

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHES
CIENTIFIQUE
UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI
INSTITUT DES SCIENCE ET LA TECHNOLOGIE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET LAVIE
DEPARTEMENTDEMATHEMATIQUESETINFORMATIQUE

THEME
CHAOS ET BIFURCATIONS DANS LES SYSTEMES
DYNAMIQUES EN DIMENSIONS n ($n > 1$)

MEMOIRE PRESENTEE POUR L'OBTENSION DU DOCTORAT
EN MATHEMATIQUE

Option : Mathématiques Appliquée

Sous la direction du: Pr. Elhadj. Zeraoulia

Présenté & soutenu par: Abdellah Menasri

Devant le jury:

Président	Mr Aiyadi Abdelhamid	(Prof) à l'Université de Oum-El-bouaghi
Rapporteur	Mr Elhadj Zeraoulia	(Prof) à l'Université de Tébessa
Examineur	Mr Hamri Nasreddine	(Prof) à l'Université de Mila
Examineur	Mr Bouzit Mouhamed	(MCA) à l'Université de Oum-El-bouaghi
Examineur	Mr Saoudi khaled	(MCA) à l'Université de Khenchela

Année universitaire

2015/2016

Remerciements

Cette thèse est le résultat d'un travail de recherche de près de quatre ans. En préambule, je veux adresser tous mes remerciements aux personnes avec lesquelles j'ai pu échanger, et qui m'ont aidé pour la rédaction de ce mémoire.

◆ Tout d'abord, je tiens à remercier Monsieur Pr. Elhadj Zeraoulia de L'université de tebessa, mon directeur de recherche, pour son aide précieuse, et pour le temps qu'il m'a consacré. Je le remercie aussi de m'avoir proposé un sujet de recherche passionnant, et qui conduira les futurs travaux de recherches à des solutions simple pour les problèmes quotidiens de l'humanité.

◆ Je remercie, Monsieur Pr. Aiyadi Abdelhamid de l'université D'oum el bouagui, pour avoir accepté de présider l'honorable jury.

◆ Mes remerciements vont également à, Monsieur Pr. Nesreddine Hamri de l'université de Mila, Monsieur Dr. Bouzit (MCA) de L'université D'Oum el bouagui, et Monsieur Dr. Saoudi (MCA) de L'université Khenchela, les examinateurs qui ont accepté la lourde tâche de lire ce mémoire jusque dans ses détails, et d'en tirer un compte-rendu.

◆ Je remercie mon ami Monsieur Ammara Djamel de leur aide dans la partie numérique de ce mémoire.

◆ J'adresse aussi mes plus sincères remerciements à ma famille, mes parents, mes frères, mes sœur et tous mes proches et amis, qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de cette thèse.

◆ Finalement je remercie ma femme Oum Islem, qui m'a supporté par son affection et sa patience, et à qui j'adresse mes remerciements.

Table des matières

1	Importance de la théorie du chaos et bifurcations	11
1.1	Introduction	11
1.2	La météorologie et le chaos	13
1.3	La bourse et le chaos	13
1.4	Le rythme de coeur et le chaos	14
1.5	Le cerveau et le chaos	15
1.6	La psychologie et le chaos	16
1.7	La cryptographie et le chaos	17
1.8	Les télécommunications et le chaos	18
2	Propriétés des systèmes dynamiques en dimension n ($n > 1$)	20
2.1	Aspect philosophique	20
2.2	Aspect mathématique	21
2.3	Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs	22
2.4	Classification des dynamiques	22
2.5	Modèle déterministe, modèle stochastique et modèle chaotique	23
2.5.1	Systèmes aléatoires	23
2.5.2	Systèmes déterministes	23
2.5.3	Systèmes chaotiques	24
2.6	Espace des phases	24
2.7	Attracteurs	25

