REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI
OUM EL BOUAGHI

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET LA VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

N° de série………..
N° d'ordre ………..

École doctorale de Mathématiques
2009/2010

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de
MAGISTER EN MATHÉMATIQUES
Option
MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Thème

CALCUL NUMÉRIQUE DE QUELQUES MODELES POUR E.D.P.AVEC CONDITIONS NON CLASSIQUES

Par
BRAHIMI SAADOUNE

Devant le Jury :

Président :	**A. AYADI**	**PROF**	**Université, Oum El Bouagui**
Rapporteur :	**M. BOUZIT**	**M.C.A**	**Université, Oum El Bouagui**
Examinateurs :			
	N .ADJROUD	**M.C.A**	**Université, Khenchela**
	A. ALLIOUCHE	**M.C.A**	**Université, Oum El Bouagui**
	S. Djezzar	**PROF**	**Université Mentouri, Constantine**

Soutenu le :…………………

Remerciements

Je suis très heureux d'exprimer ici tous mes remerciements et ma profonde gratitude au docteur **Mohamed Bouzit,** qui a guidé mes premiers pas dans l'initiation à la recherche. Sa disponibilité, son soutien, son aide, ses conseils et sa bienveillance durant l'élaboration de ce mémoire m'ont été d'un plus grand intérêt. Sans lui, ce travail n'aurait pas pu voir le jour.

Je tiens aussi à remercier le Professeur **A.AYADI** qui m'a fait l'honneur de présider ce jury. Je remercie également le Professeur **S. DJEZZAR** de l'université Mentouri de Constantine, le docteur **N.ADJROUD** de l'université de Khenchela, et le docteur **A. ALIOUCHE** pour accepter de juger ce mémoire et leurs participations au jury comme étant examinateurs.

Je remercie ici chaleureusement tous les enseignants de l'année théorique (2O09-2010), le Professeur **A.AYADI,** le docteur **A. ALIOUCHE** ainsi que le docteur **G. NAMIR,** pour tout ce qui ont fait durant notre formation.

Je tiens aussi à remercier les professeurs **N.MERAZGA et A. BOUZIANI**

pour leurs conseils et soutien.

Dédicace

Je dédicace ce mémoire à

Mes parents, que Dieu les garde, pour leurs sacrifices tout au long de ma vie.

Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Ma femme, pour tout ce qu'elle m'a apporté, pour son soutien indéterminé et sa compréhension.

Mes adorables enfants : Ikram et Abdelhamid (Hamouda)

Mes frères et sœurs et leurs petites familles, et leurs enfants, chacun par son nom, ainsi que toute la famille Brahimi.

Mes beaux-parents et la famille Djabrouhou

Mes collègues de travail au lycée Braknia Ali à Ain Beida.

Mes amis, tous sans exception, chacun par son nom, pour leur soutien moral et conseils précieux.

Table des matières

INTRODUCTION

Beaucoup de problèmes modélisant des phénomènes dans plusieurs domaines tels que la transmission de la chaleur, la physique des plasmas, dynamique de population, dynamique des fluides et de la thermo-élasticité, etc.…; sont des modèles pour équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites non classiques.

On a recours à ce genre de problèmes lorsque les informations sur les frontières ne peuvent être mesurées ponctuellement (pression, température, etc...), par contre, la condition intégrale, qui peut représenter une moyenne, un flux, une énergie totale ou une masse totale ou autre, est connue. Ces problèmes sont d'actualité et prennent de l'ampleur de jour en jour à cause de cette intégrale.

Ce travail est consacré à l'étude numérique et à la mise en œuvre informatique des problèmes aux limites pour équation aux dérivées partielles avec des conditions non standard de type intégral. Beaucoup d'auteurs ont réalisés des études montrant l'existence et l'unicité de la solution de ce genre de problème par des méthodes différentes parmi lesquelles nous citons les travaux d'A.L.Marhoune [10], M. Bouzit and N. Tyar [4]; M. Bouzit and T.Bahloul [5], A. Bouziane and Benouat [1,2], ou différentes méthodes d'analyse ont été utilisées. Dans le travail que nous représentons ici, nous abordons ces mêmes problèmes du point de vue numérique en vue de l'obtention des valeurs approchées des solutions.

Ce travail peut être considéré comme prolongement des travaux de M .Chelinguel et M. Ayadi [6,7]. Nous adaptons quelques méthodes, qui ont été utilisées dans le calcul de modèles avec des conditions classiques, à ces modèles avec conditions non classiques, à savoir la méthode des différences finis compacte et la méthode de décomposition d'Adomian.

Cette méthode a nécessité d'une part une étude approfondie de quelque algorithmes adaptés aux problèmes obtenus sous formes discrètes en utilisant les méthodes numériques citées ci-dessous et d'autre part une mise en œuvre informatique importante permettant la réalisation de codes de résolution exploitables pour traiter divers problèmes issus de l'industrie.

Le mémoire comprend une introduction générale et trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à la présentation de méthodes numériques utilisées. Le deuxième comprend l'étude numérique des problèmes abordés. La méthode des lignes a été utilisée pour transformer l'équation en un système d'équations différentielles ordinaire du premier ordre. En approximant les dérivées du second ordre par rapport à la variable d'espace et en utilisant la méthode des différences finis compactes, le système est résolue par la méthode de Runge-Kutta.

Quant au troisième chapitre, il est l'objet de la mise en œuvre informatique. Il comprend donc la description des organigrammes réalisés ainsi que la présentation des deux programmes principaux accomplis et utilisés par l'auteur pour l'obtention des résultats numériques.

Des tests numériques ont été effectués sur des modèles dont on connait la solution exacte et ont donnés des résultats très satisfaisants du fait que les valeurs exactes de la solution ont été atteintes dès les premières itérations.

Chapitre 01

1. Méthode des différences finies

1.1 Introduction

Dans le domaine de l'analyse numérique, on peut être amené a rechercher la solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP).

Parmi les méthodes de résolutions couramment utilisées, **la méthode des différences finies.**

Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18$^{\text{éme}}$ siècle (Euler,Taylor,Leibniz...).

Le principe générale de la méthode est basé sur la formule de Taylor.

1.2 Principe général de la méthode

Soit u une fonction de deux variables x et le temps t, on pose $u = u(x,t)$

u est *n* fois dérivable dans l'intervalle I .

Au voisinage de x_0, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x,t) - u(x_0,t)}{x - x_0} = u'(x_0,t)$$

On pose $x - x_0 = h$, donc

$$\frac{u(x_0 + h, t) - u(x_0,t)}{h} \approx u'(x_0,t)$$

On appliquant la formule de Taylor au voisinage de *x*, on a

$$u(x+h,t) = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2!} + u^{(3)}(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

On pose

$$u(x,t) = u_i \ , u(x+h,t) = u_{i+1} \ , u(x-h,t) = u_{i-1} \ , \ u'(x,t) = u'_i$$

$$u_{i+1} = u_i + u'_i h + u''_i \frac{h^2}{2!} + u_i^{(3)} \frac{h^3}{3!} + u_i^{(4)} \frac{h^4}{4!} + \cdots \quad (1.1)$$

$$u_{i-1} = u_i - u'_i h + u''_i \frac{h^2}{2!} - u_i^{(3)} \frac{h^3}{3!} + u_i^{(4)} \frac{h^4}{4!} - \cdots \quad (1.2)$$

1.3 schémas des différences finies

En tronquant les deux séries (1.1) et (1.2) en premier ordre en h, on trouve

$$u_{i+1} = u_i + u_i' h + 0(h^2) \qquad (1.3)$$

$$u_{i-1} = u_i - u_i' h + 0(h^2) \qquad (1.4)$$

En tenant compte de la formule (1.3) , on trouve

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + 0(h) \qquad (1.5)$$

Cette formule est appelée : schémas « **avant** » aux différences finies d'ordre 1 de u_i'.

De même, en utilisant la formule (1.4) , on trouve

$$u_i' = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + 0(h) \qquad (1.6)$$

Cette formule est appelée : schémas « **arrière** » aux différences finies d'ordre 1 de u_i'.

Des deux formules (1.3) et (1.4) , on trouve

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2u_i' h + 0(h^3) \quad ,$$

or

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + 0(h^2). \qquad (1.7)$$

Cette formule est appelée : schémas « **centré** » aux différences finies d'ordre 2 de u_i'.

1.4 Approximation de la premiére derivée

Pour constuire les schémas des différences finies d'ordre supérieur, on utilise le developpement de Taylor au voisinage de x_i .

$$u_{i+1} = u_i + u_i' h + u_i'' \frac{h^2}{2!} + 0(h^3) \qquad (1.8)$$

$$u_{i-1} = u_i - u_i' h + u_i'' \frac{h^2}{2!} + 0(h^3) \qquad (1.9)$$

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2u_i' h + 0(h^3) \quad \text{d'où}$$

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + 0(h^2). \qquad (1.10)$$

La formule (1.10) est dite schéma « **centré** » d'ordre **deux**.

Approximation de la premiére dérivée d'ordre trois

On pose

$$hu'_i = au_{i-1} + bu_i + c\,u_{i+1} + du_{i+2}$$

$$u_{i+1} = u_i + u_i'h + u_i''\frac{h^2}{2!} + u_i^{(3)}\frac{h^3}{3!} + 0(h^4)$$

$$u_{i-1} = u_i - u_i'h + u_i''\frac{h^2}{2!} - u_i^{(3)}\frac{h^3}{3!} + 0(h^4)$$

$$u_{i+2} = u_i + u_i'(2h) + u_i''\frac{(2h)^2}{2!} + u_i^{(3)}\frac{(2h)^3}{3!} + 0(h^4)$$

De ces dernières formules on obtient

$$hu'_i = a\left(u_i - u_i'h + u_i''\frac{h^2}{2!} - u_i^{(3)}\frac{h^3}{3!}\right) + bu_i + c\left(u_i + u_i'h + u_i''\frac{h^2}{2!} + u_i^{(3)}\frac{h^3}{3!}\right)$$
$$+ d\left(u_i + u_i'(2h) + u_i''\frac{(2h)^2}{2!} + u_i^{(3)}\frac{(2h)^3}{3!}\right) + o(h^4)$$

$$hu'_i = (a+b+c+d)u_i + h(-a+c+2d)u_i' + h^2\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2} + 2d\right)u_i'' + h^3(-\frac{a}{6} + \frac{c}{6} + \frac{8d}{6})\,u_i^{(3)}.$$

Par comparaison , on trouve

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ -a+c+2d = 1 \\ \dfrac{a}{2} + \dfrac{c}{2} + 2d = 0 \\ -a+c+8d = 0 \end{cases} \text{d'ou } a = -\frac{1}{3} \quad , \quad b = -\frac{1}{2} \quad , \quad c = 1 \ , d = -\frac{1}{6}$$

$$u_i' = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6h} + 0(h^3)$$

Ce schéma est le schéma aux différences finies d'ordre trois .

1.5 Les derivées d'ordres superieurs

$$u_{i+1} = u_i + u_i'h + u_i''\frac{h^2}{2!} + u_i^{(3)}\frac{h^3}{3!} + 0(h^4)$$

$$u_{i-1} = u_i - u_i'h + u_i''\frac{h^2}{2!} - u_i^{(3)}\frac{h^3}{3!} + 0(h^4)$$

En additionnant ces deux formules, on trouve

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + h^2 u_i'' + 0(h^4)$$

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 0(h^2) \qquad (1.11)$$

La relation (1.11) est le schéma d'ordre deux « **centré** ».

Il est possible de construire d'autres schémas « avant » et « arrière » d'ordre un pour u_i''.

Schéma «avant » $u_i'' = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2} + 0(h)$ (1.12)

Schéma «arrière » $u_i'' = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} + 0(h)$ (1.13)

Nous pouvons obtenir des schémas aux differences finies surérieurs par le même procédé pour approximer les dérivées seconde , troisiéme,etc…

Exemple

le schéma « arrière » d'ordre deux pour la derivée seconde est

$$u_i'' = \frac{2u_i - 5u_{i-1} + 4u_{i-2} - u_{i-3}}{h^2} + 0(h^2)$$

1.6 Utilisation des différences finies pour la résolution d'un problème

Position du problème

Chercher une valeur approchée de *u* telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L & (1) \\ u(x,0) = f(x) \;\; 0 \le x \le L \quad \textit{condition initiale} & (2) \\ \begin{cases} u(0,t) = g(t) \; 0 \le t \le T \\ u(L,t) = h(t) \;\; 0 \le t \le T \end{cases} \textit{conditions aux limites} & (3) \end{cases}$$

$u(x,t)$ est une fonction de deux variables difinie sur $[0,L] \times [0,T]$, $a \neq 0$.

D'une autre manière, Si on connait les valeurs de la fonction $u(x,t)$ sur les cotés

$t = 0$, $t = T$, $x = 0$, $x = L$, on peut obtenir une solution approchée .

Le maillage

Faisons un maillage uniforme du domaine $[0, L] \times [0, T]$ par des rectangles en prenant les noeux (x,t) tels que

$$x = ih\ , i = 1,2, \ldots$$

$$t = jk\ , j = 1,2, \ldots$$ (fig .1) et (fig .2) ,

et déterminons les valeurs approchées des solutions en ces nœuds.

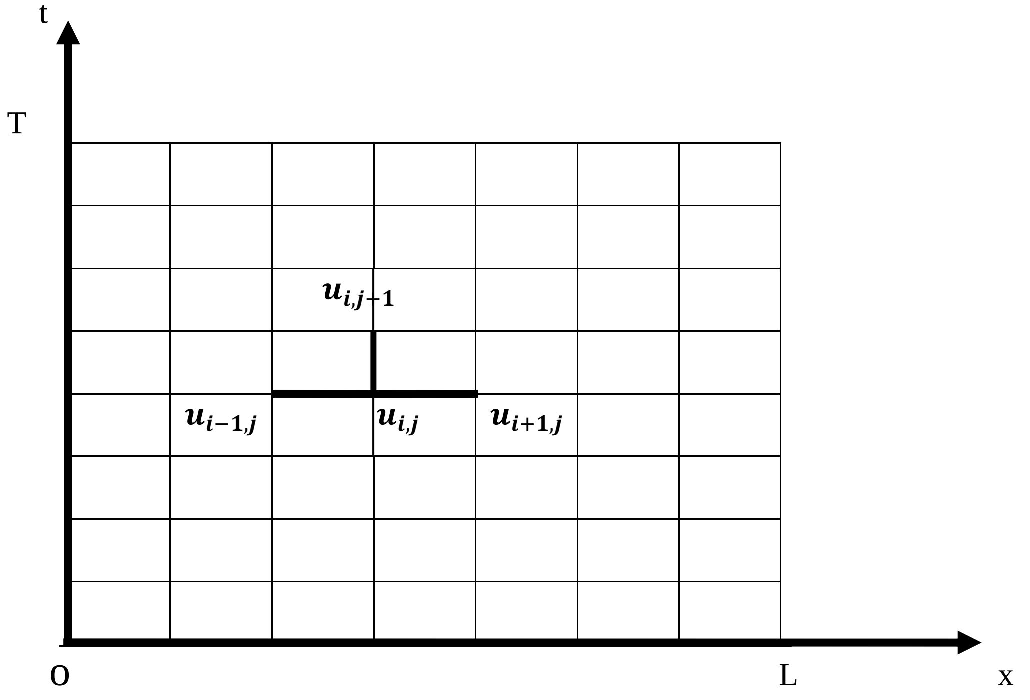


Fig.1.

