z^2\gamma-z^2\delta+z^2\epsilon-2az+z^2+az\gamma+az\delta\right)\right],$$
$$=(a-z)(z\gamma-\gamma-2z+z\delta+1),$$
$$=(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a).$$

et

$$\pi_{e6}(z) = \left[\frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(a-a\gamma+z\gamma-z\epsilon-z^2\gamma-z^2\delta+z^2\epsilon-2az+z^2+az\gamma+az\delta\right)\right],$$
$$=(1-\epsilon)(z-1)z,$$

donc

$$\pi_{e5}(z)=(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a), \tag{3.39}$$
$$\pi_{e6}(z)=(1-\epsilon)(z-1)z. \tag{3.40}$$

Finalement pour : $g_4=\alpha\beta z-q-(1-\delta)((1-\gamma)(z-a)+(1-\epsilon)z)$, de l'équation (3.34), la fonction $\pi_e(z)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\pi_e(z) &= \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{2} \\
&\pm \frac{1}{2}\Big\{\left(a-2z-a\gamma+z\gamma+z\epsilon-z^2\gamma-z^2\delta-z^2\epsilon-2az+3z^2+az\gamma+az\delta\right)^2 \\
&-4(\alpha\beta z-q)z(z-1)(z-a) \\
&+4\left[\alpha\beta z-q-(1-\delta)((1-\gamma)(z-a)+(1-\epsilon)z)\right]z(z-1)(z-a)\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{2} \\
&\pm \frac{1}{2}\Big\{\left(a-2z-a\gamma+z\gamma+z\epsilon-z^2\gamma-z^2\delta-z^2\epsilon-2az+3z^2+az\gamma+az\delta\right)^2 \\
&+4z(\delta-1)(a-z)(z-1)(a-2z-a\gamma+z\gamma+z\epsilon)\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{2} \\
&\pm \left(a-2z-a\gamma+z\gamma+z\epsilon-z^2\gamma+z^2\delta-z^2\epsilon+z^2+az\gamma-az\delta\right),
\end{aligned}$$

par simplification de cette dernière équation, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\pi_{e7}(z) &= -(z-1)(a-2z-a\gamma+z\gamma+z\epsilon), \\
&= (1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1). \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

et

$$\pi_{e8}(z) = (1-\delta)(z-a)z, \qquad (3.42)$$

D'après (2.44).et (3.35), on peut être écrite $h(z)$ comme suite :

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \alpha\beta z - q + \left[(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\delta)z(z-a) + (1-\epsilon)z(z-1)\right]', \\
&= \alpha\beta z - q + (1-\gamma)(z-1) + (1-\gamma)(z-a) + (1-\delta)z + (1-\delta)(z-a) \\
&+ (1-\epsilon)z + (1-\epsilon)(z-1), \\
&= \alpha\beta z - q + \left[(1-\gamma) + (1-\delta) + (1-\epsilon)\right]2z - (1-\gamma)(1+a) \\
&- (1-\delta)a - (1-\epsilon),
\end{aligned}
$$

ça veut dire

$$
h(z) = \alpha\beta z - q + 2z\left[3 - (\epsilon+\gamma+\delta)\right] - (1-\gamma)(1+a) - (1-\delta)a - (1-\epsilon).
$$

D'après l'équation (2.49), le polynôme $h_n(z)$ est obtenu comme suite :

$$
\begin{aligned}
h_n(z) = &-\frac{n}{2}\left[\gamma(z-1) + \gamma(z-a) + \delta z + \delta(z-a) + \epsilon z + \epsilon(z-1) + 2(1-\gamma)(z-1)\right. \\
&+2(1-\gamma)(z-1) + 2(1-\gamma)(z-a) \\
&\left.+2(1-\delta)z + 2(1-\delta)(z-a) + 2(1-\epsilon)z + 2(1-\epsilon)(z-1)\right] \\
&- \frac{n(n-1)}{6}\left[2(3z-1-a)\right] + c_{n1} \\
&= -\frac{n}{2}(12z - 2\gamma z - 2\delta z - 2\epsilon z) - \left(n^2-n\right)z \\
&+ \frac{n}{2}\left(4a + 4 - \gamma - \epsilon - a\gamma - a\delta + \frac{2}{3}(n-1)(1+a)\right) + c_{n1},
\end{aligned}
$$

après simplification, on obtient

$$
\begin{aligned}
h_n(z) = -n\left[n+5-(\epsilon+\gamma+\delta)\right]z + \frac{n}{2}&\left[(a+1)(2-\gamma) + a(2-\delta)\right. \\
&\left.+(2-\epsilon) + \frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right] + c_{n1}.
\end{aligned}
$$

Pour calculer les solutions et la paramètre accessoire q, on utilise l'égalité $h(z) =$

$h_n(z)$

$$\begin{aligned}&\alpha\beta z-q+2z\left[3-(\epsilon+\gamma+\delta)\right]-(1-\gamma)(1+a)-(1-\delta)a-(1-\epsilon)\\&=-n\left[n+5-(\epsilon+\gamma+\delta)\right]z+\frac{n}{2}\Big[(a+1)(2-\gamma)+a(2-\delta)\\&+(2-\epsilon)+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\Big]+c_{n1},\end{aligned}$$

ceci implique

$$\begin{aligned}-q=&\frac{n}{2}\left((a+1)(2-\gamma)+a(2-\delta)+(2-\epsilon)+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right)\\&+(1-\gamma)(1+a)-(1-\delta)a-(1-\epsilon)+c_{n1},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=-n\left[n+5-(\epsilon+\gamma+\delta)\right]-2\left[3-(\epsilon+\gamma+\delta)\right],\\&=(n+2)(\epsilon+\gamma+\delta-n-3).\end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression de la fonction $\Psi(z)$, nous suivons les étapes suivantes. Tout d'abord, nous calculons la fonction $\phi_e(z)$ à partir de l'équation (2.36), et on a

$$\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)}=\frac{\pi_{e1}}{\delta_e(z)}=\frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{z(z-1)(z-a)},$$

sa veut dire

$$\left[\ln\phi_e(z)\right]'=\frac{(1-\gamma)}{z}+\frac{(1-\delta)}{(z-1)}+\frac{(1-\epsilon)}{(z-a)},$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned}\ln\phi_e(z)&=\int^z\frac{(1-\gamma)}{z}dz+\int^z\frac{(1-\delta)}{(z-1)}dz+\int^z\frac{(1-\epsilon)}{(z-a)}dz\\&=(1-\gamma)\ln z+(1-\delta)\ln(z-1)+(1-\epsilon)\ln(z-a),\end{aligned}$$

alors la fonction $\phi_e(z)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\phi_e(z) &= \exp\left[(1-\gamma)\ln z + (1-\delta)\ln(z-1) + (1-\epsilon)\ln(z-a)\right] \\ &= z^{1-\gamma} \times (z-1)^{1-\delta} \times (z-a)^{1-\epsilon}.\end{aligned}$$

Une solution est un polynôme de degré n, elle est obtenue à partir de l'équation (2.50) par $y_1(z)$ et en la remplaçant dans l'équation (2.32), on obtient

$$\Psi_1(z) = z^{1-\gamma} \times (z-1)^{1-\delta} \times (z-a)^{1-\epsilon} y_1(z),$$

cette solution correspond au 8 classes de polynôme $\pi_e(z)$. Etant donnée que la procédure ci-dessus est valable pour tous les polynômes $\pi_e(z)$ contenus dans les équations (3.36) à (3.41), nous pouvons suivre les mêmes étapes pour trouver des autres solutions.