2.7.1	Point fixe	26
2.7.2	Cycle-limite	26
2.7.3	Attracteur étrange	26
3	Les bifurcations dans les systèmes dynamiques en dimension n ($n > 1$)	28
3.1	Introduction	28
3.1.1	Variétés stable (instable)	29
3.1.2	Variété centrale dépendant d'un paramètre	30
3.2	Types de bifurcations	33
3.2.1	Les bifurcations locales	33
3.2.2	Les bifurcations globales	35
3.2.3	Codimension d'une bifurcation	35
3.3	Les bifurcations dans \mathbb{R}^2	36
3.4	Bifurcation de hopf dans les systèmes dynamiques discrets	60
3.4.1	Dégénération de la bifurcation de Hopf	63
3.4.2	Généralisation en dimension supérieure	63
3.5	Analyse dynamique d'un système non linéaire en trois dimensions	65
3.5.1	Résumé	68
3.5.2	Le point d'équilibre de système (2)	68
3.5.3	Propriété de la bifurcation de hopf	73
3.5.4	Bifurcations super-critique et sous-critique	73
3.5.5	Résumé	81
3.5.6	Les bifurcations globales	81
3.5.7	Méthode standard d'étudier les bifurcations dans les systèmes dynamiques discret	87
3.5.8	Les systèmes dynamiques hybrides	89
4	Bifurcations collision de la frontière	91
4.1	Dynamique des Cartes lisses par morceaux	91

4.1.1	L'analyse des bifurcations dans les cartes lisses par morceaux en deux dimensions	92
4.1.2	Classification des bifurcations collision des frontières	93
4.1.3	Les types possibles de points fixes suivant les valeurs propres . . .	93
5	Le chaos dans les systèmes dynamiques en dimension n ($n > 1$)	94
5.1	Introduction	94
5.2	Propriétés du chaos	95
5.2.1	Sensibilité aux conditions initiales	95
5.2.2	L'attracteur étrange	95
5.2.3	Spectre de puissance	95
5.3	Détection du chaos	96
5.3.1	Les exposants de lyapunov	96
5.4	Routes vers le chaos	99
5.4.1	Doublement de période	99
5.4.2	Intermittence	100
5.4.3	Quasi-périodicité	100
5.5	L'application de Hénon	101
5.6	L'application de Lozi	102
5.7	Types du chaos	103
5.7.1	Le type de chaos dans le système Lorenz	103
5.7.2	Le type de chaos dans les deux applications Hénon et Lozi	104
5.7.3	Le chaos robuste	104
6	Le chaos robuste dans l'application de Lozi avec la fonction max	106
6.1	Introduction	106
6.2	Le chaos robuste dans l'application de Lozi avec la fonction max	107
6.2.1	Les résultats analytiques	108
6.2.2	Quelques formes de fonctions f et g	112

6.2.3	Simulation numérique et l'observation des attracteurs chaotiques robustes	115
6.2.4	Résumé	120

Introduction générale

La théorie des systèmes dynamiques est une branche importante des mathématiques introduite par Newton vers 1665. Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles, généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques. On sait que tous les systèmes dynamiques ne sont pas identiques. On distingue deux types, les systèmes stables et les systèmes instables. Parmi les systèmes instables, il y a une classe particulièrement intéressante, qui est associée au chaos déterministe. Dans le chaos déterministe, les lois microscopiques sont déterministes mais les trajectoires prennent un aspect semble comme aléatoire. Cela provient de la sensibilité aux conditions initiales, la moindre modification des conditions initiales entraînant des divergences exponentielles. Le simple processus de la prise de décision, essentiel dans la vie d'une entreprise, fait appel à tant de facteurs inconnus qu'il serait illusoire de penser que le cours de l'histoire peut se modéliser au travers d'une théorie déterministe. L'exemple de système chaotique le plus souvent cité est celui de trois corps célestes en simple interaction gravitationnelle. Au début de 20^{ème} siècle Poincaré avait déjà démontré que ce problème pouvait avoir des solutions impliquant des trajectoires totalement irrégulières, erratiques en quelque sorte. Mais, autant on peut évoquer le hasard des grands nombres lorsqu'il s'agit du tirage des boules du loto, autant on ne peut plus l'invoquer pour justifier l'errance de nos trois corps célestes. Pour distinguer l'errance déterministe de l'errance aléatoire, on parle de chaos.