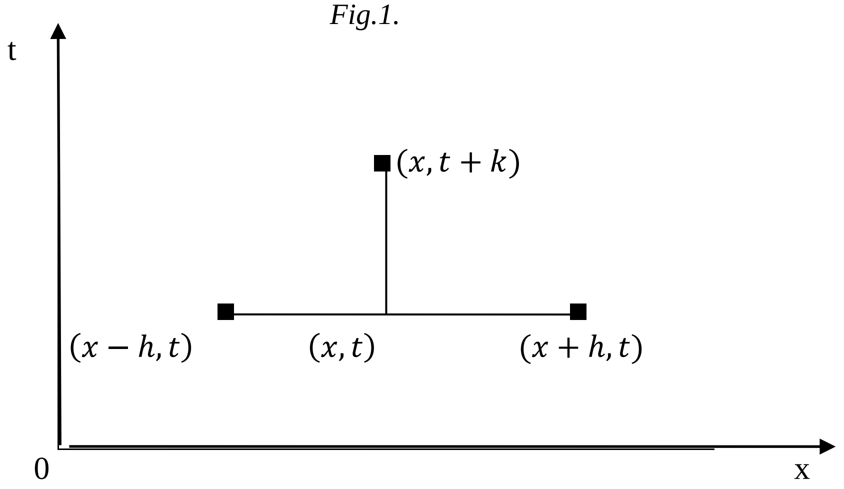


Fig .2

Notation

On pose

$u(x,t) = u(ih, jk) = u_{i,j}$ et on remplace l'equation (1) par l'équation corréspondante en différences finies pour le point $u(ih, jk)$ conformément au formules

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = u_i'' \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u'_j \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

L'équation (1) devient

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

d'où

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{ka^2}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right).$$

On pose

$$\lambda = \frac{ka^2}{h^2},$$

d'où

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \lambda\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) \ / \ \lambda > 0.$$

On a finalement

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} \ / \ i = 1,2,\dots,N-1 \qquad (4)$$

On déduit de la formule (4) que si on connait les trois valeurs dans la j-ème série $u_{i-1,j}$, $u_{i,j}$, $u_{i+1,j}$, on peut déterminer la valeur $u_{i,j+1}$ dans la (j+1)-ème série. (*voir fig.1*)

Nous avons toutes les valeurs sur la droite $t = 0$ grâce à la formule (2) et nous déterminons les valeurs sur tous les points intérieurs du segment $t = L$ grâce à la formule (4).

Les valeurs aux extrémités de ce segment sont connues à cause des conditions aux limites (3).

Ecriture matricielle

On ecrit la formule (4) sous forme matricielle

pour $i = 1 :\ u_{1,j+1} = \lambda u_{0,j} + (1 - 2\lambda)u_{1,j} + \lambda u_{2,j}$

pour $i = 2 :\ u_{2,j+1} = \lambda u_{1,j} + (1 - 2\lambda)u_{2,j} + \lambda u_{3,j}$

pour $i = 3 :\ u_{3,j+1} = \lambda u_{2,j} + (1 - 2\lambda)u_{3,j} + \lambda u_{4,j}$

.
.
.

pour $i = N - 2 : u_{N-2,j+1} = \lambda u_{N-3,j} + (1 - 2\lambda)u_{N-2,j} + \lambda u_{N-1,j}$

pour $i = N - 1 :\ u_{N-1,j+1} = \lambda u_{N-2,j} + (1 - 2\lambda)u_{N-1,j} + \lambda u_{N,j}$

$$\begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ . \\ u_{N-2,j+1} \\ u_{N-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda & . & . & . & . & . & 0 \\ . & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 & . & . & \lambda & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ . \\ u_{N-2,j} \\ u_{N-1,j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(jk) \\ 0 \\ \vdots \\ . \\ 0 \\ h(jk) \end{pmatrix}$$

On pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ . \\ u_{N-2,j} \\ u_{N-1,j} \end{pmatrix},\ U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ . \\ u_{N-2,j+1} \\ u_{N-1,j+1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda & . & . & . & . & . & 0 \\ . & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 & . & . & \lambda & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

On trouve finalement

$$U_{n+1} = AU_n + V(t) \quad telque\ V(t) = \begin{pmatrix} g(jk) \\ 0 \\ \vdots \\ . \\ 0 \\ h(jk) \end{pmatrix} \quad et\ \ n = 0,1,2,\ldots \qquad (5)$$

Si $n = 0$ c'est-à-dire $j = 0$, on portant dans la formule (5), on trouve

$$U_1 = AU_0 + V(t) \quad tel\ que \quad t = jk = 0$$

$$U_1 = AU_0 + V(0)$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ . \\ u_{N-2,1} \\ u_{N-1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda & . & . & . & . & . & 0 \\ . & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 & . & . & \lambda & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ . \\ u_{N-2,0} \\ u_{N-1,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(0) \\ 0 \\ \vdots \\ . \\ 0 \\ h(0) \end{pmatrix}$$

Ce système est résolu par une méthode adéquate et on détermine ainsi les valeurs pour les noeux de la première rangée sur la droite $t = k$, qui sont les composantes du vecteur $\boldsymbol{U_1}$, ainsi nous déterminons les valeurs de la solution pour tous les noeuds de la grille rangée par rangée.

Pour $n = 1$ c'est-à-dire $j = 1$, de la formule (5), on trouve

$$U_2 = AU_1 + V(t) \quad tel\ que \quad t = k$$

$$U_2 = AU_1 + V(k)$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ 0 \\ \vdots \\ . \\ .0 \\ u_{N-1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda & . & . & . & . & . & 0 \\ . & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 & . & . & \lambda & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ . \\ .0 \\ u_{N-1,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(k) \\ 0 \\ \vdots \\ . \\ 0 \\ h(k) \end{pmatrix}$$

En résolvant ce systéme, on détermine les valeurs approchées de la solution sur les noeux de la deuxième rangée qui consonttient les points sur la droite $t = 2k$, ainsi nous déterminons rangée par rangée les valeurs de la solution pour tous les noeuds du maillage.

Convergence

Si $\lambda \leq \frac{1}{2}$, le schémas (4) est convergent [13].

1.7 Méthode de Runge-kutta

Soit donnée l'équation différentielle ordinaire suivante

$$y' = \mathrm{f}(x, y)\ , \tag{1.7.1}$$

avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$

où y est une fonction définie est dérivable sur l'intervalle $[a.b]$.

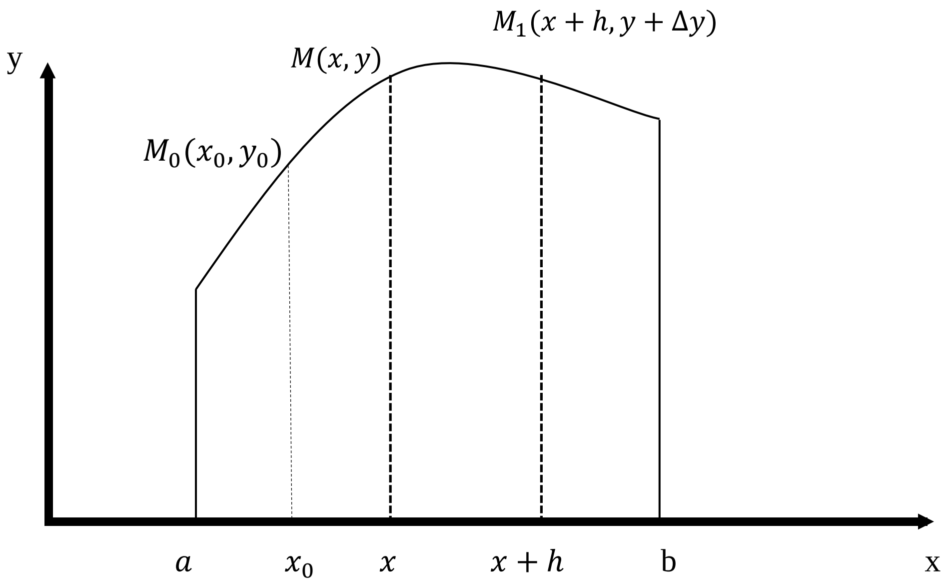


Fig .3.

Comme y est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a.b]$ on applique le developpement de Taylor d'ordre 4 au voisinage de x c'est-à-dire x+h

$$y(x+h) = y(x) + \frac{y'(x)}{1}h + \frac{y''(x)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x)}{3!}h^3 + \frac{y^{(4)}(x)}{4!}h^4 + 0(h^4)$$

On pose

$$\Delta y = \ y(x+h) - y(x) \tag{1.7.2}$$

$$\Delta y = \frac{y'(x)}{1}h + \frac{y''(x)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x)}{3!}h^3 + \frac{y^{(4)}(x)}{4!}h^4 + 0(h^4) \tag{1.7.3}$$

On déduit de cette formule que si on connait la valeur de $y(x)$au point x et les dérivées

$y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$, $y^{(4)}(x)$ on peut calculer $y(x+h)$.

La méthode de runge-kutta repose sur les valeurs suivantes

$$\begin{cases} K_1 = h\mathrm{f}(x,y) \\ K_2 = h\mathrm{f}\left(x+\dfrac{h}{2}, y+\dfrac{K_1}{2}\right) \\ K_3 = h\mathrm{f}\left(x+\dfrac{h}{2}, y+\dfrac{K_2}{2}\right) \\ K_4 = h\mathrm{f}(x+h, y+K_3) \end{cases}$$

On peut montrer que $\Delta y = y(x+h) - y(x)$ donné par la formule (1.6.3) coincide avec

Δy Donné par la formule

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \ ,$$

alors on trouve

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \ / \ y(x_0) = y_0$$

1.8 Formule de Simpson

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et soient

$M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ des points de la courbe (c) de la fonction f tel que

$$x_0 = a \quad , \quad x_2 = b \quad \text{et} \quad x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$$

Pour obtenir la formule de Simpson, en remplace la courbe (c) par la parabole passant

par les points $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ (figure 4)

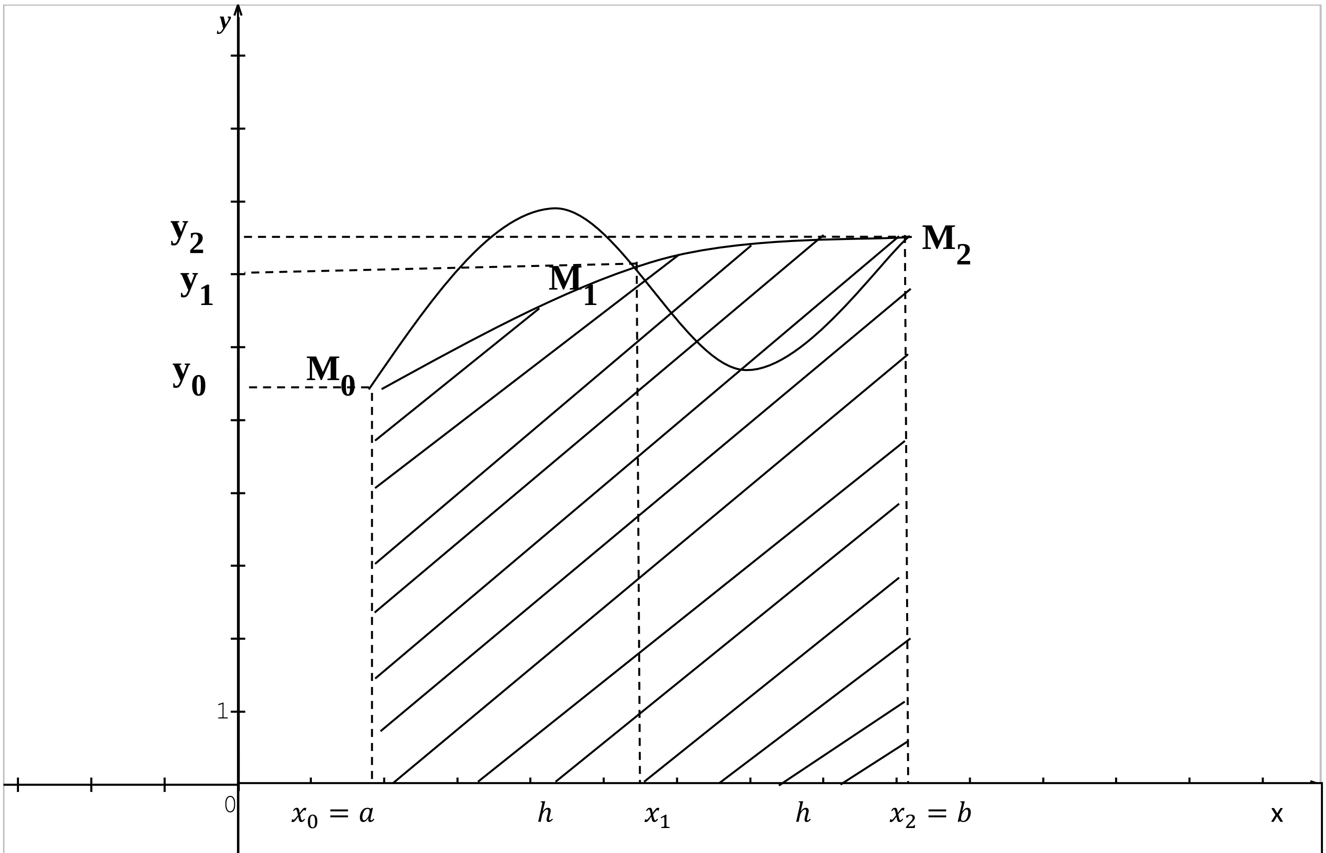


figure.4.

La formule de Simpson est donnée par la relation suivante

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

2. Méthode de décomposition d'Adomian

1.2.1 Aperçu sur la méthode

Cette méthode permet de résoudre les équations fonctionnelles de différents types .

L'avantage de cette méthode est de permettre la résolution par un schéma direct le probléme considéré où la solution est obtenue sous forme de séries, rapidement convergentes.

Beaucoup d'auteur ont donnés un grand intérêt à l'application de cette méthode , et à la résolution des problémes aussi bien déterministe que sochastique .

Dans ce chapitre , on va exposer les grands principes de cette méthode sur un probléme non linéaire .

On propose ensuite deux méthodes pratiques de calcul les polynômes d'Adomian , apres on va étudier la convergence de la méthode et enfin on montre concrétement l'éffecacité et la précision de la méthode en considérant un probléme parabolique non linéaire avec exemples numérique .

1.2.2 Principe général de la méthode

Soit l'équation fonctionnelle

$$\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} \tag{2.1}$$

où f est une fonction donnée et F est un opérateur differentiel non linéaire d'un éspace de

Hilbert H dans H , contient des termes lineaire et des termes non linéaires c.-à-d.

F = des termes lineaire + des termes non lineaires

La partie lineaire est notée P et la partie non lineaire est notée N

Donc on a

$$F = \mathrm{P} + N$$

P sera décomposer en deux termes L et R c.-à-d. P = L+R, ou L est un opérateur inversible et R est le reste de la partie linéaire P.

L'équation(2.1) s'écrit sous la forme

or $$(L + R + N)(u) = f$$

$$L(u) + R(u) + N(u) = f \tag{2.2}$$

En appliquant l'opérateur inverse L^{-1} à l'équation (2.2), on trouve

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}(f) - L^{-1}R(u) - L^{-1}N(u)$$

À titre d'exemple, on prend L un opérateur différentiel d'ordre 1 comme suit

$$L(u) = \frac{d(u)}{dt} \quad , \quad L^{-1}(u) = \int_0^t (u)dt \, ,$$

on obtient

$$L^{-1}L(u) \ = \ u - u(0),$$

alors

$$u = u(0) + L^{-1}(f) - L^{-1}R(u) - L^{-1}N(u)$$

On cherche la solution u sous la forme $\quad u = \sum_{i=0}^{n} u_i$

$$u = \sum_{i=0}^{n} u_i = \ u(0) + L^{-1}(f) - \ L^{-1}R\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right) - \ \mathrm{L}^{-1}\mathrm{N}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right) \qquad (2.3)$$

En utilisant la formule (2.3), on trouve

$$\begin{cases} u_0(x,t) = \ u(0) + \mathrm{L}^{-1}(f) \\ u_1(x,t) = -\,\mathrm{L}^{-1}\mathrm{R}(u_0) - \ \mathrm{L}^{-1}\mathrm{N}(\,u_0) \\ u_2(x,t) = -\,\mathrm{L}^{-1}\mathrm{R}(u_1) - \ \mathrm{L}^{-1}\mathrm{N}(\,u_1) \\ \quad \vdots \\ u_{n+1}(x,t) = -\,\mathrm{L}^{-1}\mathrm{R}(u_n) - \ \mathrm{L}^{-1}\mathrm{N}(\,u_n) \end{cases}$$

Remarque

Si L un opérateur différentiel d'ordre 2 c'est-à-dire

$$L_{xx}(u) = \frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} \quad , \quad L_{xx}^{-1}(u) = \int_0^x \left[\int_0^x (.)dx\right] dx$$

et on obtient

$$L^{-1}L(u) = \ u - u(0) - u'(0)x$$

où $u(0) \; et \; u'(0)$ sont données.