De l'équation (3.36), on a

$$h(z) = \alpha\beta z - q,$$

et on a

$$\begin{aligned}h_n(z) &= -\frac{n}{2}\left[\gamma(z-1)(z-a) + \delta z(z-a) + \epsilon z(z-1)\right]' - \frac{n(n-1)}{6}\left[2(3z-1-a)\right] + c_{n2} \\ &= -n(\gamma+\delta+\epsilon+n-1)z + \frac{n}{2}\left[(a+1)\gamma + \delta a + \epsilon + \frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right] + c_{n2}.\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on trouve

$$\alpha\beta z - q = -n(\gamma+\delta+\epsilon+n-1)z + \frac{n}{2}\left[(a+1)\gamma + \delta a + \epsilon + \frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right] + c_{n2},$$

par conséquent

$$\alpha\beta = -n\left(\gamma + \delta + \epsilon + n - 1\right), \tag{3.43}$$

et

$$-q = \frac{n}{2}\left[\left(a+1\right)\gamma + \delta a + \epsilon + \frac{2}{3}\left(n-1\right)\left(a+1\right)\right] + c_{n2}. \tag{3.44}$$

Par les mêmes techniques que nous utilisons ci-dessous, on obtient

$$\phi_e\left(z\right) = z^0 \times \left(z-1\right)^0 \times \left(z-a\right)^0,$$

donc la solution est

$$\Psi_2\left(z\right) = z^0 \times \left(z-1\right)^0 \times \left(z-a\right)^0 y_2\left(z\right),$$

cette solution correspondant au polynôme de classe 1.

A partir de l'équation (3.37), nous calculons d'abord $h\left(z\right)$, on a

$$\begin{aligned} h\left(z\right) &= \alpha\beta z - q - \left(1-\gamma\right)\left[\left(1-\delta\right)\left(z-a\right) + \left(1-\epsilon\right)\left(z-1\right)\right] + \left[\left(1-\gamma\right)\left(z-a\right)\left(z-1\right)\right]' \\ &= \alpha\beta z - q - z + \delta z + \gamma z - \gamma\delta z + a - \delta a - a\gamma + a\gamma\delta - z + \gamma z + \epsilon z - \epsilon\gamma z \\ &+ 1 - \gamma - \epsilon + \epsilon\gamma + z - \gamma z - 1 + \gamma + z - \gamma z - a + a\gamma, \end{aligned}$$

par conséquent

$$h\left(z\right) = \alpha\beta z - q + \left(\delta - \gamma\delta - \epsilon\gamma + \epsilon\right)z + a\gamma\delta - \epsilon + \epsilon\gamma - \delta a.$$

Deuxièmement, nous calculons $h_n(z)$, et on a

$$\begin{aligned}h_n(z) &= -\frac{n}{2}\left[\gamma(z-1)+\gamma(z-a)+\delta z+\delta(z-a)+\epsilon z+\epsilon(z-1)\right.\\ &\left.+2(1-\gamma)(z-1)+2(1-\gamma)(z-a)\right]-\frac{n(n-1)}{6}\left[2(3z-1-a)\right]+c_{n3}\\ &= -\frac{n}{2}\left[-2\gamma z+2\delta z+2\epsilon z+4z+\gamma+a\gamma-a\delta-\epsilon-2-2a\right]\\ &-\frac{n(n-1)}{6}\left[2(3z-1-a)\right]+c_{n3},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}h_n(z) &= n(\gamma-\delta-\epsilon-2-(n-1))z\\ &+\frac{n}{2}\left[-\gamma-\gamma a+a\delta+\epsilon+2+2a+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right]+c_{n3}.\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $h(z)=h_n(z)$, on obtient

$$\alpha\beta = n\left[\gamma-\delta-\epsilon-2-(n-1)\right]-(\delta-\gamma\delta-\epsilon\gamma+\epsilon),$$

et

$$-q=\frac{n}{2}\left[-\gamma-\gamma a+a\delta+\epsilon+2+2a+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right]-a\gamma\delta+\epsilon-\epsilon\gamma+\delta a+c_{n3},$$

sa veut dire

$$\alpha\beta=(n+\delta+\epsilon)(\gamma-n-1), \tag{3.45}$$

et

$$-q=\frac{n}{2}\left[(a+1)(2-\gamma)+a\delta+\epsilon+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right]+(1-\gamma)(a\delta+\epsilon)+c_{n3}.$$

Puis, on calcule la fonction $\phi_e(z)$, on a

$$\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)}=\frac{\pi_{e3}}{\delta_e(z)}=\frac{(1-\gamma)(z-a)(z-1)}{z(z-1)(z-a)},$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on trouve

$$\int^{z} [\ln \phi_e(z)]' \, dz = \int^{z} \frac{(1-\gamma)(z-a)(z-1)}{z(z-1)(z-a)} dz,$$

ceci implique

$$\phi_e(z) = z^{1-\gamma} \times (z-1)^0 \times (z-a)^0 .$$

La solution est donc

$$\Psi_3(z) = z^{1-\gamma} \times (z-1)^0 \times (z-a)^0 y_3(z),$$

cette solution correspondant au polynôme de classe 2.

On calcule $h(z)$ de l'équation (3.38), et on a

$$\begin{aligned} h(z) &= \alpha\beta z - q - (1-\gamma)[(1-\delta)(z-a) + (1-\epsilon)(z-1)] \\ &\quad + [(1-\delta) z (z-a) + (1-\epsilon) z (z-1)]', \\ &\quad = \alpha\beta z - q + (-z + \delta z + \gamma z - \gamma\delta z + a - \delta a - a\gamma + a\gamma\delta - z + \gamma z + \epsilon z - \epsilon\gamma z \\ &\quad +1 - \gamma - \epsilon + \epsilon\gamma) + (1-\delta) z + (1-\delta)(z-a) + (1-\epsilon) z + (1-\epsilon)(z-1), \end{aligned}$$

après simplification, on obtient

$$h(z) = \alpha\beta z - q + (2 - \delta + 2\gamma - \epsilon + -\delta\gamma - \gamma\epsilon) z - a\gamma + a\delta\gamma - \gamma + \epsilon\gamma.$$

Deuxièmement, nous calculons $h_n(z)$, on a

$$
\begin{aligned}
h_n(z) = &-\frac{n}{2}\left[\gamma(z-1)+\gamma(z-a)+2\delta z-a\delta+2\epsilon z-\epsilon+2(1-\delta)z\right. \\
&\left.+2(1-\delta)(z-a)+2(1-\epsilon)z+2(1-\epsilon)(z-1)\right]-\frac{n(n-1)}{6}\left[2(3z-1-a)\right]+c_{n4}, \\
&=-\frac{n}{2}\left[8z+2\gamma z-2\delta z-2\epsilon z+\epsilon-\gamma-a\gamma+a\delta-2a-2\right] \\
&-n(n-1)z+\frac{2}{3}\times\frac{n}{2}(n-1)(a+1)+c_{n4},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
h_n(z) = & \; n\left[\delta-\gamma+\epsilon-4-(n-1)\right]z \\
&+\frac{n}{2}\left[-\epsilon+\gamma+a\gamma-a\delta+2a+2+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right]+c_{n4}.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'égalité $h(z)=h_n(z)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta &= n\left[\delta-\gamma+\epsilon-4-(n-1)\right]-(2-\delta+2\gamma-\epsilon+-\delta\gamma-\gamma\epsilon), \\
&=(\delta+\epsilon-n-2)(\gamma+n+1),
\end{aligned}
$$

et

$$
-q=\frac{n}{2}\left[-\epsilon+\gamma+a\gamma-a\delta+2a+2+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right]+\gamma\left[a(1-\delta)+(1-\epsilon)\right]+c_{n4}.
$$

Ensuite, on calcule la fonction $\phi_e(z)$, on a

$$
\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)}=\frac{\pi_{e4}}{\delta_e(z)}=\frac{(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{z(z-1)(z-a)},
$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$
\int^{z}\left[\ln\phi_e(z)\right]'dz=\int^{z}\frac{(1-\delta)z(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{z(z-1)(z-a)}dz,
$$

ceci implique que la formule de la fonction $\phi_e(z)$ est donnée par

$$\phi_e(z) = z^0 \times (z-1)^{1-\delta} \times (z-a)^{1-\epsilon}.$$

Par conséquent, la solution correspondante est

$$\Psi_4(z) = z^0 \times (z-1)^{1-\delta} \times (z-a)^{1-\epsilon} y_4(z),$$

cette solution correspondant au polynôme de Heun de classe 7.