Les systèmes dynamiques peuvent avoir aussi de différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite...) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour les quelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (L'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle par exemple). Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation. Les différentes bifurcations sont répertoriées en fonction de leurs caractéristiques mathématiques intrinsèques

puis en fonction des changements qu'elles font apparaître dans le comportement du système. On distingue ainsi les bifurcations locales, dont les méthodes de linéarisation si elles existent, jouent un rôle très important dans la théorie de l'analyse des bifurcations (diagramme de bifurcation, analyse de stabilité, point critique de bifurcation, type de bifurcation), pour son identification au voisinage des points singuliers. Dont la question de stabilité constitue une démarche importante pour la description et l'étude des systèmes dynamiques.

Plan du travail

Dans ce mémoire, on a fait une recherche sur le chaos et bifurcations dans les systèmes dynamiques en dimension n ($n > 1$). Nous avons divisé notre travail en trois parties, à la première partie, on a présenté l'importance de la théorie du chaos et la théorie de bifurcation, à la deuxième partie, on a cherché les propriétés de ces systèmes, et dans la troisième partie, nous avons fait une recherche concernant le type du chaos et de la bifurcation.

◆ Dans le **premier chapitre**: Nous avons présenté l'importance de la théorie du chaos et les bifurcations dans les systèmes dynamiques, et leurs applications dans les différents domaines de la science, comme la météorologie, la bourse, la cardiologie, la neurologie, La psychologie, La cryptographie et les télécommunications.

◆ Dans le **deuxième chapitre**: Nous avons donné aux divers les concepts de base des systèmes dynamiques, et leurs propriétés, on a parlé des modèle dynamiques comme, les modèles déterministes, les modèles stochastique et les modèles chaotiques, ainsi l'importance des systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs et la différence entre eux.

◆ Dans le **troisième chapitre**: On a présenté l'une des théories importante aux systèmes dynamique, on parle de la théorie de bifurcations, on a donné quelque notions de base, après, on a parlé aussi des types de bifurcations, comme les bifurcations locales et les bifurcations globales. On à étudié en détaille ces types dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

◆ Dans le **quatrième chapitre**: Nous avons présenté dans ce chapitre, l'un des bifurcations la plus étudiée aux systèmes dynamiques au cours des dernières années, on parle de la bifurcation collision des frontières, qui ce produit aux systèmes dynamiques lisses par morceaux, nous avons classé et analysé ces types de bifurcations en détaille.

◆ Dans le **cinquième chapitre**: Dans ce chapitre, nous présentons, l'une des dernière nouvelles théories, l'une des véritable théorie scientifique, on parle de la théorie de chaos, on a donné quelque propriétés, et quelques applications les plus étudier, comme celui de Hénon et celui de Lozi, on a donné également les types de chaos dans ces applications, l'un de ces types est le chaos robuste.

◆ **Au sixième chapitre:** On a examiné le chaos robuste pour une famille d'applications de Lozi avec la fonction max, et démontré qu'ils peuvent avoir des attracteurs chaotiques robustes pour certaines valeurs de ces deux paramètres, nous avons déterminé certaines conditions et certaines formes de deux fonctions f et g , de sorte que ces cartes (applications) converge vers un attracteur chaotique robuste. Le contenu de ce chapitre à fait l'objet d'une publication international << **Robust Chaos in a General Lozi Mapping with Max Function, Far East Journal of Dynamical Systems, Vol 26, Num 1, pages 15-29, 2015** >>.

Chapitre 1

Importance de la théorie du chaos et bifurcations

1.1 Introduction

De nouveaux concepts scientifiques ont été produits d'une manière souvent multidisciplinaire lors des dernières décennies, sous les termes de « théorie du chaos », « théorie de la complexité », « théorie des systèmes dynamiques non linéaires »... etc. Les systèmes dynamiques non linéaires éclairent aussi un nouveau concept on parle de bifurcations. Une bifurcation correspond en effet au changement de nature d'un attracteur qui surgit lorsque la valeur d'un paramètre de contrôle du système franchit une valeur critique ou entre dans un domaine de valeurs critiques. Le changement d'organisation dans le système dynamique non linéaire est une propriété interne au système. Cette bifurcation est donc un phénomène ponctué, critique, par lequel le système prend un nouveau comportement global et des nouvelles propriétés. Le physicien Hughes Chaté explique dans la revue « Science et Avenir » d'août 2005, « Les oscillations collectives ne sont pas structurellement régulières. Elles comportent des fluctuations statistiques qui ne se dissipent que dans la limite du nombre infini de sites. On a donc bien une dynamique chaotique.