En général, si L un opérateur différentiel d'ordre *n* en utilise la formule

$$L^{-1}L(u) = u - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} u^{(k)}(t_0)$$

*o*ù $u(t_0)$, $u'(t_0)$ *et* $u''(t_0)$, ...Sont données.

1.2.3 Recherche des polynomes d'Adomian

L'étape la plus importante dans la méthode de décomposition est celle du calcul des polynômes d'Adomian.

On décompose le terme non linéaire

$$N(u) = N\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right),$$

en écrivant $N(u)$ sous forme d'une série de polynômes spéciaux, appelés polynômes d'Adomian. On obtient donc

$$N(u) = \sum_{i=0}^{n} A_i$$

Les polynômes A_n sont donc les polynômes d'Adomian.

Pour obtenir les polynômes A_n on introduit le paramétre λ comme suit

$$u(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots + \lambda^i u_i + \cdots \qquad (2.4)$$

$$N(u(\lambda)) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i A_i = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \cdots + \lambda^i A_i + \cdots \qquad (2.5)$$

En utilisant les deux formules (2.4) et (2.5)

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda} N(u(\lambda))\right]_{\lambda=0}, \quad A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} N(u(\lambda))\right]_{\lambda=0}, \quad A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3} N(u(\lambda))\right]_{\lambda=0},$$

$$\ldots, A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(u(\lambda))\right]_{\lambda=0}$$

Remarque

Nous pouvons obtenir les polynômes d'Adomian en posant

$$u(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}\lambda^{i}u_i \quad et \quad N\big(u(\lambda)\big)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,A_i$$

On developpant $u(\lambda)$ sous forme de puissances de λ et en comparant ,on trouve que A_n représente le coeffecient de λ^n.

1.2.4 Exemples de recherche des polynômes d'Adomian

Exemple 1

Soit l'opérateur $N(u)$ définit par $N(u)=u^2$. On pose

$$u=u(\lambda)=u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2+\cdots+\lambda^iu_i+\cdots$$

$$N(u)=u^2=(u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2+\cdots+\lambda^iu_i+\cdots)(u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2+\cdots+\lambda^iu_i+\cdots)$$

$$N(u)=u^2=u_0^2+2u_0u_1\lambda+(2u_0u_2+u_1^2)\lambda^2+(2u_0u_3+2u_1u_2)\lambda^3+\ldots \qquad (2.6)$$

D' autre part on à

$$N\big(u(\lambda)\big)=u^2=\sum_{i=0}^{n}\lambda^iA_i=A_0+\lambda A_1+\lambda^2A_2+\cdots+\lambda^iA_i+\cdots \qquad (2.7)$$

En comparant les deux de formules $(2.6) et$ (2.7) , on trouve les polynômes d'Adomian .

$$A_0=u_0^2\ ,\ A_1=2u_0u_1\ ,\ A_2=u_1^2+2u_0u_2\ ,\ A_3=2u_0u_3+2u_1u_2\ .$$

Le reste des polynômes A_n se calculent de la même maniére.

2éme méthode

$A_0=N(u_0)=u_0{}^2$

$$A_1=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}N(u(\lambda))\right]_{\lambda=0}$$

$$A_1=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}(u_0^2+2u_0u_1\lambda+(2u_0u_2+u_1^2)\lambda^2+(2u_0u_3+2u_1u_2)\lambda^3+\cdots)\right]_{\lambda=0}$$

$$A_1=2u_0u_1$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}(u_0^2+2u_0u_1\lambda+(2u_0u_2+u_1^2)\lambda^2+(2u_0u_3+2u_1u_2)\lambda^3+\cdots)\right]_{\lambda=0}$$

$$A_2=u_1{}^2+2u_0u_2$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3}(u_0^2 + 2u_0u_1\lambda + (2u_0u_2 + u_1^2)\lambda^2 + (2u_0u_3 + 2u_1u_2)\lambda^3 + \cdots)\right]_{\lambda=0}$$

$$A_3 = 2u_0u_3 + 2u_1u_2$$

Exemple 2

Soit l'opérateur $N(u)$ définit par $N(u) = u^3$

$$N(u) = u^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i\right)$$

$$= (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots + \lambda^i u_i + \cdots)(u_0 + \lambda u_1 + \cdots + \lambda^i u_i + \cdots)(u_0 + \lambda u_1 + \cdots + \lambda^i u_i + \cdots)$$

$$N(u) = u^3 = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i A_i = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \cdots + \lambda^i A_i + \cdots$$

Par raisonnement similaire, on trouve

$$A_0 = {u_0}^3 \ , \ A_1 = 3{u_0}^2 u_1 \ , \ A_2 = 3{u_0}^2 u_2 + 3u_1 2u_0 \ , \ A_3 = {u_1}^3 + 3{u_0}^2 u_3 + 3u_2 u_1 u_0$$

Le reste des polynômes A_n se calculent de la même maniére.

1.2.5 Applications

On applique maitenant la méthode de décomposition sur des éxemple simples dont on connait la solution exacte.

Application 1

Soit l'équation algébrique

$$x^2 + 5x - 1 = 0 \qquad (*)$$

On a

$$x = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x^2,$$

donc

$$N(x) = x^2 \quad , \quad N(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i.$$

Ici , l'opérateur $N(x)$ est non linéaire,

L est la multiplication par 5 et L^{-1} la division par 5.

Les polynômes $A_n$doivent être évalués à partir de $N(x)$.

On cherche la solution x sous la forme $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$,

d'où

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i = 0.2 - 0.2 \sum_{i=0}^{n} A_i$$

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \\ x_1 = -0.2A_0 \\ x_2 = -0.2A_1 \\ \\ x_{n+1} = -0.2A_n \end{cases} \qquad x = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + \; + x_n + \cdots$$

En prenant la formule (2.5) en considération , on trouve

$$x_1 = -0.2A_0 = -0.2x_0^2 = -0.008$$

$$x_2 = -0.2A_1 = -0.2(2x_0\, x_1) = 0.00064,$$

et remarque que

$$x = x_0 + x_1 + x_2 \approx 0.1926$$

L'une des deux solutions

L'une des deux solutions de l'équation $(*)$ est $\dfrac{-5+\sqrt{19}}{2} \approx 0.1925$

En comparant la solution obtenue par la méthode de décomposition avec la solution $\dfrac{-5+\sqrt{19}}{2}$,

on voit que les deux resultats sont très proches.

Application 2

Soit l'équation algébrique

$$x^3 + 5x - 1 = 0, \qquad (**)$$

on a

$$x = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x^3 \;, \quad x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{\infty} A_i \quad et \quad x^3 = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$x_0 = \frac{1}{5} = 0.2 \;,\; A_0 = x_0^3 \;,\; A_1 = 3x_0^2 x_1 \;,\; A_2 = 3x_0^2 x_2 + 3x_1^2 x_0 \;,$$

$$A_3 = x_1^3 + 3x_0^2 x_3 + 3x_0 x_1 x_2$$

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \\ x_1 = -0.2A_0 = -0.0016 \\ x_2 = -0.2A_1 = -0.2(3x_0^2x_1) = 0.0000384 \\ \qquad \vdots \\ x_{n+1} = -0.2A_n \end{cases}$$

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

$$x = x_0 + x_1 + x_2 = 0.1984$$

est une valeur approchée de la valeur exacte de la solution (fig. 5).

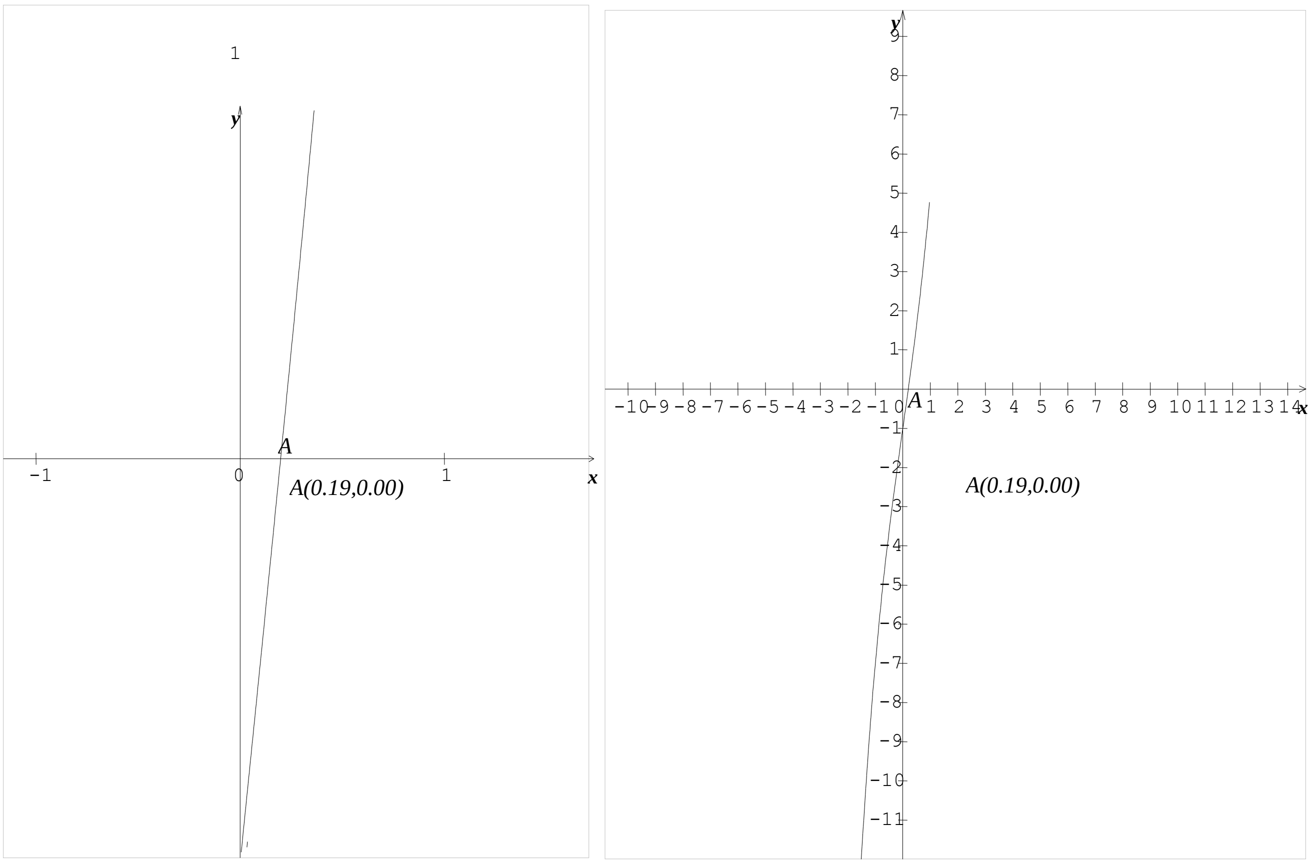


Fig.5

Application 3

Soit le probléme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N(u) + f(x.t) \qquad x \in [a,b]\,, t \in [0,T] & (1) \\ \\ u(x,0) = \mathrm{g}(x) & (2) \end{cases}$$

Cherchons la solution u sous la forme $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$

$$L_t(.) = \frac{\partial(.)}{dt} \quad , \quad L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt \quad , \quad L_{xx}(.) = \frac{\partial^2(.)}{dx^2}$$

L'équation (1) devient

$$L_t(u) = L_{xx}(u) + N(u) + f(x,t) \tag{3}$$

$$L_t^{-1}L_t(u) = L_t^{-1}L_{xx}(u) + L_t^{-1}N(u) + L_t^{-1}f(x,t)$$

$$u(x,t) - u(x,0) = L_t^{-1}L_{xx}(u) + L_t^{-1}N(u) + L_t^{-1}f(x,t) \quad \text{d'où}$$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u(x,0) + L_t^{-1}f(x,t) + L_t^{-1}L_{xx}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right) + L_t^{-1}N\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u(x,0) + L_t^{-1}f(x,t) + L_t^{-1}\left[L_{xx}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right) + N\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)\right]$$

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1}f(x,t) \\ \\ u_{n+1}(x,t) = L_t^{-1}[L_{xx}(u_n) + N(u_n)] \end{cases}$$

Application numérique

Soit le probléme précédent

$$(p) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-u} + e^{-2u} \qquad x \in [0,1]\,, t \in [0,T] & (1) \\ \\ u(x,0) = \ln(x+2) & (2) \end{cases}$$

$N(u) = e^{-u} + e^{-2u} \quad , \quad f(x,t) = 0 \quad , \quad g(x) = \ln(x+2)$

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u(x,0) = \ln(x+2) \\ \\ u_{n+1}(x,t) = L_t^{-1}[L_{xx}(u_n) + N(u_n)] \end{cases}$$

Recherchons les polynômes d'Adomian A_n

$$N(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i} + e^{-2\sum_{i=1}^{n} \lambda^i u_i}$$

en utilisant la formule $A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\big(u(\lambda)\big)\right]_{\lambda=0}$, on trouve

$u_0 = \ln(x+2) \quad , \quad N(u_0) = e^{-u_0} + e^{-2u_0} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$

$u_1 = L_t^{-1}[L_{xx}(u_0) + N(u_0)] = \int_0^t \left[\frac{d^2 u_0}{dx^2} + N(u_0)\right] dt = \frac{t}{x+2}$

$u_2 = L_t^{-1}[L_{xx}(u_1) + N(u_1)] = \int_0^t \left[\frac{d^2 u_1}{dx^2} + N(u_1)\right] dt = \frac{-t^2}{2(x+2)^2}$

$u_3 = L_t^{-1}[L_{xx}(u_2) + N(u_2)] = \int_0^t \left[\frac{d^2 u_2}{dx^2} + N(u_2)\right] dt = \frac{-t^3}{3(x+2)^3}$

$u_4 = \frac{t^4}{4(x+2)^4}$

.

.

.

$u_{n+1}(x,t) = L_t^{-1}[L_{xx}(u_n) + N(u_n)] = \int_0^t \left[\frac{d^2 u_n}{dx^n} + N(u_n)\right] dt$

$u_{n+1}(x,t) = \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)(x+2)^{n+1}}$

$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \cdots + u_n(x,t) + u_{n+1}(x,t) + \cdots$

$u(x,t) = \ln(x+2) + \frac{t}{x+2} + \frac{-t^2}{2(x+2)^2} + \frac{t^3}{3(x+2)^3} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)(x+2)^{n+1}}$

$$u(x,t) = \ln(x+2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)(x+2)^{n+1}}$$

$$u(x,t) = \ln(x+2) + \ln\left(\frac{t}{x+2} + 1\right) = \ln(t+x+2)$$

.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)(x+2)^{n+1}}$ est le developpement limité de la fonction $ln(X+1)$ telque $X = \frac{t}{x+2}$

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \dots\dots\dots \ \dots\dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{x^n} + \cdots.$$

On verifie facilement que

$$u(x,t) \ = ln(x+t+2)$$

est la solution exacte de probléme (P).