De l'équation (3.39), on calcule facilement $h(z)$, on a

$$\begin{aligned} h(z) &= \alpha\beta z - q - (1-\epsilon)\left[(1-\gamma)(z-1) + (1-\delta)z\right] \\ &+ \left[(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\delta)z(z-a)\right]', \\ &= \alpha\beta z - q - (1-\epsilon)(1-\gamma)(z-1) - (1-\epsilon)(1-\delta)z + (1-\gamma)(z-a) \\ &+ (1-\gamma)(z-1) + (1-\delta)z + (1-\delta)(z-a), \end{aligned}$$

après simplification, on obtient

$$h(z) = \alpha\beta z - q + (2-\gamma+2\epsilon-\delta-\gamma\epsilon-\epsilon\delta)z - 2a - \epsilon + \gamma\epsilon + a\delta + a\gamma.$$

Deuxièmement, nous calculons $h_n(z)$, on a

$$\begin{aligned} h_n(z) &= -\frac{n}{2}\left[\gamma(z-1) + \gamma(z-a) + 2\delta z - a\delta + 2\epsilon z - \epsilon + 2(1-\gamma)(z-a) + 2(1-\gamma)(z-1)\right] \\ &+ 2(1-\delta)z + 2(1-\delta)(z-a) - \frac{n(n-1)}{6}\left[2(3z-1-a)\right] + c_{n5}, \\ &= -\frac{n}{2}\left[8z - 2\gamma z - 2\delta z + 2\epsilon z - 2 + \gamma + \gamma a + \delta a - 4a - \epsilon\right] - n(n-1)z \\ &+ \frac{2}{3} \times \frac{n}{2}(n-1)(a+1) + c_{n5}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$h_n(z) = n[-3+\gamma+\delta-\epsilon-n]\,z+\frac{n}{2}\left[2-\gamma-\gamma a-\delta a+4a+\epsilon+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right]+c_{n5}.$$

En utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on obtient

$$\alpha\beta = n[-3+\gamma+\delta-\epsilon-n]-(2-\gamma+2\epsilon-\delta-\gamma\epsilon-\epsilon\delta),$$

$$= (\delta+\gamma-n-2)(\epsilon+n+1),$$

et

$$-q = \frac{n}{2}\left[2-\gamma-\gamma a-\delta a+4a+\epsilon+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right]+(1-\gamma)(a+\epsilon)+(1-\delta)\,a+c_{n5}.$$

Puis, on calcule la fonction $\phi_e(z)$, on a

$$\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} = \frac{\pi_{e5}}{\delta_e(z)} = \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)\,z\,(z-a)}{z\,(z-1)(z-a)},$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\int^z [\ln\phi_e(z)]'\,dz = \int^z \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\delta)\,z\,(z-a)}{z\,(z-1)(z-a)}dz,$$

ceci implique

$$\phi_e(z) = z^{1-\gamma}\times(z-1)^{1-\delta}\times(z-a)^0.$$

donc la solution est

$$\Psi_5(z) = z^{1-\gamma}\times(z-1)^{1-\delta}\times(z-a)^0\,y_5(z),$$

cette solution correspondant au polynôme de Heun de classe 4.

Tout d'abord on calcule $h(z)$, de l'équation (3.40), on a

$$\begin{aligned}
h(z) &= \alpha\beta z - q - (1-\epsilon)\left[(1-\gamma)(z-1) + (1-\delta)z\right] + \left[(1-\epsilon)(z-1)z\right]', \\
&= \alpha\beta z - q - (1-\epsilon)(1-\gamma)(z-1) - (1-\epsilon)(1-\delta)z + (1-\epsilon)z + (1-\epsilon)(z-1),
\end{aligned}$$

après simplification, on obtient

$$h(z) = \alpha\beta z - q + (\gamma - \epsilon\gamma - \epsilon\delta + \delta)z - \gamma + \epsilon\gamma.$$

Deuxièmement, nous calculons $h_n(z)$, on a

$$\begin{aligned}
h_n(z) &= -\frac{n}{2}\left[\gamma(z-1) + \gamma(z-a) + 2\delta z - a\delta + 2\epsilon z - \epsilon + 2(1-\epsilon)z + 2(1-\epsilon)(z-1)\right], \\
&- \frac{n(n-1)}{6}\left[2(3z-1-a)\right] + c_{n6}, \\
&= -\frac{n}{2}\left[4 + 2\gamma + 2\delta - 2\epsilon\right]z - n(n-1)z + \frac{n}{2}\left[(\gamma + a\gamma + a\delta + \epsilon - 2)\right. \\
&\left. + \frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right] + c_{n6},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$h_n(z) = n\left[\epsilon - \gamma - \delta - n - 1\right]z + \frac{n}{2}\left[(\gamma + a\gamma + a\delta + \epsilon - 2) + \frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right] + c_{n6}.$$

En utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha\beta &= n\left[\epsilon - \gamma - \delta - n - 1\right] - (\gamma - \epsilon\gamma - \epsilon\delta + \delta), \\
&= (\delta + \gamma + n)(\epsilon - n - 1),
\end{aligned}$$

et

$$-q = \frac{n}{2}\left[(a+1)\gamma + a\delta + \epsilon - 2 + \frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right] + \gamma(1-\epsilon) + c_{n6}.$$

Puis, on calcule la fonction $\phi_e(z)$, on a

$$\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} = \frac{\pi_{e6}}{\delta_e(z)} = \frac{(1-\epsilon)(z-1)z}{z(z-1)(z-a)},$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\int^z [\ln \phi_e(z)]' \, dz = \int^z \frac{(1-\epsilon)(z-1)z}{z(z-1)(z-a)} dz,$$

la formule de $\phi_e(z)$ dans ce cas est donnée par

$$\phi_e(z) = z^0 \times (z-1)^0 \times (z-a)^{1-\epsilon}.$$

Alors la solution pour cette classe est

$$\Psi_6(z) = z^0 \times (z-1)^0 \times (z-a)^{1-\epsilon} y_6(z),$$

cette solution correspondant au polynôme de Heun de classe 5.