La théorie du chaos déterministe a montré d'autre part que des lois peuvent produire

des sauts entre des valeurs (discontinuité) et des apparences ressemblant considérablement à du pur hasard. Par exemple, le biologiste Robert May démontrait que, pour certaines valeurs des conditions initiales, une dynamique apparemment régulière autrement, se met à sauter d'une valeur à une autre. Étudiant l'évolution d'une population animale d'une saison à l'autre représentée sous la forme de l'itération d'une suite du terme général: $x_{n+1} = kx_n(1 - x_n)$ et démontrait que, malgré le caractère mathématiquement simple de la fonction, l'itération avec un temps discontinu entraînant une grande complexité des résultats. Et il élargissait ce résultat à d'autres domaines. Non seulement en recherche, mais aussi dans le monde quotidien de la politique et de l'économie, il serait bénéfique pour tous si plus de gens réalisaient que les systèmes non linéaires simples ne possèdent pas nécessairement des propriétés dynamiques simples. Les nouvelles idées étaient appliquées dans des domaines variés. Il existe en biologie de nombreux phénomènes périodiques d'importance vitale, les rythmes cardiaque, respiratoire, hormonal, entre autres. Il est vraisemblable que la théorie des systèmes dynamiques sera utile pour analyser ces rythmes et quelques résultats appréciables sont déjà apparus, en particulier le travail de Léon Glass à Montréal sur le fonctionnement des cellules cardiaques.

Le chaos déterministe n'a pas le sens qui est donné au mot chaos dans le langage courant où il signifie simplement agitation ou désordre, il convient de distinguer entre chaos et pur hasard. Alors que pour le hasard il n'y a aucune relation entre deux valeurs successives, le chaos déterministe suppose, au contraire, qu'il y a une relation. Le terme déterministe souligne justement que, même si on est dans une situation où on trouve du désordre, **il y a une loi cachée**. Cela est dû à une propriété fondamentale de ce type de loi. La théorie du chaos déterministe est une révolution conceptuelle de la science. C'est ce nouveau point de vue qu'il est fondamental de comprendre.

1.2 La météorologie et le chaos

Poincaré a montré que la science reste une conjecture et non un domaine du certain comme on l'a longtemps cru de façon un peu prétentieuse, à la suite de Laplace. Selon lui, la science est une activité humaine et la relation entre l'homme et la nature reste une recherche sans réponse finale. La meilleure preuve est que ses propres travaux allaient être rapidement contredits puisqu'il concluait que le système solaire était stable ce que, par la suite, il allait lui-même corriger. Par contre, il a inventé à cette occasion la plupart des méthodes théoriques aujourd'hui appliquées dans un domaine qui n'existait pas à l'époque, l'étude des systèmes dynamiques, autrement appelée chaos déterministe. Il va notamment inventer des méthodes d'étude de systèmes pris dans leur ensemble sans étudier les éléments du système pris un par un, méthode particulièrement novatrice. Il va étudier non une seule trajectoire mais l'ensemble des trajectoires possibles et leur relation entre elles. Enfin, il va montrer que les phénomènes physiques sont du domaine de la géométrie et non des formules mathématiques. Je le répète, sa conclusion est qu'avec trois corps interagissant par attraction gravitationnelle on a déjà du chaos c'est-à-dire un phénomène obéissant à la propriété de la sensibilité aux conditions initiales, un tout petit changement de celles-ci peut entraîner un grand changement de la suite de l'évolution. Rappelons que cette thèse révolutionne la conception que l'on avait de la gravitation depuis Newton. Ce dernier pensait que si l'on connaissait précisément les positions et les vitesses de tous les corps célestes on pouvait connaître à tout moment la suite des positions. Poincaré infirme cette thèse.