Remarque 1

On peut vérifier facilement la précision de cette méthode en prenant la somme des M premiers termes et par comparaison avec la solution exacte on trouve les résultat suivants

$$u_M(x,t) = \ln(x+2) + \sum_{n=0}^{M} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)(x+2)^{n+1}}$$

Remarque 2

On va utiliser dans le troisiéme chapitre un programme de c++ pour calculer la somme des M Premier termes

si en prend M = 4 , $x = 0.5$, $t = 0.2$

$$u(x,t) = ln(x+t+2) = 0.99325177$$

$$u_M = \ln(x+2) + \sum_{n=0}^{4} u_n(x,t)$$

$$u_M = \ln(x+2) + u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t) = 0.99325115$$

L'erreur absolue pour ce cas ($x = 0.5$, $t = 0.2$) est $|u(x,t) - \boldsymbol{u_M}(x,t)| = \boldsymbol{6 \cdot 2\ E - 7}$

Si on veut augmenter la précision il faut prendre plusieur termes de la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Application 4

Soit le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in]0,1[\,, t \geq 0 & (1) \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 1 - e^{-t} \\ u(1,t) = sint \end{cases}$$

$$L_t(.) = \frac{\partial(.)}{\partial t} \quad , \quad L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt \quad , \quad L_{xx}(.) = \frac{\partial^2(.)}{\partial x^2} \quad , \quad L_{xx}^{-1}(.) = \int_0^x \left[\int_0^x (.)dx\right]dx$$

L'equation (1) s'ecrit sous la forme

$$L_t(u) = L_{xx}(u)$$

$$L_{xx}^{-1}L_{xx}(u) = L_{xx}^{-1}L_t(u)$$

$$u(x,t) = u(0,t) + xu'(0,t) + L_{xx}^{-1}L_t(u(x,t))$$

On cherche la solution sous la forme $\quad u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i(x,t) = u(0,t) + xu'(0,t) + L_{xx}^{-1}L_t\left(\sum_{i=0}^{n} u_i(x,t)\right)$$

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u(0,t) + xu'(0,t) \\ u_1(x,t) = L_{xx}^{-1}L_t\big(u_0(x,t)\big) \\ u_{n+1}(x,t) = L_{xx}^{-1}L_t\big(u_n(x,t)\big) \end{cases}$$

On cherche la solution sous la forme $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$

$$
\begin{cases}
u_0(x,t) = (1-x)(1-e^{-t}) + xsint \\
u_1(x,t) = L_{xx}^{-1}L_t\big(u_0(x,t)\big) = \int_0^x \left[\int_0^x \frac{d}{dt}\big(u_0(x,t)\big)dx\right]dx = e^{-t}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}\right) - \frac{x^3}{3!}cost \\
u_2(x,t) = L_{xx}^{-1}L_t\big(u_1(x,t)\big) = \int_0^x \left[\int_0^x \frac{d}{dt}\big(u_1(x,t)\big)\,dx\right]dx = -e^{-t}\left(\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}\right) - \frac{x^5}{5!}sint \\
u_3(x,t) = L_{xx}^{-1}L_t\big(u_2(x,t)\big) = \int_0^x \left[\int_0^x \frac{d}{dt}\big(u_2(x,t)\big)\,dx\right]dx = e^{-t}\left(\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}\right) - \frac{x^7}{7!}cost \\
u_4(x,t) = L_{xx}^{-1}L_t\big(u_3(x,t)\big) = \int_0^x \left[\int_0^x \frac{d}{dt}\big(u_3(x,t)\big)\,dx\right]dx = -e^{-t}\left(\frac{x^8}{8!}-\frac{x^9}{9!}\right) - \frac{x^9}{9!}sint \\
\vdots \\
u_{2n}(x,t) = -e^{-t}\left(\frac{x^{4n}}{(4n)!}-\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\right) - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}sint \\
u_{2n+1}(x,t) = e^{-t}\left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}-\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right) - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}cost
\end{cases}
$$

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(x,t)$$

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t}\left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}-\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right) - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}cost$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} -e^{-t}\left(\frac{x^{4n}}{(4n)!}-\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\right) - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}sint$$

Exemple

Si en prend la série tronquée

$$u_M(x,t) = \sum_{n=0}^{M} u_n(x,t)$$

$$u_M(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{n=0}^{M} u_{2n+1}(x,t) + \sum_{n=1}^{M} u_{2n}(x,t)$$

Pour les valeurs suivantes $M = 5$, $x = 0.5$, $t = 0.2$ on trouve

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{n=0}^{5} u_{2n+1}(x,t) + \sum_{n=1}^{5} u_{2n}(x,t) = 0.2528799550875$$

Alors $$u_M(x,t) = \sum_{n=0}^{M} u_n(x,t) = u_0 + u_1 + \cdots + u_{11} = 0.2528799550875$$

Application 5

Soit le problème hyperbolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0,1[\,, t \in]0,T[\qquad (1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & 0 < t < T \\ u(x,0) = sin\pi x & 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$L_{tt}(.) = \frac{\partial^2 (.)}{\partial t^2} \quad , \quad L_{tt}^{-1}(.) = \int_0^t \left[\int_0^t u(.)dt\right] dt \,,$$

$$L_{xx}^{-1}(.) = \int_0^t \left[\int_0^t u(.)dx\right] dx \quad , \quad L_{xx}(.) = \frac{\partial^2 (.)}{\partial x^2}$$

L'équation (1) devient

$$L_{tt}(u) = 9L_{xx}(u)$$

On applique l'opérateur inverse L_{tt}^{-1} à l'équation précédente, on trouve

$$L_{tt}^{-1}L_{tt}(u) = 9L_{tt}^{-1}L_{xx}(u)$$

On cherche une solution sous la forme $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

$$L_{tt}^{-1}\left(L_{tt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\right) = 9L_{tt}^{-1}\left(L_{xx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n - u(x,0) - tu'(x,0) = 9\int_0^t \left[\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{0}^{\infty} u_n\, dt\right] dt$$

$$\begin{cases} u_0 = u(x,0) + tu'(x,0) = sin\pi x \\ \forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = 9L_{tt}^{-1}L_{xx}(u_n) \end{cases}$$

$$u_0 = u(x,0) + tu'(x,0) = sin\pi x$$

$$u_1 = 9\int_0^t \left[\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 dt\right] dt = -\frac{9}{2}\pi^2 t^2 sin\pi x$$

$$u_2 = 9\int_0^t \left[\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1 dt\right] dt = \frac{27}{8}(\pi t)^4 sin\pi x$$

$$u_3 = 9\int_0^t \left[\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2 dt\right] dt = -\frac{81}{80}(\pi t)^6 sin\pi x$$

.

.

.

$$u_n = \sum_0^\infty u_n = sin\pi x \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(3\pi t)^{2n}}{(2n)!}$$

Nous savons que

$$\cos(3\pi t) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(3\pi t)^{2n}}{(2n)!}$$

Alors la solution de ce problème est $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(3\pi t)$

1.2.6 Convergence de la méthode d'Adomian

Soit l'équation fonctionelle

$$u = f + N(u) \qquad (1)$$

N est un opérateur nonlinéaire

$$N(u) = \sum_{i=0}^n A_i$$

f est une fonction connue

l'equation (1) s'appelle la forme canonique

Nous savons que la méthode décompositionnelle consiste a chercher

la solution u sous la forme $u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$

alors on a $u = f + N(u)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + \sum_{i=0}^{\infty} A_i \quad , \quad \begin{cases} u_0 = f \\ u_1 = A_0 \\ u_2 = A_1 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ u_{n+1} = A_n \end{cases}$$

on deduit de cette formule que $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} A_i$ donc

si $\sum_{i=0}^{n} A_i < +\infty$ alors $\sum_{i=0}^{n} u_i < +\infty$ et reciproquement

la méthode d'adomian se ramène a la recherche d'une suite $(S_n)_n$,

Telque $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ avec

$$\begin{cases} S_0 = 0 \quad , \quad u_0 = f \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{et} \\ S_{n+1} = N(u_0 + S_n) \qquad n = 0,1,2 \ldots. \end{cases} \tag{2}$$

Théoréme

Si l'opérateur N est une appliquation contractante ($\|N\| \leq \delta < 1$)

Alor la suite $(S_n)_n$ *converge vers s*

où s est la solution de l'équation $S_{n+1} = N(u_0 + S_n)$

preuve

de la relation (2) on a

$$S_{n+1} - S = N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)$$
$$= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots)$$

$$\begin{aligned}
\|S_{n+1} - S\| &= \|N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)\| \\
&\leq \|N\|\|S_n - S\| \\
&< \delta\|S_n - S\| \\
&< \delta^2\|S_{n-1} - S\| \\
&< \delta^3\|S_{n-2} - S\| \\
&\;. \\
&\;. \\
&\;. \\
&< \delta^n\|S_1 - S\|
\end{aligned}$$

D'ou la convergence e la suite$(S_n)_{n_n}$.

Chapitre 02

1. Résolution numérique d'un probléme parabolique

2.1.1 Méthode de différences finies compactes

Ce chapitre est conscré à l'application de la méthode de différences finies compactes d'ordre six pour la recherche d'une solution approchée de l'équation de la chaleur avec une condition non locale.

2.1.2 Position de problème

Soit le problème

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0,1[\,, t \in]0,T[\quad (2.1) \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 1 \quad (2.2) \\ \left[\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]_{x=1} = u_x(1,t) = g(t) & 0 < t < T \quad (2.3) \\ \displaystyle\int_0^b u(x,t)dx = m(t) & 0 < t < T \quad (2.4) \end{cases}$$

où f, g, b et m sont connues et b appartient à l'intervalle]0,1[.

2.1.3 Discrétisation du problème

Tout d'abord , on s'interesse à la variable continue *x*.

On subdivise l'intrevalle [0,1] en N+1 points en formant une grille uniforme comme suit.

On pose

$$x_{i+1} - x_i = h_x = \frac{1}{N} \quad , \quad x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1$$

2.1.4 Méthode des différences finies compactes

On utilise la formule de Taylor pour la deuxième dérivée

$$u_i'' = \frac{\partial^2 u(x_i,t)}{\partial x^2} \quad , \quad u_i' = \frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t} \quad , \quad u_{i+1} = u(x_i + h) \quad , \quad u_{i-1} = u(x_i - h)$$

On développant suivant Taylor, on obtient

$$u_{i+1} = u(x_i + h) = u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' + 0(h^2) \qquad (2.5)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - h) = u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' + 0(h^2) \qquad (2.6)$$

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + h^2 u_i''$$

donc

$$u_i'' = \frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \qquad (2.7)$$

en utilisant le developpement de u'' suivant Taylor d'ordre 4, on a

$$u_{i+1}'' = u_i'' + u_i^{(3)} h + u_i^{(4)} \frac{h^2}{2} + u_i^{(5)} \frac{h^3}{3!} + u_i^{(6)} \frac{h^4}{4!} \qquad (2.8)$$

$$u_{i-1}'' = u_i'' - u_i^{(3)} h + u_i^{(4)} \frac{h^2}{2} - u_i^{(5)} \frac{h^3}{3!} + u_i^{(6)} \frac{h^4}{4!} \qquad (2.9)$$

$$u_{i+1}'' + u_{i-1}'' = 2u_i'' + 2u_i^{(4)} \frac{h^2}{2} + 2u_i^{(6)} \frac{h^4}{4!}$$

$$u_{i+1}'' + u_{i-1}'' - 2u_i'' = 2h^2 \left(\frac{u_i^{(4)}}{2} + u_i^{(6)} \frac{h^2}{4!} \right) \qquad (2.10)$$

en appliquant la formule (2.7) sur $u_i^{(6)}$ on trouve

$$u_i^{(6)} = \frac{1}{h^2}\left[u_{i-1}^{(4)} - 2u_i^{(4)} + u_{i+1}^{(4)}\right]$$

en substituant la valeur de $u_i^{(6)}$ dans la formule (2.10), on trouve

$$u_{i+1}'' + u_{i-1}'' - 2u_i'' = \frac{h^2}{12}\left[u_{i-1}^{(4)} + 10u_i^{(4)} + u_{i+1}^{(4)}\right].$$

Par analogie, on déduit la formule

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = \frac{h^2}{12}[u_{i-1}'' + 10u_i'' + u_{i+1}'']$$

$$\frac{h^2}{12}[u_{i-1}'' + 10u_i'' + u_{i+1}''] = u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} \qquad (2.11)$$

2^{éme} méthode

Pour obtenir la formule générale des différences finies compactes d'ordre six (2.11), on suit les étapes suivantes

1. Écrire la formule des différences finies compactes avec des coefficients inconnus

$$a_{-1}u''_{i-1} + a_0 u''_i + a_1 u''_{i+1} = \frac{b_{-1}u_{i-1} + b_0 u_i + b_1 u_{i+1}}{h^2}$$

2. Développer les deux membres de cette équation en série de Taylor au point x_i , puis on les regroupes par l'ordre de h et on obtient six équations (les coefficients de h^j , $j = -2, -1, \dots, 2, 3$ *sont nuls*)
3. résoudre le système de six équations et six inconnues.

En appliquant au problème (P) et en écrivant (2.11) aux points discrétisés, on trouve

$$\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_i,t)}{\partial x^2}, \qquad i = 1, 2, 3 \dots\dots\dots, N-1 \tag{2.12}$$

L'équation (2.11) est valable pour $i = 2, 3 \dots\dots\dots, N-2$

Pour i=1,

On utilise la formule (2.11) on trouve ,

$$\frac{h^2}{12}[u''_0 + 10u''_1 + u''_2] = u_0 - 2u_1 + u_2 \tag{2.13}$$

La dérivée seconde de la fonction $u(x,t)$ n'est pas definie au extrémités 0 et 1

C'est-à-dire u''_0 n'est pas connue.pour eliminer u''_0 en procéde comme suit.

D'aprés la formule (2.7) et la formule (2.11) on a

$$u''_1 = \frac{1}{h^2}(u_0 - 2u_1 + u_2) \quad \text{d'où} \quad u''_1 = \frac{1}{12}[u''_0 + 10u''_1 + u''_2]$$

$$u''_2 = \frac{1}{h^2}(u_1 - 2u_2 + u_3) \quad \text{d'où} \quad u''_2 = \frac{1}{12}[u''_1 + 10u''_2 + u''_3]$$

$$u''_3 = \frac{1}{h^2}(u_2 - 2u_3 + u_4) \quad \text{d'où} \quad u''_3 = \frac{1}{12}[u''_2 + 10u''_3 + u''_4]$$

$$u_1'' - 2u_2'' + u_3'' = \frac{1}{12}[u_0'' + 8u_1'' - 18u_2'' + 8u_3'' + u_4'']$$

D'où

$$u_0'' = 4u_1'' - 6u_2'' + 4u_3'' - u_4''$$

En remplace u_0'' dans la formule (2.13) on trouve finalement

$$\frac{h^2}{12}[14u_1'' - 5u_2'' + 4u_3'' - u_4''] = u_0 - 2u_1 + u_2 \tag{2.14}$$

On utilise la formule de Simpson $\int_0^b u(x,t)dx \approx \frac{b}{6}(u_0 + 4u_1 + u_2) = m(t)$

On a

$$u_0 = \frac{6m(t)}{b} - 4u_1 - u_2$$

En remplçant u_0 dans (2.14), on obtient

$$\frac{h^2}{12}[14u_1'' - 5u_2'' + 4u_3'' - u_4''] = \frac{6m(t)}{b} - 6u_1 \tag{2.15}$$

Pour i=N-1,

On utilise la formule (2.11) on trouve ,

$$\frac{h^2}{12}[u_{N-2}'' + 10u_{N-1}'' + u_N''] = u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N \tag{2.16}$$

La dérivée seconde u_N'' n'est définie,pour eliminer u_N'' en utilise la même façon

D'aprés la formule (2.7) et la formule (2.11) on a

$$u_{N-1}'' = \frac{1}{h^2}(u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N) \qquad \text{d'où} \qquad u_{N-1}'' = \frac{1}{12}[u_{N-2}'' + 10u_{N-1}'' + u_N'']$$

$$u_{N-2}'' = \frac{1}{h^2}(u_{N-3} - 2u_{N-2} + u_{N-1}) \qquad \text{d'où} \qquad u_{N-2}'' = \frac{1}{12}[u_{N-3}'' + 10u_{N-2}'' + u_{N-1}'']$$

$$u_{N-3}'' = \frac{1}{h^2}(u_{N-4} - 2u_{N-3} + u_{N-2}) \qquad \text{d'où} \qquad u_{N-3}'' = \frac{1}{12}[u_{N-4}'' + 10u_{N-3}'' + u_{N-2}'']$$

$$u_{N-1}'' - 2u_{N-2}'' + u_{N-3}'' = \frac{1}{12}[u_N'' + 8u_{N-1}'' - 18u_{N-2}'' + 8u_{N-3}'' + u_{N-4}'']$$

D'où

$$u''_N = 4u''_{N-1} - 6u''_{N-2} + 4u''_{N-3} - u''_{N-4}$$

En remplace u''_N dans la formule (2.16) on trouve

$$\frac{h^2}{12}[-u''_{N-4} + 4u''_{N-3} - 5u''_{N-2} + 14u''_{N-1}] = u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N \qquad (2.17)$$

u_N n'est pas définie ,c'est-à-dire que nous connaissons pas la valeur de u au point $x_i = 1$.