De l'équation (3.41), on calcule $h(z)$, on a

$$\begin{aligned} h(z) &= \alpha\beta z - q - (1-\delta)((1-\gamma)(z-a) + (1-\epsilon)z) \\ &+ [(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\epsilon)z(z-1)]', \\ &= \alpha\beta z - q - (1-\delta)(1-\gamma)(z-a) - (1-\delta)(1-\epsilon)z + (1-\gamma)(z-1) \\ &+ (1-\gamma)(z-a) + (1-\epsilon)z + (1-\epsilon)(z-1), \end{aligned}$$

après simplification, on obtient

$$h(z) = \alpha\beta z - q + (2 - \gamma + 2\delta - \epsilon - \gamma\delta - \delta\epsilon)z - 2 - a\delta + a\delta\gamma + \epsilon + \gamma.$$

Deuxièmement, nous calculons $h_n(z)$; on a

$$
\begin{aligned}
h_n(z) = &-\frac{n}{2}\left[\gamma(z-1)+\gamma(z-a)+2\delta z-a\delta+2\epsilon z-\epsilon\right.\\
&\left.+2(1-\gamma)(z-1)+2(1-\gamma)(z-a)+2(1-\epsilon)z+2(1-\epsilon)(z-1)\right],\\
&-\frac{n(n-1)}{6}\left[2(3z-1-a)\right]+c_{n7},\\
&=-\frac{n}{2}\left[8z-2\gamma z+2\delta z-2\epsilon z+\gamma+a\gamma-a\delta+\epsilon-4-2a\right]\\
&-n(n-1)z+\frac{n}{2}\times\frac{2}{3}(n-1)(a+1)+c_{n7},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
h_n(z) = n\left[\epsilon+\gamma-\delta+1-n-4\right]z+\frac{n}{2}&\left[2a-\gamma-a\gamma+a\delta\right.\\
&\left.-\epsilon+4+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right]+c_{n7}.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'égalité $h(z)=h_n(z)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta &= n\left[\epsilon+\gamma-\delta+1-n-4\right]-(2-\gamma+2\delta-\epsilon-\gamma\delta-\delta\epsilon),\\
&=(\epsilon+\gamma-n-2)(\delta+n+1),
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
-q &= \frac{n}{2}\left[2a-\gamma-a\gamma+a\delta-\epsilon+4+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right]+2+a\delta-a\delta\gamma-\epsilon-\gamma+c_{n7},\\
&=\frac{n}{2}\left[(a+1)(2-\gamma)+a\delta+(2-\epsilon)+\frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right]+2+a\delta-a\delta\gamma-\epsilon-\gamma+c_{n7}.
\end{aligned}
$$

Puis, on calcule la fonction $\phi_e(z)$, on a

$$
\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)}=\frac{\pi_{e7}}{\delta_e(z)}=\frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a)+(1-\epsilon)z(z-1)}{z(z-1)(z-a)},
$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\int^{z} [\ln \phi_e(z)]' \, dz = \int^{z} \frac{(1-\gamma)(z-1)(z-a) + (1-\epsilon) z (z-1)}{z(z-1)(z-a)} dz,$$

ceci implique

$$\phi_e(z) = z^{1-\gamma} \times (z-1)^0 \times (z-a)^{1-\epsilon}.$$

Donc

$$\Psi_7(z) = z^{1-\gamma} \times (z-1)^0 \times (z-a)^{1-\epsilon} y_7(z),$$

cette solution correspondant au polynôme de Heun de classe 6.

De l'équation (3.42), on calcule $h(z)$

$$\begin{aligned} h(z) &= \alpha\beta z - q - (1-\delta)((1-\gamma)(z-a) + (1-\epsilon) z) + [(1-\delta)(z-a) z]', \\ &= \alpha\beta z - q - (1-\delta)(1-\gamma)(z-a) - (1-\delta)(1-\epsilon) z + (1-\delta)(z-a) + (1-\delta) z, \end{aligned}$$

après simplification, on obtient

$$h(z) = \alpha\beta z - q + (\gamma + \epsilon - \gamma\delta - \delta\epsilon) z - a\gamma + \gamma\delta a.$$

Deuxièmement, nous calculons $h_n(z)$

$$\begin{aligned} h_n(z) &= -\frac{n}{2}[\gamma(z-1) + \gamma(z-a) + 2\delta z - a\delta + 2\epsilon z - \epsilon + 2(1-\delta)(z-a) + 2(1-\delta) z] \\ &- \frac{n(n-1)}{6}[2(3z-1-a)] + c_{n8}, \\ &= -\frac{n}{2}[4 + 2\gamma - 2\delta + 2\epsilon] z + \frac{n}{2}(\gamma + a\gamma - a\delta + \epsilon + 2a) \\ &- n(n-1) z + \frac{n}{2} \times \frac{2}{3}(n-1)(a+1) + c_{n8}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$h_n(z) = n[\delta - \gamma - \epsilon - n - 1]z + \frac{n}{2}\left[\gamma + a\gamma - a\delta + \epsilon + 2a + \frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right] + c_{n8}.$$

En utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on obtient

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= n[\delta - \gamma - \epsilon - n - 1] - (\gamma + \epsilon - \gamma\delta - \delta\epsilon), \\ &= (\epsilon + \gamma - n)(\delta - n - 1),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-q &= \frac{n}{2}\left[2a - \gamma - a\gamma + a\delta - \epsilon + 4 + \frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right] + 2 + a\delta - a\delta\gamma - \epsilon - \gamma + c_{n8} \\ &= \frac{n}{2}\left[\gamma + a\gamma - a\delta + \epsilon + 2a + \frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right] + a\gamma - \gamma\delta a + c_{n8} \\ &= \frac{n}{2}\left[\gamma(a+1) + a(2-\delta) + \epsilon + \frac{2}{3}(n-1)(a+1)\right] + a\gamma(1-\delta) + c_{n8}.\end{aligned}$$

Puis, on calcule la fonction $\phi_e(z)$, on a

$$\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} = \frac{\pi_{e8}}{\delta_e(z)} = \frac{(1-\delta)(z-a)z}{z(z-1)(z-a)},$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\int^z [\ln \phi_e(z)]' \, dz = \int^z \frac{(1-\delta)(z-a)z}{z(z-1)(z-a)} dz,$$

ceci implique

$$\phi_e(z) = z^0 \times (z-1)^{1-\delta} \times (z-a)^0.$$

Donc

$$\Psi_8(z) = z^0 \times (z-1)^{1-\delta} \times (z-a)^0 y_8(z),$$

cette solution correspondant au polynôme de Heun de classe 3.

Remarque 3.3.1 *On détermine les fonctions* y_i, $i = 1 \ldots 8$ *après la résolution de l'équation* (2.42)*, une fois les fonctions* y_i, $i = 1 \ldots 8$*, on détermine facilement les solutions* $\Psi_i(z)$, $i = 1 \ldots 8$.

Pour l'existence de solutions polynomiales de l'équation de Heun, le choix de l'un des paramètres α et β doit être se faire facilement. Dans la solution obtenue par la méthode NU prolongée, les paramètres α et β peuvent être déterminés exactement. Aussi le paramètre accessoire q est spécifié exactement à une constante d'intégration près.

3.4 Solution de l'équation de Heun confluente

On va utiliser la même méthode pour résoudre une équation très importante dans la physique qui est l'équation de Heun confluente.

L'équation de Heun confluente (CHE) : est dérivée de l'équation de Heun par le contexte des singularités en $z = a$ et $z = \infty$. La forme la plus générale de CHE est exprimée comme,

$$\Psi''(z) + \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{A_i}{z - z_i} + \sum_{j=1}^{2} \frac{E_{3j}}{(z - z_3)^j} \right) \Psi'(z) + \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{C_i}{z - z_i} + \sum_{j=1}^{2} \frac{Bi}{(z - z_i)^2} + \sum_{j=1}^{4} \frac{D_{3j}}{(z - z_3)^j} \right) \Psi(z) = 0. \tag{3.46}$$

La forme la plus simple de l'équation (3.46) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y''(z) + \left(\alpha + \frac{\beta + 1}{z} + \frac{\gamma + 1}{z - 1} \right) y'(z) + \left(\frac{\mu}{z} + \frac{\nu}{z - 1} \right) y(z) = 0, \tag{3.47}$$

cette équation contient des singularités régulières à $z = 0$ et $z = 1$, et singularité irrégulière en $z = \infty$.