1.3 La bourse et le chaos

Le rêve de tout économiste ou spéculateur, est de prévoir les hauts et les bas de la Bourse pour en tirer le maximum de profits. La théorie du chaos peut-elle y aider ? Bien que le fonctionnement des marchés financiers soit d'une extrême complexité, il existe des mécanismes autorégulateurs basés sur un mélange subtil de psychologie humaine,

de comportement social et de pensée rationnelle. Par exemple, si le prix d'un produit est trop élevé, la demande va baisser ce qui aura pour conséquence de faire baisser son prix. L'existence de ces mécanismes autorégulateurs a des implications importantes et surprenantes sur le comportement des marchés, des prix et des économies, et peut entraîner le chaos. Ainsi, le comportement du prix de l'or est semblable à l'évolution des populations.

Les systèmes économiques sont si complexes qu'il est difficile de trouver les équations qui décrivent avec précision leur évolution temporelle. Les approximations sont ici encore trop simplistes. Ensuite, il s'agit de ce qu'on appelle des "systèmes complexes adaptatifs", c'est à dire des systèmes qui apprennent, se souviennent et s'adaptent, changeant par-là même la nature du système initial. Ainsi, même si on arrivait à écrire les équations d'évolution temporelle des systèmes biologiques et économiques, ces équations devraient changer lentement dans le temps. Malgré ces difficultés, la théorie du chaos nous apprend que certaines situations dynamiques en économie, au lieu de conduire à un équilibre, peuvent mener à une évolution temporelle chaotique, impossible à maîtriser. La théorie du chaos peut nous aider à avoir une meilleure compréhension de ces oscillations afin de mieux les maîtriser.

1.4 Le rythme de coeur et le chaos

Le cœur peut changer de rythme brutalement, dès que nous changeons d'activité, dès que nous subissons une forte émotion ou dès que les conditions extérieures changent. Alors comment fait le cœur pour varier ainsi son mécanisme d'horloge et pourquoi ce rythme s'altère-t-il brusquement en cas de crise cardiaque?. Ce cœur que nous croyons généralement régulier comme une horloge, serait en fait chaotique. La théorie du chaos a une autre application dans le domaine des appareils pour pallier aux faiblesses cardiaques. La première expérience de cœur artificiel a été celle de l'allemand Wilhelm Kolff en 1958. C'est dans ce laboratoire que sera expérimenté le cœur artificiel de Jarvik le 1er décembre

1982. Le malade survivra 112 jours mais avec de nombreuses interventions. Le cœur artificiel pose bien des problèmes. Bien des tentatives de cœur artificiel ont été des échecs et on s'est aperçu que cela était dû au fait que l'on voulait construire une pompe mécanique régulière alors que le cœur est chaotique. Le problème du rythme chaotique s'est reposé pour les troubles du rythme cardiaque, pour lesquels on a été conduit à implanter des simulateurs électriques qui remplacent le sinus naturel. Ce sont les pacemakers artificiels. C'est un des plus gros succès dans les organes artificiels implantables. Ils sont chargés, devant la déficience du sinus naturel, de provoquer une onde qui entraîne la contraction au rythme voulu. Mais les difficultés et les échecs ont au début été nombreux. Un des types d'échecs a été dû à une surprise des chercheurs, un pacemaker à rythme tout à fait régulier entraînait de nombreux échecs alors qu'une certaine variation chaotique des émissions était beaucoup plus favorable. Les derniers types de pacemakers ont, en plus de leur fonction de simulateur cardiaque donnant le rythme, une fonction de défibrillation.