On a $\qquad u_N - u_{N-1} = hu'_N$

En substitue dans la formule (2.17) en trouve finalement

$$\frac{h^2}{12}[-u''_{N-4} + 4u''_{N-3} - 5u''_{N-2} + 14u''_{N-1}] = u_{N-2} - u_{N-1} + hu'_N \qquad (2.18)$$

On utilise la formule (2.11) aux points discrétisés x_i , i = 2 , 3 ,…….., N-2 et les deux formules (2.15)et (2.18) pour trouver le systéme (S).

$$(S)\begin{cases} \frac{h^2}{12}[14u''_1 - 5u''_2 + 4u''_3 - u''_4] = \frac{6m(t)}{b} - 6u_1 & \text{pour i} = 1 \\ \frac{h^2}{12}[u''_1 + 10u''_2 + u''_3] = u_1 - 2u_2 + u_3 & \text{pour i = 2} \\ \frac{h^2}{12}[u''_2 + 10u''_3 + u''_4] = u_2 - 2u_3 + u_4 & \text{pour i = 3} \\ \\ \frac{h^2}{12}[-u''_{N-4} + 4u''_{N-3} - 5u''_{N-2} + 14u''_{N-1}] = u_{N-2} - u_{N-1} + hu'_N & \text{pour } i = N-1 \end{cases}$$

2.1.5 Ecriture matricielle

Posons

$$U=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ . \\ . \\ u_{N-1} \end{pmatrix} \quad , \quad U''=\begin{pmatrix} u''_1 \\ u''_2 \\ \vdots \\ . \\ . \\ u''_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$A=\frac{h^2}{12}\begin{pmatrix} 14 & -5 & 4 & -1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & & . & . \\ . & & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ . & . & & . & & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & . & . & . & 0 & -1 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix} \quad , \quad H(t)=\begin{pmatrix} \frac{6m(t)}{b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ hu'_N \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & -2 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$AU''=MU+H(t) \tag{2.19}$$

Comme le problème (P) a une solution unique, la matrice A est inversible

En multipliant l'équation (2.16) par A^{-1}, on a

$$U''=A^{-1}MU+A^{-1}H(t)$$

Posons

$$A^{-1}M=B \text{ et } A^{-1}H(t)=R(t)$$

On obtient

$$U''=BU+R(t) \tag{2.20}$$

En substituant dans la formule (2.12) ,on obtient l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{dU}{dt} = BU + R(t) \tag{2.21}$$

On pose

$$F(X) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ . \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix} \quad , \quad U(0) = \begin{pmatrix} u(x_1,0) \\ u(x_2,0) \\ \vdots \\ . \\ u(x_{N-1},0) \end{pmatrix}$$

En tenant compte de la condition initiale $u(x,0) = f(x)$,

on trouve

$$U(0) = F(X)$$

posons

$$\mathrm{f}(t,U) = BU + R(t),$$

on trouve l'équation différentielle ordinaire ordinaire d'ordre 1

$$\mathrm{f}(t,U) = \frac{dU}{dt} \tag{2.22}$$

on résout la derniére équation (2.22) par la méthode de runge-kutta d'ordre 4

tout d'abord on calcule les vecteurs K_1, K_2, K_3, K_4 telque

$$\begin{cases} K_1 = h_t \mathrm{f}(t_0, U_0) \\ K_2 = h_t \mathrm{f}\left(t_0 + \frac{h_t}{2}, U_0 + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 = h_t \mathrm{f}\left(t_0 + \frac{h_t}{2}, U_0 + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 = h_t \mathrm{f}(t_0 + h_t, U_0 + K_3) \end{cases}$$

h_t est le pas de temps , $U_0 = U(t_0)$

On applique finalement la formule

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{6}\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$U(t + h_t) = U(t) + \frac{1}{6}\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

En genérale on utilise la formule suivante

$$U_{n+1} = U_n + \tfrac{1}{6}\left(K_1^{(n)} + 2\,K_2^{(n)} + 2\,K_3^{(n)} + K_4^{(n)}\right) \text{ or}$$

$$U(t + h_t) = U(t) + \frac{1}{6}\left(K_1^{(n)} + 2\,K_2^{(n)} + 2\,K_3^{(n)} + K_4^{(n)}\right).$$

2.1.6 Problémes d'applications

On va appliquer cette méthode sur quelques problémes tirés du probléme général (p) , ou la solution exacte connue avant .

probléme 1 Soit le probléme suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0,1[\,, t \in]0,T[\qquad (1) \\ u(x,0) = 0.5x^2 & 0 < x < 1 \qquad (2) \\ \left[\dfrac{\partial u(x,t)}{dx}\right]_{x=1} = u_x(1,t) = 1 & 0 < t < T \qquad (3) \\ \displaystyle\int_0^b u(x,t)dx = m(t) = 0.25t + \frac{1}{6}(0.25)^3 & 0 < t < T \qquad (4) \end{cases}$$

On utilise une discrétisation en neuf points c'est-à-dire en prend N = 8

On prend $h_x = h = \frac{1}{8}$, $h_t = \frac{1}{1000}$, $b = 0.25$

La matrice de systéme est

$$A = \frac{h^2}{12}\begin{pmatrix} 14 & -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{768}\begin{pmatrix} 14 & -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous savons que $A^{-1}M = B$ et $A^{-1}H(t) = R(t)$ alors

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{6m(t)}{b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ hu'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24m(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t + \frac{1}{16} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.125 \end{pmatrix}$$

On va calculer maitenant les vecteurs $K_1^{(0)}$, $K_2^{(0)}$, $K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$

$$K_1^{(0)} = h_t \mathrm{f}(\mathrm{t}_0, U_0) \qquad \text{telque} \qquad \mathrm{f}(t, U) = BU + R(t)$$

$$K_1^{(0)} = \frac{1}{1000}\mathrm{f}(0, U_0) = \frac{1}{1000}[BU_0 + R(0)]$$

$$\mathrm{t}_0 = 0 \ , \ U_0 = U(0) = \begin{pmatrix} u(x_1, 0) \\ u(x_2, 0) \\ \vdots \\ \\ . \\ u(x_{N-1}, 0) \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} {x_1}^2 \\ {x_2}^2 \\ {x_3}^2 \\ {x_4}^2 \\ {x_5}^2 \\ {x_6}^2 \\ {x_7}^2 \end{pmatrix}$$

$$K_2^{(0)} = h_t \,\mathrm{f}\left(\mathrm{t}_0 + \frac{h_t}{2}, U_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) = \frac{1}{1000}\mathrm{f}\left(0 + \frac{1}{2000}, U_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}(U_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}) + R\left(\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$K_3^{(0)} = h_t \mathrm{f}\left(\mathrm{t}_0 + \frac{h_t}{2}, U_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) = \frac{1}{1000}\mathrm{f}\left(0 + \frac{1}{2000}, U_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}(U_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}) + R\left(\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$K_4^{(0)} = h_t\ \mathrm{f}\left(\mathrm{t}_0 + h_t\ , U_0 + K_3^{(0)}\right) = \frac{1}{1000}\mathrm{f}\left(0 + \frac{1}{1000}, U_0 + K_3^{(0)}\right)$$

$$= \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}(U_0 + K_3^{(0)}) + R\left(\frac{1}{1000}\right)\right]$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{6}\left(K_1^{(n)} + 2\,K_2^{(n)} + 2\,K_3^{(n)} + K_4^{(n)}\right)$$

Pour $\mathrm{n} = 0$ c'est-à-dire $t = h_t$ on trouve

$$U_1 = U(h_t) = U_0 + \frac{1}{6}(K_1^{(0)} + 2\,K_2^{(0)} + 2\,K_3^{(0)} + K_4^{(0)})$$

$$\text{avec} \quad U_0 = \begin{pmatrix} 0.0078125 \\ 0.03125 \\ 0.0703125 \\ 0.125 \\ 0.1953125 \\ 0.28125 \\ 0.3828125 \end{pmatrix}$$

Le vecteur U_1 represente la température aux points $x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{2}{8}, \dots, x_7 = \frac{7}{8}$ a l'instant t=$h_t = \frac{1}{1000}$

pour $\mathrm{n} = 1$ c'est-à-dire $\mathrm{t} = 2h_t$ on trouve

$$U_2 = U(2h_t) = U(h_t) + \frac{1}{6}(K_1^{(1)} + 2\,K_2^{(1)} + 2\,K_3^{(1)} + K_4^{(1)})$$

$$K_1^{(1)} = h_t \mathrm{f}(h_t, U_1) \quad \text{tel que} \quad \mathrm{f}(t, U) = BU + R(t)$$

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{1000}\mathrm{f}\left(\frac{1}{1000}, U_1\right) = \frac{1}{1000}\left(BU_1 + R\left(\frac{1}{1000}\right)\right)$$

$$K_2^{(1)} = h_t\ \mathrm{f}\left(h_t + \frac{h_t}{2}, U_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2}\right) = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2}\right) + R\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$K_3^{(1)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2}\right) + R\left(\frac{3}{2000}\right)\right]$$

$$K_4^{(1)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_1 + K_3^{(1)}\right) + R\left(\frac{2}{1000}\right)\right]$$

$$U_2 = U_1 + \frac{1}{6}(K_1^{(1)} \; + 2\, K_2^{(1)} \; + 2\, K_3^{(1)} \; + \; K_4^{(1)})$$

Le vecteur $\boldsymbol{U_2}$ ***represente la température aux points*** $\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{2}{8}, \dots, x_7 = \frac{7}{8}}$ ***au moment t*** $\boldsymbol{=2h_t = \frac{2}{1000}}$

pour $n = 2$ c'est-à-dire $t = 3h_t$ on trouve

$$U_3 = U(3h_t) = U(2h_t) + \frac{1}{6}(K_1^{(2)} + 2\, K_2^{(2)} + 2\, K_3^{(2)} + K_4^{(2)})$$

$$U_3 = U_2 + \frac{1}{6}(K_1^{(2)} + 2K_2^{(2)} + 2K_3^{(2)} + K_4^{(2)})$$

$$K_1^{(2)} = h_t\ \mathrm{f}(2h_t, U_2) = \frac{1}{1000}\mathrm{f}\left(\frac{2}{1000}, U_2\right) = \frac{1}{1000}\left(BU_2 + R\left(\frac{2}{1000}\right)\right)$$

$$K_2^{(2)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_2 + \frac{K_1^{(2)}}{2}\right) + R\left(\frac{2}{1000} + \frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$K_3^{(2)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_2 + \frac{K_2^{(2)}}{2}\right) + R\left(\frac{5}{2000}\right)\right]$$

$$K_4^{(2)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_2 + K_3^{(2)}\right) + R\left(\frac{2}{1000} + \frac{1}{1000}\right)\right]$$

$$K_4^{(2)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_2 + K_3^{(2)}\right) + R\left(\frac{3}{1000}\right)\right]$$

$$U_3 = U_2 + \frac{1}{6}(K_1^{(2)} + 2\, K_2^{(2)} \; + 2\, K_3^{(2)} + \; K_4^{(2)})$$

Le vecteur $\boldsymbol{U_3}$ ***represente la température aux points*** $\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{2}{8}, \dots, x_7 = \frac{7}{8}}$ ***au moment t=*** $\boldsymbol{3h_t = \frac{3}{1000}}$

De la même manière on trouve U_4 , U_5 , U_6 , et ainsi de suite .

Résolution de problème précedent en ulilisant une nouvelle dicrétisation

Prenant $N = 6$, $h = \frac{1}{6}$, $h_t = \frac{1}{1000}$, $m(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{162}$

la solution explicite de problème est $\boldsymbol{u(x,t) = 0.5x^2 + t}$

$$A = \frac{h^2}{12}\begin{pmatrix} 14 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 14 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{12x36}\begin{pmatrix} 14 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{6m(t)}{b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t + \frac{1}{9} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.125 \end{pmatrix} \quad , \quad R(t) = A^{-1}H \quad , \quad U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{72} \\ \frac{1}{18} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{25}{72} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.013889 \\ 0.055556 \\ 0.125 \\ 0.222222 \\ 0.347222 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \frac{1}{1000}\left(BU_0 + R(0)\right) \quad , \quad K_2 = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_0 + \frac{K_1}{2}\right) + R\left(\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$K_3 = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_0 + \frac{K_2}{2}\right) + R\left(\frac{1}{2000}\right)\right] \quad , \quad K_4 = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}(U_0 + K_3) + R\left(\frac{1}{1000}\right)\right]$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Pour $n = 0$ c'est-à-dire $t = h_t$ on trouve

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{72} \\ \frac{1}{18} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{25}{72} \end{pmatrix} + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

U_1 represente la température aux points $x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{6}, \dots, x_7 = \frac{5}{6}$ a l'instant t=$h_t = \frac{1}{1000}$

problème 2

Maintenant on va traiter ce probléme extrait du probléme général (P) .

soit les données de probléme suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0,1[\,, t \in]0, T[& (1) \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 1 & (2) \\ \left[\dfrac{du(x,t)}{dx}\right]_{x=1} = u_x(1,t) = g(t) & 0 < t < T & (3) \\ \displaystyle\int_0^b u(x,t)dx = m(t) & 0 < t < T & (4) \end{cases}$$

$$f(x) = sin\pi x \quad , \quad g(t) = -\pi e^{-\pi t^2} \quad , \quad m(t) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) e^{-\pi t^2}$$

La solution explicite de probléme est $u(x,t) = sin(\pi x) e^{-\pi t^2}$

En prend $N = 8$, $h = \frac{1}{8}$, $h_t = \frac{1}{1000}$, $b = 0.25$

$$U_0 = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \end{pmatrix} \quad , \quad H(t) = \begin{pmatrix} \frac{6m(t)}{b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ hu'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24m(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ hg(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{\pi}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1)e^{-\pi t^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{8}\pi e^{-\pi t^2} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de systéme est

$$A = \frac{h^2}{12}\begin{pmatrix} 14 & -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{768}\begin{pmatrix} 14 & -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix}$$

Calcul de la matrice B et de vecteur $R(t)$ telque $A^{-1}M = B$ et $A^{-1}H(t) = R(t)$