Le CHE donnée par l'équation (3.47) peut être résolue de manière analytique par la méthode NU prolongée comme suit :

$$y''(z)+\left(\frac{\alpha z(z-1)+(\beta+1)(z-1)+(\gamma+1)z}{z(z-1)}\right)y'(z)+\left(\frac{\mu z(z-1)^2+\nu z^2(z-1)}{[z(z-1)]^2}\right)+y(z)=0,$$

donc

$$\tilde{\tau}_e(z)=\alpha z(z-1)+(\beta+1)(z-1)+(\gamma+1)z, \tag{3.48}$$

$$\sigma_e(z)=z(z-1), \tag{3.49}$$

$$\tilde{\sigma}_e(z)=[(\mu+\nu)z-\mu]\,z(z-1). \tag{3.50}$$

En substituant ces polynômes dans l'équation (2.46), le polynôme $\pi_e(z)$ peut être obtenu

$$\begin{aligned}\pi_e(z)=&\frac{(z(z-1))'-\alpha z(z-1)-(\beta+1)(z-1)-(\gamma+1)z}{2}\\ &\pm\left\{\left(\frac{(z(z-1))'-\alpha z(z-1)-(\beta+1)(z-1)-(\gamma+1)z}{2}\right)^2\right.\\ &\left.-[(\mu+\nu)z-\mu]\,z(z-1)+g(z)(z-1)z\right\}^{\frac{1}{2}}\\ =&\frac{z-1+z-\alpha z(z-1)-\beta(z-1)-z+1-\gamma z-z}{2}\\ &\pm\frac{1}{2}\sqrt{(-\alpha z(z-1)-\beta(z-1)-\gamma z)^2-4[(\mu+\nu)z-\mu-g(z)]\,z(z-1)},\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\pi_e(z)=&\frac{-\alpha z(z-1)-\beta(z-1)-\gamma z}{2}\\ &\pm\frac{1}{2}\sqrt{(-\alpha z(z-1)-\beta(z-1)-\gamma z)^2-4[(\mu+\nu)z-\mu-g(z)]\,z(z-1)}.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Puisque $\pi_e(z)$ est un polynôme du second degré, l'expression sous la racine carrée doit être un polynôme du second degré. On a choisi quatre cas de polynôme $g(z)$ comme suit :

1. pour : $g_1(z) = (\mu+\nu)z - \mu$, la fonction $\pi_e(z)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_e(z) &= \frac{-\alpha z(z-1) - \beta(z-1) - \gamma z}{2} \\ &\pm \frac{1}{2}\sqrt{(-\alpha z(z-1) - \beta(z-1) - \gamma z)^2 - 4\left[(\mu+\nu)z - \mu - ((\mu+\nu)z-\mu)\right]z(z-1)} \\ &= \frac{-\alpha z(z-1) - \beta(z-1) - \gamma z}{2} \pm \frac{1}{2}\left[-\alpha z(z-1) - \beta(z-1) - \gamma z\right],\end{aligned}$$

donc

$$\pi_{e1}(z) = -\alpha z(z-1) - \beta(z-1) - \gamma z, \tag{3.52}$$

et

$$\pi_{e2}(z) = 0. \tag{3.53}$$

De l'équation (2.44), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$\begin{aligned}h(z) &= (\mu+\nu)z - \mu + \left[-\alpha z(z-1) - \beta(z-1) - \gamma z\right]' \\ &= (\mu+\nu)z - \mu - \alpha z - \alpha(z-1) - \gamma - \beta,\end{aligned}$$

donc

$$h(z) = (\mu+\nu-2\alpha)z - \mu + \alpha - \gamma - \beta. \tag{3.54}$$

Maintenant on va calculer le polynôme $h_n(z)$, on a $\sigma_e(z)$ est un polynôme du second degré et $\sigma_e^{(3)}(z)$ est égal à zéro, donc

$$\begin{aligned}
h_n(z) &= -\frac{n}{2}\tau'(z) + c_n, \\
&= -\frac{n}{2}\left[\alpha z(z-1) + (\beta+1)(z-1) + (\gamma+1)z\right. \\
&\left.+2\left(-\alpha z(z-1) - \beta(z-1) - \gamma z\right)\right]' + c_{n1} \\
&= -\frac{n}{2}\left[\alpha z + \alpha(z-1) + \beta + 1 + \gamma + 1 - 2\alpha z - 2\alpha(z-1) - 2\beta - 2\gamma\right] + c_{n1},
\end{aligned}$$

finalement

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}\left[-2\alpha z + \alpha + 2 - \beta - \gamma\right] + c_{n1}.$$

Pour trouver le paramètre μ, on utilise l'égalité $h(z) = h_n(z)$.

$$\mu + \nu - 2\alpha = n\alpha, \tag{3.55}$$

et

$$-\mu = \frac{-n}{2}\left[\alpha + 2 - \beta - \gamma\right] - \alpha + \gamma + \beta + c_{n1}. \tag{3.56}$$

Pour obtenir la solution, tout d'abord, nous calculons la fonction $\phi_e(z)$ à partir de l'équation (2.36), on a

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} &= \frac{-\alpha z(z-1) - \beta(z-1) - \gamma z}{z(z-1)}, \\
&= -\alpha - \frac{\beta}{z} - \frac{\gamma}{z-1},
\end{aligned}$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\int^z \left[\ln \phi_e(z)\right]' dz = \int^z -\alpha dz - \int^z \frac{\beta}{z} dz - \int^z \frac{\gamma}{z-1} dz,$$

alors

$$\phi_e(z) = \exp(-\alpha z)\, z^{-\beta}(z-1)^{-\gamma}. \tag{3.57}$$

Nous substituons $y_1(z)$ et $\phi_e(z)$ dans l'équation (2.32), devient

$$\Psi_1(z) = \exp(-\alpha z)\, z^{-\beta}(z-1)^{-\gamma}\, y_1(z)\,. \tag{3.58}$$

De l'équation (3.53), on a

$$h(z) = (\mu+\nu)\, z - \mu. \tag{3.59}$$

Maintenant on calcule le polynôme $h_n(z)$.

$$\begin{aligned} h_n(z) &= -\frac{n}{2}\left[\alpha z(z-1) + (\beta+1)(z-1) + (\gamma+1) z\right]' + c_{n2}, \\ &= -\frac{n}{2}\left[\alpha z + \alpha(z-1) + \beta + 1 + \gamma + 1\right] + c_{n2}, \end{aligned}$$

donc

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}\left[2\alpha z - \alpha + 2 + \beta + \gamma\right] + c_{n2}.$$

En utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on obtient

$$\mu + \nu = -n\alpha, \tag{3.60}$$

$$-\mu = -\frac{n}{2}\left[-\alpha + 2 + \beta + \gamma\right] + c_{n2}, \tag{3.61}$$

donc la solution est donnée par :

$$\Psi_2(z) = y_2(z)\,. \tag{3.62}$$

2. pour : $g_2(z) = (\mu + \nu - \gamma\alpha) z - \mu - \gamma\beta$, la fonction $\pi_e(z)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_e(z) = {} & \frac{-\alpha z(z-1) - \beta(z-1) - \gamma z}{2} \\ & \pm \frac{1}{2}\left\{(-\alpha z(z-1) - \beta(z-1) - \gamma z)^2\right. \\ & \left.-4\left[(\mu+\nu) z - \mu - ((\mu+\nu-\gamma\alpha) z - \mu - \gamma\beta)\right] z(z-1)\right\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

après les simplifications, on obtient

$$\pi_{e3}(z) = -\gamma z, \tag{3.63}$$

et

$$\pi_{e4}(z) = -\alpha z(z-1) - \beta(z-1). \tag{3.64}$$

De l'équation (3.63), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$h(z) = (\mu + \nu - \gamma\alpha) z - \mu - \gamma\beta - \gamma.$$