1.5 Le cerveau et le chaos

Des séries de données extraites de mesures de l'activité du cerveau par électro-encéphalogramme ont été étudiées à l'état de sommeil profond, l'activité du cerveau aurait les traits du chaos déterministe et serait caractérisée par un attracteur fractal à cinq variables indépendantes. L'activité cérébrale semble ne plus pouvoir être représentée comme un système dynamiquement auto-engendré. Enfin, au cours de crises d'épilepsie, un attracteur fractal peut à nouveau être repéré, mais dans un espace qui pourrait être défini par deux variables indépendantes seulement. L'épilepsie, loin d'être assimilable à un comportement irrégulier, se caractériserait au contraire par une «régularité» trop grande de l'activité cérébrale. Le cerveau est un mécanisme d'horlogerie. Les horloges chaotiques sont capables de s'autoréguler mais aussi d'apprendre et d'évoluer et de constituer tout un échafaudage de rythmes adaptatifs. L'évolution animale a été aussi l'évolution vers le cerveau puis vers le cerveau humain. Chacune des fonctions simples s'est accouplée à

une fonction supérieure puis s'est accouplée à des systèmes de régulation de la fonction. Quand nous marchons, quand nous regardons un paysage, quand nous parlons, nous actionnons des circuits de notre cerveau. Nous actionnons d'abord des circuits grossiers qui ont une capacité faible de résolution puis ceux-ci en actionnent d'autres qui affinent le processus. Avec cette amélioration de la précision des fonctions nous avons successivement développé des centres de régulation à plusieurs niveaux et nous conservons en partie en nous ces étapes de l'évolution animale.

1.6 La psychologie et le chaos

Le fonctionnement psychique tel qu'on l'observe au cours du processus psychanalytique. Comment le cerveau sépare-t-il une odeur de toutes les autres. Comment apprend-il à reconnaître les odeurs familières ?. Il semble que ce soit rendu possible par le chaos. Les chercheurs en ont déduit que l'acte de perception consiste en un saut brusque d'un ensemble d'oscillations chaotiques à un autre. Ils pensent que le bulbe olfactif et le cortex entretiennent plusieurs ensembles d'oscillations chaotiques simultanées, une pour chaque odeur familière. De multiples raisons amènent à penser au modèle du chaos déterministe à propos du fonctionnement du psychisme humain. La formation de pensées conscientes est du domaine de l'auto-organisation du désordre des messages cérébraux inconscients. Rappelons qu'un phénomène d'auto-organisation signifie que l'ordre est issu du désordre dans un phénomène dissipatif loin de l'équilibre.

Arnold Mandell psychiatre et dynamique de San Diego, qui non seulement prit la défense d'Huberman mais montra en 1977 que certaines enzymes du cerveau avaient un comportement explicable seulement par le chaos et il en déduisit qu'il ne fallait pas rejeter les mathématiques non linéaires. Jean-Pierre Changeux écrit : « Le mécanisme échange en permanence de l'énergie avec le monde extérieur. Les oscillations ne se font jamais près de l'équilibre. Il faut que le système soit hors équilibre mais dans un état stable, qu'il constitue en somme une structure dissipative ». Jean-Pierre Changeux fait

alors référence au théoricien du chaos, Ilya Prigogine qui a montré que dans ce type de systèmes des relations non-linéaires existent par couplage entre les réactions à la suite d'une rétroaction entre le produit final d'une chaîne de réactions et la réaction d'entrée. Le déclenchement explosif de l'influx nerveux satisfait évidemment à cette condition de non-linéarité.

1.7 La cryptographie et le chaos

Cacher des l'informations était le principal intérêt de tous les pays dans le monde et également à toute personne. On a ainsi cherché à établir des techniques dites **de cryptage** afin de rendre ces informations incompréhensibles à ceux qui n'ont pas accès à une clé secrète. Ces techniques intéressent des personnes de divers domaines que ce soit le militaire, le commercial ou tout simplement personnel. Au cours de l'histoire diverses techniques cryptographiques ont été développées, les premières datant de l'antiquité comme la scytale ou le codage de César. Ces techniques primitives ont évoluées vers l'apparition des techniques de masquage, puis vers l'utilisation des machines automatisées et actuellement à l'utilisation des ordinateurs. En effet ceux-ci apportent une puissance de calcul remarquable qui a donné naissance à des techniques complexes.