Maintenant en va calculer les vecteurs $K_1^{(n)}$, $K_2^{(n)}$, $K_3^{(n)}, K_4^{(n)}$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{6}(K_1^{(n)} + 2K_2^{(n)} + 2K_3^{(n)} + K_4^{(n)})$$

Pour $n = 0$ on trouve

$$U_1 = U(h_t) = U_0 + \frac{1}{6}(K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)})$$

En commence par le calcul des vecteurs $K_1^{(0)}$, $K_2^{(0)}$, $K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$

$$K_1^{(0)} = \frac{1}{1000}(BU_0 + R(0))$$

$$K_2^{(0)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) + R\left(\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$K_3^{(0)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) + R\left(\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$K_4^{(0)} = \frac{1}{1000}\left[B\left(U_0 + K_3^{(0)}\right) + R\left(\frac{1}{1000}\right)\right]$$

$$U_1 = U(h_t) = U_0 + \frac{1}{6}(K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)}) \quad \text{avec} \quad U_0 = \begin{pmatrix} 0.3826834324 \\ 0.7071067812 \\ 0.9238795325 \\ 1 \\ 0.9238795325 \\ 0.7071067812 \\ 0.3826834324 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\boldsymbol{U_1}$ represente la température aux points $\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{2}{8}, \dots, x_7 = \frac{7}{8}}$ au moment t=$\boldsymbol{h_t}$

Résolution du problème précèdent en utilisant une nouvelle discrétisation

En prend $N = 10 \; c'est - \text{à} - dire \quad h_x = \frac{1}{10} \quad , \quad h_t = \frac{1}{1000} \quad , \quad b = \frac{2}{10}$

$$A = \frac{\boldsymbol{h_x}^2}{12}\begin{pmatrix} 14 & -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{600} & -\frac{1}{240} & \frac{1}{300} & -\frac{1}{1200} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1200} & \frac{1}{120} & \frac{1}{1200} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1200} & \frac{1}{120} & \frac{1}{1200} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1200} & \frac{1}{120} & \frac{1}{1200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1200} & \frac{1}{120} & \frac{1}{1200} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1200} & \frac{1}{120} & \frac{1}{1200} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1200} & \frac{1}{120} & \frac{1}{1200} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1200} & \frac{1}{120} & \frac{1}{1200} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{1200} & \frac{1}{300} & -\frac{1}{240} & \frac{7}{600} \end{pmatrix}$$

Calcul des matrices B et $R(t)$ telque $A^{-1}M = B$ et $A^{-1}H(t) = R(t)$

$$u_0 = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{4\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{6\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{7\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{8\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) \end{pmatrix} \quad , \quad H(t) = \begin{pmatrix} \frac{30}{\pi}\left(1-cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) e^{(-\pi)t^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(-\frac{\pi}{10}\right) e^{(-\pi)t^2} \end{pmatrix}$$

$$K_1^{(0)} = \frac{1}{1000}\left(BU_0 + R(0)\right) \quad , \quad K_2^{(0)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) + R\left(\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$K_3^{(0)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) + R\left(\frac{1}{2000}\right)\right] \quad , \quad K_4^{(0)} = \frac{1}{1000}\left[\mathrm{B}\left(U_0 + K_3^{(0)}\right) + R\left(\frac{1}{1000}\right)\right]$$

$$U_1 = U(h_t) = U_0 + \frac{1}{6}(K_1^{(0)} + 2\,K_2^{(0)} + 2\,K_3^{(0)} + K_4^{(0)})$$

Remarque

En va voir aux troisiéme chapitre, un programme de c++ qui a été réalisépour trouver une solution approchée aux problèmes précédents par la méthode de Runge-kutta.

2. Résolution d'un problème avec conditions aux bords non locales la méthode de G. Adomian

2.2.1 Résolution de problèmes paraboliques

Problème 1

Soit le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) & u(x,t) \in \,]0,1[\, \times \,]0,T[\qquad (1) \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = \displaystyle\int_0^1 \alpha(x,t)u(x,t)\,dx + g_1(t) & 0 < \mathrm{t} < \mathrm{T} \\ u(1,t) = \displaystyle\int_0^1 \beta(x,t)u(x,t)\,dx + g_2(t) & 0 < \mathrm{t} < \mathrm{T} \end{cases}$$

Ou α , β , q , g_1 , g_2 sont des fonctions connues.

On cherche la solution sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$L_t(u) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt \quad , \; L_{xx}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

L'equation (1) devient $L_t(u) = L_{xx}(u) + q(x,t)$

On applique l'opérateur inverse L_t^{-1} à l'équation (1), on trouve

$$L_t^{-1}L_t(u) = L_t^{-1}L_{xx}(u)L_t^{-1}q(x,t)$$

$$u(x,t) - u(x,0) = L_t^{-1}L_{xx}(u) + L_t^{-1}q(x,t)$$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u(x,0) + L_t^{-1}q(x,t) + L_t^{-1}L_{xx}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)$$

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1}\big(q(x,t)\big) \\ u_1(x,t) = L_t^{-1}L_{xx}(u_0(x,t)) \\ \\ u_{n+1}(x,t) = L_t^{-1}[L_{xx}(u_n)] \end{cases}$$

Application 1

En prenant ,

$$f(x) = x^2 \quad , \quad q(x) = -\frac{2(x^2+t+1)}{(t+1)^3} \quad , \quad g_1(x) = \frac{1}{4(t+1)^2}$$

$$g_2(x) = \frac{3}{4(t+1)^2} \quad , \quad \alpha(x,t) = \beta(x,t) = x$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{2(x^2+t+1)}{(t+1)^3} & x \in]0,1[\times]0,T[\quad (1) \\ u(x,0) = x^2 & 0 < x < 1 \quad (2) \\ u(0,t) = \displaystyle\int_0^1 xu(x,t)dx + \frac{1}{4(t+1)^2} & 0 < t < T \quad (3) \\ u(1,t) = \displaystyle\int_0^1 xu(x,t)dx + \frac{3}{4(t+1)^2} & 0 < t < T \quad (4) \end{cases}$$

On applique l'opérateur inverse L_t^{-1} à l'équation (1)

$$L_t(u) = \frac{\partial u}{\partial t} \; , L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt \; , L_{xx}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

on trouve

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u(x,0) + L_t^{-1} q(x,t) + L_t^{-1} L_{xx}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)$$

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1}[q(x,t)] \\ u_0(x,t) = x^2 + \displaystyle\int_0^t \frac{2(x^2+t+1)}{(t+1)^3} dt = \frac{x^2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t+1} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(x,t) = L_t^{-1} L_{xx}\big(u_0(x,t)\big) \\ u_1(x,t) = \displaystyle\int_0^t L_{xx}\big(u_0(x,t)\big)dt \\ u_1(x,t) = \displaystyle\int_0^t \frac{d^2}{dx^2}\big(u_0(x,t)\big)dt \\ u_1(x,t) = \displaystyle\int_0^t \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t+1} - 2\right)dt = \frac{2}{t+1} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2(x,t) = L_t^{-1} L_{xx}\big(u_1(x,t)\big) \\ u_2(x,t) = \displaystyle\int_0^t \frac{d^2}{dx^2}\big(u_1(x,t)\big)dt \\ u_2(x,t) = \displaystyle\int_0^t \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{2}{t+1} - 2\right)dt \ = 0 \end{cases}$$

Alors $u_n(x,t) = \ 0$ pour $n \geq 2$

La solution de ce problème est

$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + \cdots + u_n(x,t)$

$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) = \dfrac{x^2}{(t+1)^2}$

On peut vérifier facilement que la solution satisfait les conditions non locales (3),(4).

Application 2

Soit le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0,1[\,, t \in]0,T[\qquad (1) \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 1 \\ \left[\dfrac{du(x,t)}{dx}\right]_{x=1} = u_x(1,t) = g(t) & 0 < t < T \\ \displaystyle\int_0^b u(x,t)dx = m(t) & 0 < t < T \end{cases}$$

$$g(t) = 1 \;,\; f(x) = 0.5x^2 \;,\; b = 0.25 \;,\; m(t) = 0.25t + \tfrac{1}{6}(0.25)^3$$

où b est un réel appartient à l'intervalle$]0,1[$.

En posant

$$L_t(u) = \frac{du}{dt} \quad , \quad L_t^{-1}(.) = \int_0^t u(x,t)dt \quad , \quad L_{xx}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;,$$

l'equation (1) devient

$$L_t(u) = L_{xx}(u)$$

On applique l'opérateur inverse L_t^{-1} et on trouve

$$L_t^{-1}(L_t(u)) = L_t^{-1}(L_{xx}(u))$$

$$u(x,t) - u(x,0) = \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u(x,t)]\right] dt$$

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u(x,t)]\right] dt$$

Cherchons la solution sous la forme $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_i$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u(x,0) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{i=0}^{n} u_i\right]\right] dt$$

$$u(x,0) = 0.5x^2$$

$$\begin{cases} u_0 = u(x,0) = 0.5x^2 \\ u_1 = \displaystyle\int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u_0]\right] dt = t \\ u_2 = \displaystyle\int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u_1]\right] dt = 0 \\ u_3 = 0 \\ \quad\vdots \\ u_n = 0 \end{cases}$$

$d'ou$

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = 0.5x^2 + t$$

Application 3

Soit le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in \,]0,1[\,, t \in \,]0,T[& (1) \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 1 \\ \left[\dfrac{du(x,t)}{dx}\right]_{x=1} = u_x(1,t) & 0 < t < T \\ \displaystyle\int_0^b u(x,t)dx = m(t) & 0 < t < T \end{cases}$$

$$f(x) = e^x \,, \qquad g(t) = e^{t+1} \quad b = 0.5 \quad , \qquad m(t) = e^t(\sqrt{e} - 1)$$

En posant

$$L_t(u) = \frac{du}{dt} \quad , \quad L_t^{-1}(.) = \int_0^t u(x,t)dt \quad , \quad L_{xx}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,,$$

De la même façon que de l'exemple precédent on trouve

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u(x,0) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{i=0}^{n} u_i\right]\right] dt$$

$$u(x,0) = e^x$$

$$\begin{cases} u_0 = u(x,0) = e^x \\ u_1 = \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u_0]\right] dt = te^x \\ u_2 = \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u_1]\right] dt = \frac{t^2}{2} e^x \\ u_3 = \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u_2]\right] dt = \frac{t^3}{2.3} e^x \\ \quad . \\ u_4 = \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u_3]\right] dt = \frac{t^4}{2.3.4} e^x \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ u_n = \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u_4]\right] dt = \frac{t^n}{2.3.4 \dots n} e^x \end{cases}$$

la solution $u(\mathrm{x,t})$ est sous la forme $u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$

or

$$u(x,t) = e^x \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots\right)$$

D'où $u(x,t) = e^{x+t}$

chapitre 03

Mise en œuvre informatique

Dans ce chapitre, nous donnons des organigrammes pour les deux méthodes, les solvers par c++ builder et les résultats obtenus.

3.1 Algorithme de la méthode des différences finies

3.1.1 Description du programme principal

Le programme principal est réalisé pour faire le calcul des différents termes des formules dans les problèmes d'applications du chapitre 02, à savoir

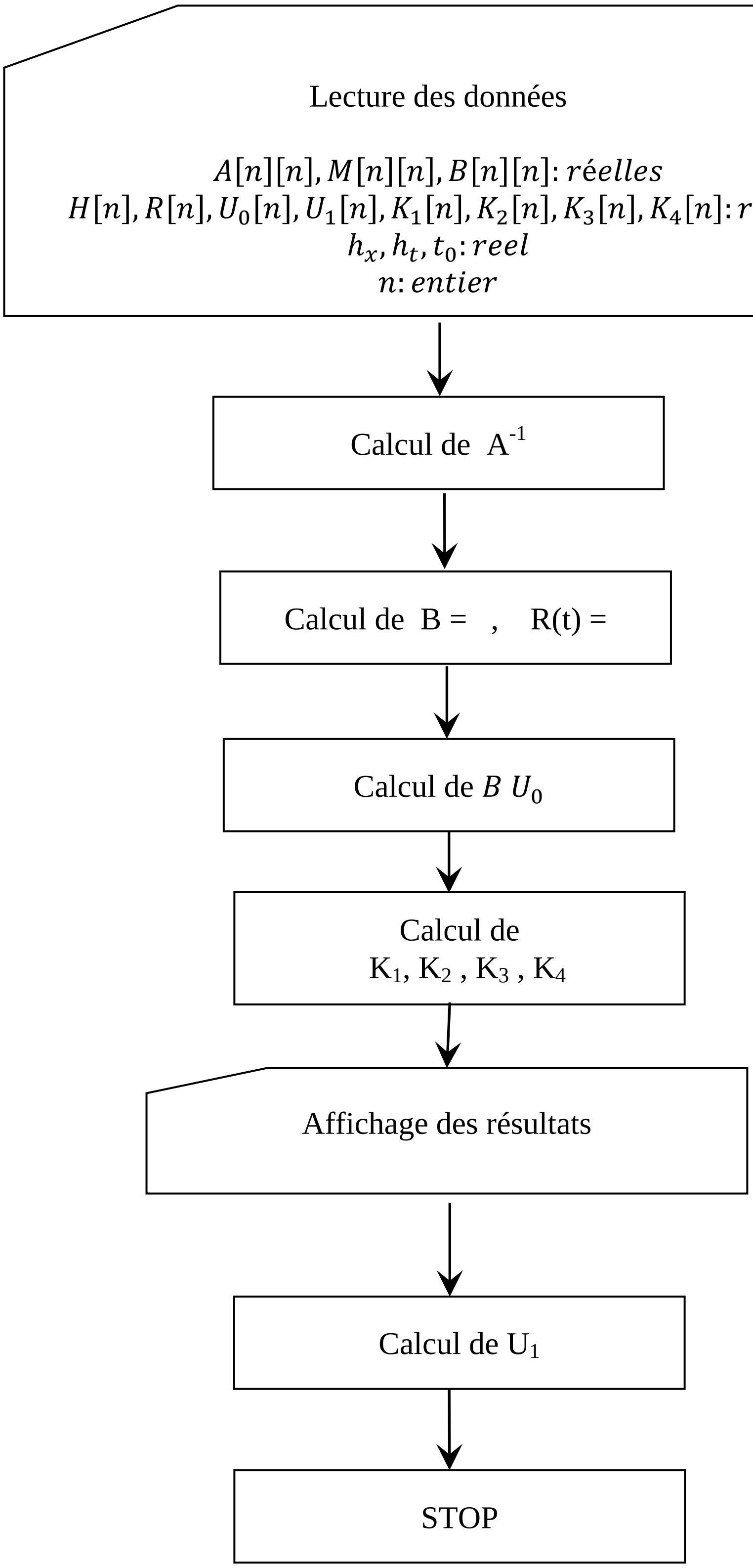
$$A^{-1}\ ,\ \ A^{-1}M = B\ \ ,\ \ A^{-1}H(t) = R(t)$$

$$K_1 = h_t\big(BU_0 + R(0)\big) \qquad , \qquad K_2 = h_t\left[\mathrm{B}\left(U_0 + \frac{K_1}{2}\right) + R\left(\frac{h_t}{2}\right)\right]$$

$$K_3 = h_t\left[\mathrm{B}\left(U_0 + \frac{K_2}{2}\right) + R\left(\frac{h_t}{2}\right)\right] \quad , \quad K_4 = h_t[\mathrm{B}(U_0 + K_3) + R(h_t)]$$

$$U_1 = U_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2\,K_2 + 2\,K_3 + K_4)$$