Maintenant on calcule le polynôme $h_n(z)$

$$\begin{aligned}h_n(z) &= -\frac{n}{2}\left[\alpha z(z-1) + (\beta+1)(z-1) + (\gamma+1) z - 2\gamma z\right]' + c_{n3} \\ &= -\frac{n}{2}\left[\alpha(z-1) + \alpha z + \beta + 1 + \gamma + 1 - 2\gamma\right] + c_{n3},\end{aligned}$$

ceci implique

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}\left[2\alpha z - \alpha + \beta + 2 - \gamma\right] + c_{n3}.$$

Pour trouver le paramètre μ, on utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$

$$\mu + \nu - \gamma\alpha = -n\alpha, \tag{3.65}$$

$$-\mu = -\frac{n}{2}\left[-\alpha + \beta + 2 - \gamma\right] + \gamma\beta + \gamma + c_{n3}. \tag{3.66}$$

On détermine la fonction $\phi_e(z)$, on a calculé comme suite :

$$\begin{aligned}\frac{\phi_e'(z)}{\phi_e(z)} &= \frac{-\gamma z}{z(z-1)} \\ &= \frac{-\gamma}{(z-1)}\end{aligned}$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\phi_e(z) = (z-1)^{-\gamma}.$$

En remplaçant $y_3(z)$ dans l'équation (2.32), on trouve

$$\Psi_3(z) = (z-1)^{-\gamma} y_3(z). \tag{3.67}$$

De l'équation (3.64), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$\begin{aligned}h(z) &= (\mu+\nu-\gamma\alpha) z - \mu - \gamma\beta + [-\alpha z(z-1) - \beta(z-1)]' \\ &= (\mu+\nu-\gamma\alpha) z - \mu - \gamma\beta - \alpha z - \alpha(z-1) - \beta,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$h(z) = (\mu+\nu-\gamma\alpha-2\alpha) z - \mu - \gamma\beta + \alpha - \beta.$$

Maintenant nous calculons le polynôme $h_n(z)$

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}[\alpha(z-1) + \alpha z + \beta + 1 + \gamma + 1 - 2\alpha z - 2\alpha(z-1) - 2\beta] + c_{n4},$$

et çà veut dire

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}[-2\alpha z + \alpha - \beta + 2 + \gamma] + c_{n4}.$$

Pour trouver le paramètre μ, on utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$

$$\mu + \nu - \gamma\alpha - 2\alpha = n\alpha, \tag{3.68}$$

$$-\mu = -\frac{n}{2}[\alpha - \beta + 2 + \gamma] + \gamma\beta - \alpha + \beta + c_{n4}. \tag{3.69}$$

Donc la solution est donnée par :

$$\Psi_4(z) = \exp(-\alpha z) z^{-\beta} y_4(z). \tag{3.70}$$

3. pour : $g_3(z) = (\mu + \nu - \alpha\beta - \gamma\alpha) z - \mu - \alpha\beta$, on peut voir facilement que

$$\pi_{e5}(z) = -\beta(z-1) - \gamma z, \tag{3.71}$$

et

$$\pi_{e6}(z) = -\alpha z(z-1). \tag{3.72}$$

De l'équation (3.71), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$\begin{aligned} h(z) &= (\mu + \nu - \alpha\beta - \gamma\alpha) z - \mu - \alpha\beta + [-\beta(z-1) - \gamma z]' \\ &= (\mu + \nu - \alpha\beta - \gamma\alpha) z - \mu - \alpha\beta - \beta - \gamma. \end{aligned}$$

Maintenant nous calculons le polynôme $h_n(z)$

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}[\alpha(z-1) + \alpha z + \beta + 1 + \gamma + 1 - 2\beta - 2\gamma] + c_{n5},$$

ceci implique

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}[2\alpha z - \alpha - \beta + 2 - \gamma] + c_{n5}.$$

Pour trouver le paramètre μ, on utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$

$$\mu + \nu - \alpha\beta - \gamma\alpha - 2\alpha = -n\alpha, \tag{3.73}$$

$$-\mu = -\frac{n}{2}[2 - \alpha - \beta - \gamma] + \alpha\beta + \beta + \gamma + c_{n5}, \tag{3.74}$$

donc la solution est donnée par

$$\Psi_5(z) = z^{-\beta}(z-1)^{-\gamma} y_5(z). \tag{3.75}$$

À partir de l'équation (3.72), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$\begin{aligned} h(z) &= (\mu + \nu - \alpha\beta - \gamma\alpha) z - \mu - \alpha\beta + [-\alpha z(z-1)]' \\ &= (\mu + \nu - \alpha\beta - \gamma\alpha) z - \mu - \alpha\beta - \alpha(z-1) - \alpha z, \end{aligned}$$

ceci implique

$$h(z) = (\mu + \nu - \alpha\beta - \gamma\alpha - 2\alpha) z - \mu - \alpha\beta + \alpha.$$

Maintenant nous calculons le polynôme $h_n(z)$

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}[\alpha(z-1) + \alpha z + \beta + 1 + \gamma + 1 - 2\alpha(z-1) - 2\alpha z] + c_{n6},$$

et çà veux dire

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}[-2\alpha z + \alpha + \beta + 2 + \gamma] + c_{n6}.$$

Pour trouver le paramètre μ, en utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$

$$\mu + \nu - \alpha\beta - \gamma\alpha - 2\alpha = n\alpha, \tag{3.76}$$

$$-\mu = -\frac{n}{2}[\alpha + \beta + 2 + \gamma] + \alpha\beta - \alpha + c_{n6}, \tag{3.77}$$

la solution donc est :

$$\Psi_6(z) = \exp(-\alpha z)\, y_6(z). \tag{3.78}$$

4. pour : $g_3(z) = (\mu + \nu - \alpha\beta) z - \mu + \alpha\beta - \beta\gamma$, la fonction $\pi_e(z)$ est donnée par

$$\pi_{e7}(z) = -\beta(z-1), \tag{3.79}$$

et

$$\pi_{e8}(z) = -\alpha z(z-1) - \gamma z. \tag{3.80}$$

À partir de l'équation (3.79), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$\begin{aligned} h(z) &= (\mu + \nu - \alpha\beta) z - \mu + \alpha\beta - \beta\gamma + [-\beta(z-1)]' \\ &= (\mu + \nu - \alpha\beta) z - \mu + \alpha\beta - \beta\gamma - \beta. \end{aligned}$$

Maintenant nous calculons le polynôme $h_n(z)$.