Dans le siècle passé, plusieurs chercheurs se sont intéressées aux comportements inhabituels des systèmes non linéaires et on a découvert que certains systèmes présentaient des instabilités de nature très étranges. Ce fût la découverte des signaux chaotiques qui ont un comportement complètement déterministe mais qui font penser à des allures pseudo-aléatoires. Une définition universelle du chaos n'existe pas vraiment, les mathématiciens qui étudient les systèmes non linéaires utilisent certaines caractéristiques de la stabilité du système (les exposants de Lyapunov) pour définir un comportement chaotique. Ces signaux de nature très « imprévisibles » et qui ne semblaient pas être faciles à contrôler.

1.8 Les télécommunications et le chaos

Chaos communications est une application de la théorie du chaos qui vise à assurer la sécurité dans la transmission de l'information effectuée par les technologies de télécommunications. Par des communications sécurisées, il faut comprendre que le contenu du message transmis est inaccessible aux oreilles indiscretes possibles.

La sécurité des communications est basée sur les comportements dynamiques complexes fournis par les systèmes chaotiques. Certaines propriétés de la dynamique chaotique. Le chaos est un phénomène déterministe, il est possible de décoder les données en utilisant ce déterminisme. Pour mettre en œuvre des communications de chaos en utilisant ces propriétés de chaos, deux oscillateurs chaotiques sont nécessaires comme un émetteur et récepteur. Dans l'émetteur, un message est ajouté sur un signal chaotique et ensuite, le message est masqué dans le signal chaotique. Comme il porte l'information, le signal chaotique est aussi appelé support chaotique. Synchronisation de ces oscillateurs est similaire à la synchronisation des réseaux de neurones aléatoires en cryptographie de neurones. Lorsque la synchronisation du chaos est utilisée, un régime de base d'un dispositif de communication (Cuomo et Oppenheim 1993) est fait par deux oscillateurs chaotiques identiques. L'un d'eux est utilisé comme émetteur, l'autre comme récepteur. Elles sont reliées dans une configuration où l'émetteur récepteur dans le conduit de telle sorte que la synchronisation de chaos identique entre les deux oscillateurs est atteint. Aux fins de la transmission d'informations, à l'émetteur, un message est ajouté sous forme d'une petite perturbation au signal chaotique qui entraîne le récepteur. De cette manière, le message transmis est masqué par le signal chaotique. Lorsque le récepteur se synchronise sur l'émetteur, le message est décodé par une soustraction entre le signal émis par l'émetteur et sa copie générée au niveau du récepteur au moyen de la synchronisation de mécanisme de chaos. Cela fonctionne parce que, tandis que la sortie de l'émetteur contient le transporteur chaotique, plus le message, la sortie du récepteur se fait uniquement par une copie de la porteuse chaotique sans le message.

Conclusion 1.1 : *Dans ce chapitre, nous avons démontré que le chaos n'est pas un produit ou un matériau dont la technologie pourrait s'emparer pour créer de nouveaux appareils commercialisables. Le chaos est avant tout un concept, on pourrait presque dire **une philosophie** des comportements dynamiques. Le chaos déterministe est la frontière entre l'ordre et le désordre. Le chaos représente un mécanisme **important** d'adaptation, et qu'il intervient largement dans **le monde du vivant**.*

Chapitre 2

Propriétés des systèmes dynamiques en dimension n ($n > 1$)

2.1 Aspect philosophique

Un paradoxe de Zénon permet de présenter le concept philosophique de système dynamique. Zénon demandait : « Soit une flèche en vol à un instant, est-ce qu'elle est au repos ou en mouvement ? » Si on répondait qu'elle est en mouvement, il disait « Mais être en mouvement, c'est changer de position à un instant, la flèche a une position, elle n'en change pas. Elle n'est donc pas en mouvement. » Si on répondait qu'elle est au repos, il disait « Mais si elle est au repos à cet instant, elle est aussi au repos à tous les autres instants, elle est donc toujours au repos. Elle n'est jamais en mouvement. Mais comment alors peut-elle passer d'une position à une autre ? » Il en concluait qu'il n'est pas possible de dire des vérités sur ce qui est en mouvement. Tout ce qui est en mouvement serait par nature mensonger et il n'y aurait pas de vérités à propos de la matière mais seulement à propos des grandes idées, pourvu qu'elles soient immuables. Le sens commun est exactement inverse. On croit plus couramment à la vérité de ce qu'on voit qu'aux vérités métaphysiques.