3.1.2 Organigramme



3.1.3 Application au problème 1chap. 02

■$En \ prenant \ \ N = 7 \ (\ huit \ points)$

$$h_x = \frac{1}{8} \quad , \quad t_0 = 0 \quad , \quad h_t = \frac{1}{1000} \quad , \quad u_0 = \begin{pmatrix} 0.0078125 \\ 0.03125 \\ 0.0703125 \\ 0.125 \\ 0.1953125 \\ 0.28125 \\ 0.3828125 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.018229 & -0.00651 & 0.005208 & -0.001302 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001302 & 0.013021 & 0.001302 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001302 & 0.013021 & 0.001302 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001302 & 0.013021 & 0.001302 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001302 & 0.013021 & 0.001302 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001302 & 0.013021 & 0.001302 \\ 0 & 0 & 0 & -0.001302 & 0.005208 & -0.00651 & 0.018229 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 52.795317 & 28.874165 & -24.78724 & 7.836008 & -0.788981 & 0.076172 & -0.005441 \\ -5.332992 & 74.665984 & -5.332992 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.538699 & -7.542197 & 78.121256 & -7.836008 & 0.788981 & -0.076172 & 0.005441 \\ -0.05441 & 0.761778 & -7.890418 & 78.366098 & -7.890418 & 0.761778 & -0.05441 \\ 0.005441 & -0.076172 & 0.788981 & -7.836008 & 78.121256 & -7.542197 & 0.538699 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.332992 & 74.665984 & -5.332992 \\ -0.005441 & 0.076172 & -0.788981 & 7.836008 & -24.78724 & 28.874165 & 52.795317 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -287.897737 & -82.53557 & 86.284653 & -41.248237 & 9.490142 & -0.946766 & 0.081613 \\ 106.663936 & -154.66496 & 85.331968 & -5.332992 & 0 & 0 & 0 \\ -10.774391 & 93.20565 & -171.620717 & 94.582253 & -9.490142 & 0.946766 & -0.081613 \\ 1.088238 & -9.413974 & 94.908712 & -172.513032 & 94.908712 & -9.468384 & 0.816188 \\ -0.108818 & 0.941325 & -9.490142 & 94.582253 & -171.620717 & 93.744349 & -8.080896 \\ 0 & 0 & 0 & -5.332992 & 85.331968 & -159.997952 & 79.998976 \\ 0.108818 & -0.941325 & 9.490142 & -41.248237 & 86.284653 & -29.740253 & -23.921152 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}H(0)=R(0)=\begin{pmatrix} 3.299027 \\ -0.333312 \\ 0.034349 \\ -0.010202 \\ 0.067677 \\ -0.666624 \\ 6.599075 \end{pmatrix} \quad , \quad BU_0=\begin{pmatrix} -2.29907 \\ 1.333312 \\ 0.965694 \\ 1.009777 \\ 0.936531 \\ 1.62496 \\ -5.186611 \end{pmatrix}$$

$$K_1=\begin{pmatrix} 0.000999 \\ 0.000999 \\ 0.001000 \\ 0.000999 \\ 0.001004 \\ 0.000958 \\ 0.001412 \end{pmatrix}, K_2=\begin{pmatrix} 0.001158 \\ 0.000984 \\ 0.001001 \\ 0.001000 \\ 0.001000 \\ 0.000978 \\ 0.001408 \end{pmatrix}, K_3=\begin{pmatrix} 0.001158 \\ 0.000993 \\ 0.000999 \\ 0.001000 \\ 0.001001 \\ 0.000976 \\ 0.001407 \end{pmatrix}, K_4=\begin{pmatrix} 0.001287 \\ 0.000983 \\ 0.001001 \\ 0.001000 \\ 0.000998 \\ 0.000994 \\ 0.001403 \end{pmatrix}$$

Solution après l'exécution de programme

$$U_1=\begin{pmatrix} 0.008957 \\ 0.03224 \\ 0.0713134 \\ 0.126 \\ 0.1963135 \\ 0.2822271 \\ 0.384221 \end{pmatrix}$$

U_1 représente la température aux points $x_1=\frac{1}{8}, x_2=\frac{2}{8}, \dots, x_7=\frac{7}{8}$ au moment t=$h_t=\frac{1}{1000}$

3.1.4 Comparaison avec la solution exacte

La solution exacte de probleme est : $\boldsymbol{u(x,t) = 0.5x^2 + t}$

l'erreur absolue est $|u(x,t) - u_1(x,t)|$, $u_1(x,t)$*est la solution approchée* .

valeurs de x	valeurs approchées	valeurs exactes	erreurs absolues
$x = \frac{1}{8}$	0.008957	0.0088125	1.45 E-4
$x = \frac{2}{8}$	0.03224	0.03225	1 E − 4
$x = \frac{3}{8}$	0.0713132	0.0713125	7 E − 7
$x = \frac{4}{8}$	0.126	0.126	0.000000
$x = \frac{5}{8}$	0.1963135	0.196312	1.5E-6
$x = \frac{6}{8}$	0.2822271	0.28225	2.29E-5
$x = \frac{7}{8}$	0.384221	0.383812	4.09 E − 4

Conclusion

On remarque que la solution approchée est une bonne approximation de la solution exacte .

3.1.5 Nouvelle discrétisation

■ $Pour\ N = 5$ (six $points$)

$$h_x = \frac{1}{6}\ ,\ h_t = \frac{1}{1000}\ ,H(t) = \begin{pmatrix} 6t+\frac{1}{9} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.125 \end{pmatrix},U_0 = \begin{pmatrix} 0.013889 \\ 0.055556 \\ 0.125 \\ 0.222222 \\ 0.347222 \end{pmatrix},M = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{12\times 36}\begin{pmatrix} 14 & -5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.032407 & -0.011574 & 0.009259 & -0.002315 & 0 \\ 0.002315 & 0.023148 & 0.002315 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002315 & 0.023148 & 0.002315 & 0 \\ 0 & 0 & 0.002315 & 0.023148 & 0.002315 \\ 0 & -0.002315 & 0.009259 & -0.011574 & 0.032407 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 29.700263 & 16.200249 & -13.800069 & 4.200381 & -0.300055 \\ -3.000291 & 42.000186 & -3.000291 & 0 & 0 \\ 0.300055 & -4.200381 & 43.800387 & -4.200381 & 0.300055 \\ 0 & 0 & -3.000291 & 42.000186 & -3.000291 \\ -0.300055 & 4.200381 & -13.800069 & 16.200249 & 29.700263 \end{pmatrix},R(0) = \begin{pmatrix} -17.437593 \\ 6.666881 \\ -1.2293 \\ 5.62506 \\ -1.020756 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -162.001329 & -46.200567 & 48.000768 & -22.500886 & 4.500436 \\ 60.001932 & -87.000663 & 48.000768 & -3.000291 & 0 \\ -6.000711 & 52.201149 & -96.001536 & 52.501204 & -4.500436 \\ 0 & -3.000291 & 48.000768 & -90.000954 & 45.000477 \\ 6.000711 & -22.200831 & 48.000768 & -16.500304 & -13.500014 \end{pmatrix}\ ,\ BU_0 = \begin{pmatrix} -2.254201 \\ 1.333323 \\ 0.920823 \\ 1.458375 \\ -3.504182 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0.0010083 \\ 0.00099995 \\ 0.0009916 \\ 0.00108333 \\ 0.0001750 \end{pmatrix},K_2 = \begin{pmatrix} 0.0010046 \\ 0.0009998 \\ 0.0009961 \\ 0.0010608 \\ 0.0001797 \end{pmatrix},K_3 = \begin{pmatrix} 0.00100532 \\ 0.00099992 \\ 0.00099528 \\ 0.00106121 \\ 0.00017997 \end{pmatrix},K_4 = \begin{pmatrix} 0.00100215 \\ 0.00099998 \\ 0.00099903 \\ 0.00104063 \\ 0.00018487 \end{pmatrix}$$

$La\ solution\ aprés\ l'exécution\ de\ programme\ est$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0.014894 \\ 0.056555 \\ 0.125995 \\ 0.223283 \\ 0.3474018 \end{pmatrix}$$

3 .1 . 6 Comparaison avec la solution exacte

valeurs de x	valeurs approchées	valeurs exactes	erreurs absolues
$x = \frac{1}{6}$	0.014894	0.014888	6E -6
$x = \frac{2}{6}$	0.056555	0.056555	1E-7
$x = \frac{3}{6}$	0.125987	0.126	1.3E-5
$x = \frac{4}{6}$	0.223228	0.223222	6E-6
$x = \frac{5}{6}$	0.347401	0.348222	8.21E-4

Conclusion

.

On remarque que la solution approchée est une bonne approximation de la solution exacte .

3.1.7 Application au problème 02 du chap . 02

■ *en prenant N = 7 (huit points)*

$$h_x = \frac{1}{8} \quad , \quad h_t = \frac{1}{1000} \quad , \; t_0 = 0$$

$$f(x) = sin\pi x \quad , \quad g(x) = -\pi e^{-\pi t^2} \quad , \quad m(t) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) e^{-\pi t^2}$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.38268343 \\ 0.70710678 \\ 0.92387953 \\ 1 \\ 0.92387953 \\ 0.70710678 \\ 0.38268343 \end{pmatrix} \quad , \quad H(0) = \begin{pmatrix} 2.23753937 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.39269908 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.018229 & -0.00651 & 0.005208 & -0.001302 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001302 & 0.013021 & 0.001302 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001302 & 0.013021 & 0.001302 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001302 & 0.013021 & 0.001302 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001302 & 0.013021 & 0.001302 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001302 & 0.013021 & 0.001302 \\ 0 & 0 & 0 & -0.001302 & 0.005208 & -0.00651 & 0.018229 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 52.795317 & 28.874165 & -24.78724 & 7.836008 & -0.788981 & 0.076172 & -0.005441 \\ -5.332992 & 74.665984 & -5.332992 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.538699 & -7.542197 & 78.121256 & -7.836008 & 0.788981 & -0.076172 & 0.005441 \\ -0.05441 & 0.761778 & -7.890418 & 78.366098 & -7.890418 & 0.761778 & -0.05441 \\ 0.005441 & -0.076172 & 0.788981 & -7.836008 & 78.121256 & -7.542197 & 0.538699 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.332992 & 74.665984 & -5.332992 \\ -0.005441 & 0.076172 & -0.788981 & 7.836008 & -24.78724 & 28.874165 & 52.795317 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -287.897737 & -82.53557 & 86.284653 & -41.248237 & 9.490142 & -0.946766 & 0.081613 \\ 106.663936 & -154.66496 & 85.331968 & -5.332992 & 0 & 0 & 0 \\ -10.774391 & 93.20565 & -171.620717 & 94.582253 & -9.490142 & 0.946766 & -0.081613 \\ 1.088238 & -9.413974 & 94.908712 & -172.513032 & 94.908712 & -9.468384 & 0.816188 \\ -0.108818 & 0.941325 & -9.490142 & 94.582253 & -171.620717 & 93.744349 & -8.080896 \\ 0 & 0 & 0 & -5.332992 & 85.331968 & -159.997952 & 79.998976 \\ 0.108818 & -0.941325 & 9.490142 & -41.248237 & 86.284653 & -29.740253 & -23.921152 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}H(0) = R(0) = \begin{pmatrix} 118.133718 \\ -11.932778 \\ 1.203223 \\ -0.100377 \\ -0.199373 \\ 2.094261 \\ -20.744842 \end{pmatrix} \quad , \quad BU_0 = \begin{pmatrix} -121.937252 \\ 4.957346 \\ -10.320963 \\ -9.767651 \\ -8.923548 \\ -9.017888 \\ 16.428398 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} -0.00126242 \\ -0.00723214 \\ -0.00909149 \\ -0.00987375 \\ -0.0090919 \\ -0.00722813 \\ -0.00130223 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} -0.00140787 \\ -0.00706116 \\ -0.00907279 \\ -0.00981656 \\ -0.00907102 \\ -0.00707748 \\ -0.00126969 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} -0.0014346 \\ -0.00707786 \\ -0.00906345 \\ -0.00982215 \\ -0.00906330 \\ -0.0070867 \\ -0.00127969 \end{pmatrix}, K_4 = \begin{pmatrix} -0.00161572 \\ -0.00692116 \\ -0.00903894 \\ -0.00976792 \\ -0.00903735 \\ -0.00694413 \\ -0.00125492 \end{pmatrix}$$

$la\ Solution\ aprés\ l'exécution\ de\ programme$

$$U_1 = U_0 + \begin{pmatrix} 0.00262979 \\ -0.00731041 \\ -0.00905533 \\ -0.00982058 \\ -0.00906636 \\ -0.00708349 \\ -0.00127586 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.38125625 \\ 0.70003473 \\ 0.91481232 \\ 0.99017977 \\ 0.9148131 \\ 0.70002329 \\ 0.38140744 \end{pmatrix}$$

U_1 represente la température aux points $x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{2}{8}, \dots, x_7 = \frac{7}{8}$ au moment t $=h_t = \frac{1}{1000}$

3 . 1 . 8 Comparaison avec la solution exacte

La solution exacte de problème est $\boldsymbol{u(x,t) = sin(\pi x)e^{-\pi t^2}}$

l'erreur absolue est $|u(x,t) - u_1(x,t)|$, $u_1(x,t)$ est la solution approchée

valeurs de x	valeurs apprchées	valeurs exactes	erreurs absolues
$x = \frac{1}{8}$	0.38125625	0.382682	$1.42E - 3$
$x = \frac{2}{8}$	0.70003473	0.707105	7.07E − 3
$x = \frac{3}{8}$	0.91481232	0.923877	9.06E − 3
$x = \frac{4}{8}$	0.99017977	0.999997	9.81E − 3
$x = \frac{5}{8}$	0.9148131	0.923877	9.06E − 3
$x = \frac{6}{8}$	0.70002329	0.707105	7.08E − 3
$x = \frac{7}{8}$	0.3814074	0.382682	1.27E − 3

3.1.9 Nouvelle discrétisation

■ *en prenant* $N = 10$ *(neuf points)*

$$h_x = \frac{1}{10}\ ,\ h_t = \frac{1}{1000}\ ,b = \frac{2}{10}\,,$$

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$u_0 = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{4\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{6\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{7\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{8\pi}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.30901699 \\ 0.58778525 \\ 0.80901699 \\ 0.95105652 \\ 1 \\ 0.95105652 \\ 0.80901699 \\ 0.58778525 \\ 0.30901699 \end{pmatrix} \quad , \quad H(0) = \begin{pmatrix} 1.823753 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.314159 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.011667 & -0.004167 & 0.003333 & -0.000833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.000833 & 0.008333 & 0.000833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000833 & 0.008333 & 0.000833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000833 & 0.008333 & 0.000833 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000833 & 0.008333 & 0.000833 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000833 & 0.008333 & 0.000833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000833 & 0.008333 & 0.000833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000833 & 0.008333 & 0.000833 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.000833 & 0.003333 & -0.004167 & 0.011667 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}M = B \quad \text{et} \quad A^{-1}H(t) = R(t)$$

$$B=\begin{pmatrix}
-449.820005 & -128.971340 & 134.819203 & -64.446581 & 14.838165 & -1.498341 & 0.151158 & -0.015077 & 0.001300 \\
166.652919 & -241.675242 & 133.334457 & -8.331370 & 0.000124 & -1.248243\cdot 10^{-5} & 1.259266\cdot 10^{-6} & -1.255927\cdot 10^{-7} & 1.082352\cdot 10^{-8} \\
-16.829175 & 145.633753 & -268.163772 & 147.790287 & -14.839402 & 1.498465 & -0.151170 & 0.015078 & -0.001300 \\
1.699468 & -14.706590 & 148.308652 & -269.623554 & 148.447335 & -14.990040 & 1.512243 & -0.150824 & 0.012998 \\
-0.171616 & 1.485120 & -14.976696 & 148.455914 & -269.688380 & 148.455914 & -14.976696 & 1.493698 & -0.128726 \\
0.017328 & -0.149958 & 1.512243 & -14.990040 & 148.447335 & -269.623554 & 148.308652 & -14.791538 & 1.274728 \\
-0.001733 & 0.014991 & -0.151170 & 1.498465 & -14.839402 & 147.790287 & -268.163772 & 146.474959 & -12.623145 \\
1.442992\cdot 10^{-8} & -1.248714\cdot 10^{-7} & 1.259266\cdot 10^{-6} & -1.248243\cdot 10^{-5} & 0.000124 & -8.331370 & 133.334457 & -250.005388 & 125.002189 \\
0.001732 & -0.014990 & 0.151158 & -1.498341 & 14.838165 & -64.446581 & 134.819203 & -46.481087 & -37.368740
\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}H(0) = R(0) = \begin{pmatrix} 150.441904 \\ -15.192132 \\ 1.534125 \\ -0.154652 \\ 0.012949 \\ 0.025108 \\ -0.264115 \\ 2.616993 \\ -25.915235 \end{pmatrix} , \quad BU_0 = \begin{pmatrix} -153.503803 \\ 9.391791 \\ -9.519376 \\ -9.232417 \\ -9.883159 \\ -9.411753 \\ -7.725378 \\ -8.375329 \\ 22.437384 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} -0.003062 \\ -0.0058 \\ -0.007984 \\ -0.009386 \\ -0.009869 \\ -0.009389 \\ -0.00796 \\ -0.00604 \\ -0.000684 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} -0.002302 \\ -0.005847 \\ -0.007937 \\ -0.009341 \\ -0.009821 \\ -0.009337 \\ -0.007956 \\ -0.00584 \\ -0.000631 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} -0.002468 \\ -0.005775 \\ -0.00795 \\ -0.009339 \\ -0.009821 \\ -0.009342 \\ -0.007939 \\ -0.00586 \\ -0.000654 \end{pmatrix}, K_4 = \begin{pmatrix} -0.00181 \\ -0.005798 \\ -0.007899 \\ -0.009295 \\ -0.009772 \\ -0.009291 \\ -0.007925 \\ -0.005675 \\ -0.000616 \end{pmatrix}$$