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}[\alpha(z-1) + \alpha z + \beta + 1 + \gamma + 1 - 2\beta] + c_{n7},$$

ça veut dire

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}(2\alpha z - \alpha - \beta + 2 + \gamma) + c_{n7}.$$

On utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on obtient

$$\mu + \nu - \alpha\beta = -n\alpha, \tag{3.81}$$

$$-\mu = -\frac{n}{2}(-\alpha - \beta + 2 + \gamma) - \alpha\beta + \beta\gamma - \beta + c_{n7}. \tag{3.82}$$

La solution donc est :

$$\Psi_7(z) = z^{-\beta} y_7(z). \tag{3.83}$$

De l'équation (3.80), on peut obtenir le polynôme $h(z)$ comme suite :

$$\begin{aligned} h(z) &= (\mu+\nu-\alpha\beta)z-\mu-\alpha\beta+[-\alpha z(z-1)-\gamma z]' \\ &= (\mu+\nu-\alpha\beta)z-\mu-\alpha\beta-\alpha(z-1)-\alpha z-\gamma, \end{aligned}$$

ceci implique

$$h(z) = (\mu+\nu-\alpha\beta-2\alpha)z-\mu+\alpha\beta+\alpha-\beta\gamma-\gamma.$$

Maintenant nous calculons le polynôme $h_n(z)$

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}[\alpha(z-1)+\alpha z+\beta+1+\gamma+1-2\alpha(z-1)-2\alpha z-2\gamma]+c_{n8},$$

ça veut dire

$$h_n(z) = -\frac{n}{2}[-2\alpha z+\alpha+\beta+2-\gamma]+c_{n8}.$$

On utilisant l'égalité $h(z) = h_n(z)$, on obtient

$$\mu+\nu-\alpha\beta-2\alpha = n\alpha, \tag{3.84}$$

$$-\mu = -\frac{n}{2}[\alpha+\beta+2-\gamma]-\alpha\beta-\alpha+\beta\gamma+\gamma+c_{n8}. \tag{3.85}$$

La solution donc est :

$$\Psi_8(z) = \exp(-\alpha z)(z-1)^{-\gamma}y_8(z). \tag{3.86}$$

Remarque 3.4.1 *On détermine les fonctions y_i, $i = 1\ldots 8$ après la résolution de l'équation (2.42), une fois les fonctions y_i, $i = 1\ldots 8$, on détermine facilement les solutions $\Psi_i(z)$, $i = 1\ldots 8$.*

3.4.1 Les cas particuliers

On va donner des trois exemples de physique de l'équation Heun et Heun confluente, ou dans lesquels on a calculé seulement l'énergie du problème.

Le problème de coulomb sur 3-sphérs

L'équation de Schrödinger pour le problème de coulomb sur 3-sphére en coordonnées paraboliques généralisées, après la séparation des variables, est donnée par l'équation de Heun suivante ([14])

$$l'' + \left(\frac{\Gamma}{z} + \frac{\Delta}{z+1} + \frac{\epsilon}{z+1}\right) l' + \frac{abz - q}{z\,(z-1)\,(z+1)} l = 0, \tag{3.87}$$

où

$$\begin{aligned}
\Gamma &= 1 - \sqrt{1 + E + i\gamma}, \\
\Delta &= \epsilon = |m| + 1, \\
a &= 1 + |m| + \frac{\sqrt{1 + E - i\gamma} - \sqrt{1 + E + i\gamma}}{2}, &(3.88)\\
b &= 1 + |m| - \frac{\sqrt{1 + E - i\gamma} + \sqrt{1 + E + i\gamma}}{2}. &(3.89)
\end{aligned}$$

Pour obtenir la solution du problème, nous utilisons la méthode de Nikiforov-Uvarov prolongée, et ceci en remplaçant les équations (3.88) et (3.89) dans les équations (3.43) et (3.45), on obtient

$$ab = -n\,(\epsilon + \Gamma + \Delta + n - 1)\,,$$

D'autre part, on a

$$\left(1+|m|+\frac{\sqrt{1+E-i\gamma}-\sqrt{1+E+i\gamma}}{2}\right)\left(1+|m|-\frac{\sqrt{1+E-i\gamma}+\sqrt{1+E+i\gamma}}{2}\right)$$
$$=-n\left(2|m|-\sqrt{1+E+i\gamma}+n+2\right),$$

par simplification de cette dernière équation, on trouve

$$E_n=E=(n+|m|)(n+|m|+2)+\frac{\gamma^2}{4(n+|m|+1)^2}.$$

De l'équation (3.45)

$$ab=(n+\Delta+\varepsilon)(\Gamma-n-1)$$

D'autre part, on a

$$\left(1+|m|+\frac{\sqrt{1+E-i\gamma}-\sqrt{1+E+i\gamma}}{2}\right)\left(1+|m|-\frac{\sqrt{1+E-i\gamma}+\sqrt{1+E+i\gamma}}{2}\right)$$
$$=(n+2|m|+2)\left(-\sqrt{1+E+i\gamma}-n\right),$$

par simplification de cette dernière équation, on trouve

$$E_n=E=(n+|m|)(n+|m|+2)+\frac{\gamma^2}{4(n+|m|+1)^2}.$$

Deux électrons se repoussent coulombiquement sur une sphère

Considérons un système de deux électrons, interagissant via un potentiel de coulomb, mais contraints de rester à la surface d'une sphère de dimension D de rayon R. L'hamiltonien du système (en unités atomiques) est :

$$H = \frac{1}{2}\left(\nabla_1^2 + \nabla_2^2\right) - \frac{1}{u}, \tag{3.90}$$

où $u = |r_1 - r_2|$ est la distance interélectronique. La fonction d'onde de Schrödinger du système peut être séparé en tant que produit de fonctions d'ondes de spin, angulaires et inter-électrons.

La fonction d'onde inter-élection $\Psi(u)$ satisfait l'ODE suivante :

$$\left(\frac{u^2}{4R^2} - 1\right)\frac{d^2\Psi}{du^2} + \left(\frac{\delta u}{4R^2} - \frac{1}{\gamma u}\right)\frac{d\Psi}{du} + \frac{\Psi}{u} = E\Psi, \tag{3.91}$$

où δ et γ sont des paramètres liés à la dimension D de la sphère. Introduire la variable sans dimension $z = \frac{u}{2R}$, alors l'ODE ci-dessus peut être écrit sous la forme de l'équation de Heun

$$\frac{d^2\Psi}{du^2} + \left(\frac{\frac{1}{\gamma}}{z} + \frac{\frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{\gamma}\right)}{z+1} + \frac{\frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{\gamma}\right)}{z-1}\right)\frac{d\Psi}{du} + \frac{-4R^2Ez + 2R}{z(z+1)(z-1)}\Psi = 0, \tag{3.92}$$

cette équation est de type CHE en remplacent paramètres γ, δ, ϵ, $\alpha\beta$, q et a dans l'équation.(**??**) par $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{\gamma}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{\gamma}\right)$, $-4R^2E$, $-2R$, -1, respectivement, nous pouvons calculer l'énergie E et le rayon R en écrivant de nouveaux paramètres dans les équations : (3.43) et (3.44), respectivement.

De l'équation (3.43), on a

$$\begin{aligned} -4R^2E &= -n\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{\gamma}\right) + n - 1\right) \\ &= -n\left(\delta - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + n - 1\right), \end{aligned}$$

donc l'énergie est donnée par

$$E = \frac{n\left(n+\delta-1\right)}{4R^2}. \tag{3.93}$$

Potentiel hyperbolique à double puits

Considérons le potentiel suivant

$$V\left(x\right) = -V_0 \frac{\sinh^4\left(\frac{x}{r}\right)}{\cosh^6\left(\frac{x}{r}\right)}. \tag{3.94}$$

où r paramètres physique

Le cas unidimensionnel de l'équation de Schrödinger stationnaire (1.11) est :

$$\frac{-h^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi\left(x\right) + V\left(x\right)\Psi\left(x\right) = E\Psi\left(x\right). \tag{3.95}$$