La solution aprés l'exécution de programme

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0.32992568 \\ 0.58132147 \\ 0.80104794 \\ 0.94172421 \\ 0.99017797 \\ 0.94171726 \\ 0.80107112 \\ 0.58193303 \\ 0.30837209 \end{pmatrix}$$

3 . 1 . 10 Comparaison avec la solution exacte

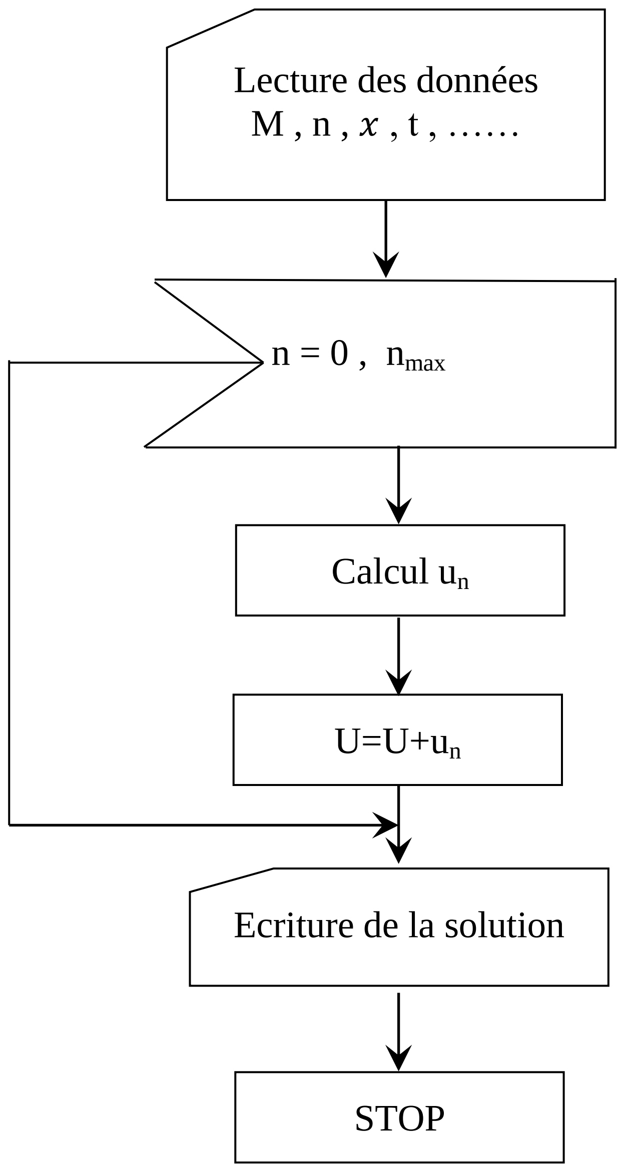
valeurs de x	valeurs approchées U_1	valeurs exacte u	erreurs absolues
$x = \frac{1}{10}$	0.306615	0.30901602	2.4E-3
$x = \frac{2}{10}$	0.581978	0.58778341	5.8E-3
$x = \frac{3}{10}$	0.801074	0.80901445	7.94E-3
$x = \frac{4}{10}$	0.941717	0.95105353	9.34E-3
$x = \frac{5}{10}$	0.990179	0.99999686	9.82 E-3
$x = \frac{6}{10}$	0.94171726	0.95105353	9.34 E-3
$x = \frac{7}{10}$	0.801071	0. 80901445	7.94 E-3
$x = \frac{8}{10}$	0.581932	0.58778341	5.85E-3
$x = \frac{9}{10}$	0.308372	0.30901602	6.45 E-4

3.2 Algorithme pour la méthode de décomposition d'Adomian

Description du programme principal

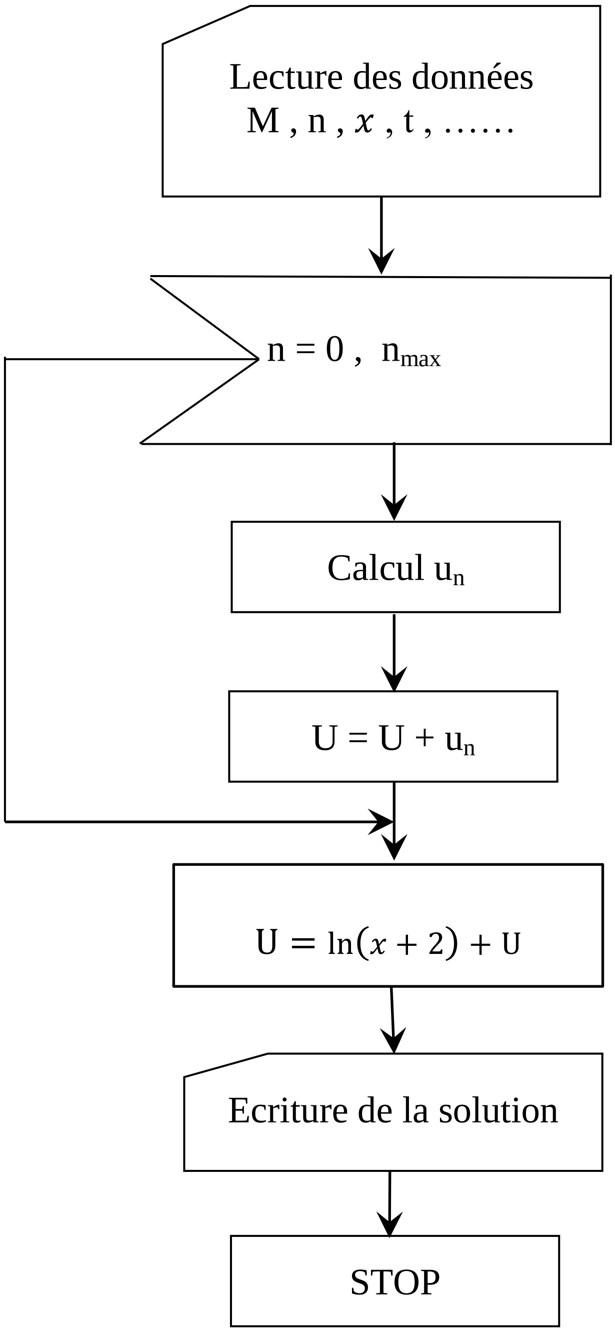
Le programme est conçu pour le calcul de la somme d'une série tronquée laquelle représente la valeur approchée de la solution du problème .

Organigramme



3.2.1 Application au problème 01 du chap . 1

$M = 5$, $t = 0.2$, $x = 0.5$, $u_n = \dfrac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)(x+2)^{n+1}}$, $u_M = \ln(x+2) + \sum_{n=0}^{4} u_n$



la solution après l'éxécution de programme est $u(x,t) = 0{,}99325180$

L'erreur absolue pour ce cas ($x = 0.5$, $t = 0.2$) est $|u(x,t) - \boldsymbol{u_M}(x,t)| = \boldsymbol{6 \cdot 2\,E - 7}$

Si on veut augmenter la précision il faut prendre plusieur termes de la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3.2.2 Application au problème 02 du chap . 1

$$u_{2n}(x,t) = -e^{-t}\left(\frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\right) - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} sint$$

$$u_{2n+1}(x,t) = e^{-t}\left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right) - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} cost$$

Si en prend la série tronquée

$$u_M(x,t) = \sum_{n=0}^{M} u_n(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{n=0}^{M} u_{2n+1}(x,t) + \sum_{n=1}^{M} u_{2n}(x,t)$$

Organigramme

Déclaration

$$\begin{cases} \text{M, n}: entier \\ x, t, u(x,t): reel \end{cases}$$

début

$lire\ (max),\ somme1 \longleftarrow 0\ ,\ somme\ 2 \longleftarrow 0$

$pour\ n = 0$ à $(max)\ ,\ faire$

$$e^{-t}\left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right) - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} cost$$

$$somme1 \longleftarrow somme1 + e^{-t}\left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right) - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} cost$$

$Fin\ pour$

$pour\ n = 0$ à $(max)\ ,\ faire$

$$-e^{-t}\left(\frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\right) - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} sint$$

$$somme2 \longleftarrow somme2 + e^{-t}\left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right) - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} cost$$

$Fin\ pour$

$u(x,t) \longleftarrow somme1 + somme2 + (1-x)(1-e^{-t}) + xsint$

Fin

Pour les valeurs suivantes $M = 5$, $x = 0.5$, $t = 0.2$

La solution après l'éxécution du programme est

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{n=0}^{5} u_{2n+1}(x,t) + \sum_{n=1}^{5} u_{2n}(x,t) = 0.252879955$$

CONCLUSION

Les résultats obtenus par la méthode des différences finies compactes appliquée à un ordre de six en espace et un ordre de quatre en temps sont très satisfaisants du fait que les valeurs approchées obtenues sont très proches des valeurs de la solution exactes dès les premières itérations. Un autre avantage de la méthode est qu'elle est facile à la mise en œuvre informatique. Concernant la méthode de décomposition d'Adomian l'avantage est de pouvoir calculer la solution explicite des problèmes sans avoir recours à la linéarisation par contre un inconvénient est constaté lors de la recherche des polynômes d'Adomian.

Bibliographie

[1] A.Bouziani, N. E. Benouat, Mixed problem with integral conditions for a order parabolic equation, Kobe J.Maths.15 (1998)m 47-58.

[2] A.Bouziani, N. E. Benouat, Probléme mixte avec condition integrales pour une classe d'equation paraboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie 1 321(1995), 1182.

[3] M. Bouzit, Calcul par éléments finis de quelque modèles d'élasticité, thèse de magister, Université Mentouri, Constantine, 1983.

[4] M. Bouzit and N. Teyar, high order Type Differential Equations with integral Boundary Condition, Int. journal of Math. Analysis, Vol. 3, 2009, no. 14, 681-877

[5] M. Bouzit and N. Teyar, Strong solution for high order mixed type Differential equations with integral Boundary condition, advanced in differential equation and control Processes, Voleme2, Number1, 2008, Pages 75-84.

[6] A. Cheniguel, Numerical Method for Non Local Problem, International. Mathematical Forum, Vol. 6, 2011, no. 14, 659 – 666, Department of Mathematics and computer Science Faculty of Science, Kasdi Merbah University Ouargla, Algeria

[7] A.CHENIGUEL*, A. AYADI** , Numerical Method for Non Local Problem, Sciences & Technologie **A** – **N°30** Décembre. (2009), pp. 15-18

[8] A A.Dezin, Théorèmes d'existences et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels, Usp. Math. Naouk,14(3) (1987), 22-27.

[9] Jichao Zhao and Robert M. Corless Compact finite différences method for Integro-Diferential Équations

[10] L. Marhoune and M. Bouzit, High order Type Differential Equations with integral Boundary Condition, Far East J. Math. Sci.(FJMS°, 18(3) (2005),341-350.

[11] R.MCorless, and J.Rokieki, The symbolic Generation of Finite D Formulas, Zeitschrift fur Angwandte Mathmatik und Mechanik (Zamm) Proceeding, Iciam/Gamm 95, Numerical Analysis,Scientific Computing,Comp Computing ,Computer Science.Hamburg.Germany:3 July1995.G Alfeld,O.Mahrenholtz, And R.Mennicken.ZAMM, Vol.76, supplement.Germany:Akademie Verlag.381- 382.

[12] B . Ousmane KONFE Nouvelles méthodes mathématiques Aliénor et Adomian pour la Biomédecine. Thèse de doctorat

[13] N. Piskonouv calcul différentiel et intégral tome II . Pages 419-421.

[14] L.S.Pulkina, A mixed problem with an integral condition for a hyperbolic equation, (Russian) Math. Zametki 74(3)(2003), 435-445, translation in Math, Notes74(3-4)(2003), 411-421.

[15] N. I. Yourchuk, A priori estimates of solutions of boundary value problems for certain differential equations, Differentials. Equations. 13(4)(1977), 423-429.

[16] Algorithmiques numériques et résolution des problèmes de contrôle optimal et d'équations intégrales compartimentaux.

[17] Numerical method for solving heat equation with derivative boundary conditions, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2011 Vol II WCECS 2011, October 19-21, 2011, San Francisco, USA.

[18] Solving heat equation by the Adomian decomposition method, Proceeding of the World Congress on Engineering 2011 Vol I WCE 2011, July 6-8, 2011, London,U.K .

[19] Numerical method for solving a two-dimensional di¤usion equattion with nonlocal boundary conditions, Sciences & Technologie, N_33, Juin 2011 Université Mentouri Constantine.

[20] Solving nonhomogeneous heat equation by the Adomian decomposition method, International journal of Numerical methods and applications Volum4 Number 2. 2010, pp. 89-97.

[21] Numerical method for nonlocal problem, Sciences & Technologie A-N_30 Décembr (2009).

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à la méthode des différences finies compactes d'ordre supérieur, et à la méthode de décomposition d'Adomian en vue d'une utilisation dans le calcul de modèles pour problèmes avec conditions non classiques. Ce travail a nécessité une étude approfondie de quelque algorithmes adaptés aux problèmes obtenus et une mise en œuvre informatique importante permettant la réalisation de codes de résolution exploitables pour traiter divers problèmes issus de l'industrie.

Abstract

In this paper, we are concerned with the method of high order compact finite differences,and the method of Adomian decomposition with regards of use in calculation of models for problems with non local boundary conditions.
This work needed a deep study of some algorithmes necessary for found problems in addition to the use of an important computing help which permits the realisation of exploitable resolution codes for dealing with diverse problems appeared in industry.

ملخص

نهتم في هذه المذكرة بطريقة الفرو ق المنتهية المضغوطة ذات المرتبات العليا، وطريقة التفكيك لـ **ادوميان** من منظور استعمالهما فى حساب نماذج لمسائل ذات شروط حدية غير كلاسيكية .هذا العمل تطلب دراسة معمقة لبعض الخوارزميات المتماشية مع المسائل المتحصل عليها وتطبيقها على برنامج حاسوب مهم جاهز للاستعماله في معالجة المسائل المختلفة الاتية من الصناعة .