Nous substituons le potentiel (3.94) dans l'équation précédente (3.95), on trouve

$$\frac{d^2}{dz^2}\Psi\left(z\right) + \left[\frac{2mV_0}{h^2}\frac{\sinh^4\left(z\right)}{\cosh^6\left(z\right)}r^2 + \frac{2m}{h^2}Er^2\right]\Psi\left(z\right) = 0,$$

où $z = \frac{x}{r}$

Si on prend $\epsilon = \frac{2mE}{h^2}$, $U_0 = \frac{2mV_0}{h^2}$ la dernière équation conduit à l'équation suivante

$$\frac{d^2}{dz^2}\Psi\left(z\right) + \left[\epsilon d^2 + U_0 d^2 \frac{\sinh^4\left(z\right)}{\cosh^6\left(z\right)}\right]\Psi\left(z\right) = 0. \tag{3.96}$$

On peut transformer l'équation (3.96) en une équation de Heun confluente en utilisant le changement de variable suivant

$$\xi = \frac{1}{\cosh^2 z},$$

donc l'équation (3.96) prend la forme suivante :

$$\frac{d^2}{d\xi^2}y(\xi)+\left(\alpha+\frac{\beta+1}{\xi}+\frac{\gamma+1}{\xi-1}\right)\frac{d}{d\xi}y(\xi)+\left(\frac{\mu}{\xi}+\frac{\nu}{\xi-1}\right)y(\xi)=0, \qquad (3.97)$$

où $\alpha=-r\sqrt{U_0}$, $\beta=-ir\sqrt{E}$, $\gamma=\frac{-1}{2}$, $\mu=\frac{1}{4}\left[\alpha(\alpha+2)+2\alpha\beta-\beta(\beta+1)\right]$, $\nu=\frac{1}{4}(\alpha+\beta(\beta+1))$,.cette équation est de type CHE (3.47).

Nous pouvons facilement utiliser la méthode de NU prolongée pour trouver l'énergie

De l'équation (3.60), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left[\alpha(\alpha+2)+2\alpha\beta-\beta(\beta+1)\right]+\frac{1}{4}(\alpha+\beta(\beta+1))&=-n\alpha,\\ \frac{1}{4}(\alpha(\alpha+2)+2\alpha\beta+\alpha)&=-n\alpha,\\ \frac{\alpha}{4}(\alpha+3+2\beta)&=-n\alpha.\end{aligned}$$

En substituants $\alpha=-r\sqrt{U_0}$ et $\beta=-ir\sqrt{E}$ dans la dernière équation, on a

$$\begin{aligned}\frac{-r\sqrt{U_0}}{4}\left(-r\sqrt{U_0}+3-2ir\sqrt{E}\right)&=r\sqrt{U_0}n,\\ -r\sqrt{U_0}+3-2ir\sqrt{E}&=-4n,\end{aligned}$$

la dernière équation devient l'équation suivante

$$\sqrt{E}=\frac{1}{2id}\left(4N+3-d\sqrt{U_0}\right),$$

alors l'énergie est donnée par

$$E_N=-\frac{1}{4r^2}\left(4N+3-r\sqrt{U_0}\right)^2. \qquad (3.98)$$

Maintenant, pour trouver l'énergie, nous substituons les paramètres μ et ν dans l'équation (3.65) ou (3.73). De l'équation (3.65), on a

$$\alpha + 3 + 2\beta - 4\gamma = -4n,$$

en substituants $\alpha = -r\sqrt{U_0}$, $\beta = -ir\sqrt{E}$ et $\gamma = \frac{-1}{2}$ dans la dernière équation, on a

$$-r\sqrt{U_0} + 3 - ir\sqrt{E} - 4\left(\frac{-1}{2}\right) = -4n,$$

la dernière équation devient l'équation suivante

$$\sqrt{E} = \frac{-r\sqrt{U_0}}{4r^2} + \frac{5}{2ir} + \frac{4n}{2ir},$$

alors l'énergie est donnée par

$$E_N = -\frac{1}{4r^2}\left(4N + 5 - r\sqrt{U_0}\right)^2. \tag{3.99}$$

Pour les autres cas de la fonction $\pi_e(z)$, on obtient l'une des résultat précédentes (3.98) et (3.99).

Conclusion

La méthode **Nikiforov-Uvarov** et son extension, la méthode **Nikiforov-Uvarov prolongée**, ont été présentées dans cette thèse comme des méthodes très importantes pour résoudre un large éventail de problèmes mathématiques et physiques. Ces méthodes ont ouvert de nouvelles perspectives dans la résolution d'équations différentielles et de problèmes en physique mathématique, en chimie, en mécanique quantique, etc. La méthode Nikiforov-Uvarov a été principalement utilisée pour résoudre des équations hypergéométriques, pour lesquelles ils ont réussi à trouver une solution polynomiale donnée par la formule de Rodrigues. Cependant, avec la méthode Nikiforov-Uvarov étendue, elle peut maintenant être appliquée aux équations différentielles du second ordre contenant au plus quatre points singuliers. Cependant, les scientifiques poursuivent leurs recherches pour développer davantage la méthode **Nikiforov-Uvarov prolongée**, ou pour mettre au point de nouvelles méthodes de résolution d'équations et de problèmes scientifiques.

Nous avons également donné des applications très importantes de la méthode **Nikiforov-Uvarov prolongée** dans le domaine des mathématiques, telles que la résolution des équations de Heun et de Heun confluent, et dans le domaine de la physique, telles que la résolution de l'équation de Schrödinger pour un potentiel de Colomb, résolution de l'équation de Schrödinger pour le potentiel $V(r) = -\alpha r^{-1} + \beta r + kr^2$, le problème de coulomb sur 3-sphérs, deux électrons se repoussent coulombiquement sur une sphère.

Bibliographie

[1] A.Nikiforov.V.Ouvarov, Fonctions spéciales de la physique mathématique, Office des publications universitaires, (1983).

[2] A. Ronveaux. Heun's differential equations, OXFORD NEW YORK TOKYO, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1995.

[3] C. A. Downing, "On a solution of the Schrödinger equation with a hyperbolic double-well potential," J. Math. Phys. 54,072101 (2013).

[4] Elhouda, N., & Zeggar, B. C. (2020). L'équation de Schrödinger en mécanique quantique (Doctoral dissertation, Abdelhafid boussouf university Centre mila).

[5] Hakima LOUAAR . Résolution d'une équation diérentielle à l'aide des équations de Heun, mémoire master 2, 2020/2021. Université Larbi Ben Mhidi- Oum El bouaghi.

[6] H. Ciftci, R. L. Hall, N. Saad, and E. Dogu, "Physical applications of second-order linear differential equations that admit polynomial solutions," J. Phys. A : Math. Theor. 43, 415206 (2010).

[7] Karayer, H., D. Demirhan, and F. Büyükkılıç. "Extension of Nikiforov-Uvarov method for the solution of Heun equation." Journal of Mathematical Physics 56.6 (2015) : 063504.

[8] K. Heun (1889) Zur Théorie der Riemann'schen Functionen zweiter OrdNUng mit vier Verzweigungspunkten. Math, 1889.

[9] M. Lavoie, Polynômes orthogonaux, Québec-Canada.

[14] S. Bellucci and V. Yeghikyan, "The Coulomb problem on a 3-sphere and Heun polynomials," J. Math. Phys. 54, 082103 (2013).

[10] W. W. Bell, D. Van, Special functions for scientists and engineers, nostrand company LTD, (1967).

[11] Y.-Z. Zhang, "Exact polynomial solutions of second order differential equations and their applications," J. Phys. A : Math.Theor. 45, 065206 (2012).

[12] Karayer, H., Demirhan, D., & Büyükkılıç, F. (2018). Solution of Schrödinger equation for two different potentials using extended Nikiforov-Uvarov method and polynomial solutions of biconfluent Heun equation. Journal of Mathematical Physics, 59(5).