La théorie des systèmes dynamiques rejoint le sens commun sur ce point. La notion

d'état dynamique fournit une solution au paradoxe de Zénon à un instant, la flèche est en mouvement, elle a une position mais elle est en train de changer de position, elle a une vitesse instantanée. Les nombres qui mesurent sa position et sa vitesse sont les valeurs de ses variables d'état. Les variables d'état sont toutes les grandeurs physiques qui déterminent l'état instantané du système et qui ne sont pas constantes a priori. On les appelle aussi les variables dynamiques. Si on prend une photo au flash, on ne voit pas que la flèche est en mouvement, mais on peut le détecter par d'autres moyens, sans avoir à mesurer un changement de position. L'état dynamique d'un système est un état instantané, mais c'est un état de mouvement. Il est déterminé par les valeurs de toutes les variables d'état à cet instant.

2.2 Aspect mathématique

Un système dynamique est un système physique qui évolue. Il peut évoluer dans le temps, ou par rapport à une autre variable suivant l'espace de phases considéré. La trajectoire d'un objet en mouvement dans le temps, est donc un système dynamique, ainsi que le nombre d'individu d'une population quelconque dans le temps, ou encore les valeurs d'une fonction (par exemple, $y = x^2$) par rapport à la valeur de x .

Définition 2.1 : *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, F) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $F : X \times T \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de condition initiale l'état du système à toute instant.*

Définition 2.2 : *La théorie des systèmes dynamiques vise à la compréhension de la situation suivante : on se donne un ensemble X et une transformation T de X dans X , c'est-à-dire que pour chaque élément x de X , on définit un nouvel élément $T(x)$, qu'on appelle son image sous l'action de la transformation T . On itère alors la transformation T , c'est-à-dire qu'on considère, pour un x dans X donné, la suite $x, T(x), T^2(x) =$*

$T(T(x))$, $T^3(x) = T(T^2(x))$, etc. et on cherche à décrire le comportement de cette suite, qu'on appelle l'orbite de x .

2.3 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Une distinction très importante au sein des systèmes dynamiques a été reléguée en arrière-plan jusqu'à présent. Il s'agit de la différenciation entre les systèmes conservatifs et les systèmes dissipatifs. Les premiers sont caractérisés par l'existence d'une quantité, fonction des variables du système, se conservant au cours du mouvement, les systèmes Hamiltoniens rentrent dans cette catégorie. En étant très schématique, nous dirons que les systèmes conservatifs sont au cœur de la Mécanique classique (mécanique céleste en particulier) et de la mécanique statistique, et que les systèmes dissipatifs sont appropriés à la description des phénomènes physiques où il y a justement des sources de dissipation d'énergie, par frottement par exemple. La turbulence, entre autres, telle que Ruelle la conceptualise, rentre dans cet ensemble. En revanche, il faut souligner qu'une partie des théories mathématiques sous-jacentes au développement du chaos, à savoir la théorie des systèmes dynamiques, ne distingue pas entre les systèmes conservatifs des systèmes dissipatifs. Ils sont traités avec les mêmes outils et tombent sous le coup des mêmes théorèmes, à moins que cela soit spécifiquement explicité. Ceci explique que la différence ait été passée sous silence jusque-là. Pourquoi alors distinguer maintenant ces deux catégories ? La pertinence relativement à la problématique du chaos est très claire : il n'est pas question d'attracteur étrange dans le cas des systèmes conservatifs, il n'est même pas question d'attracteur du tout.

2.4 Classification des dynamiques

On distingue plusieurs grands types de dynamiques en fonction de la nature mathématique de l'espace des phases.

Soit l'application :

$$F : X \times T \rightarrow X$$

1. Lorsque X est un espace topologique et F est un homéomorphisme, on parle de dynamique topologique.
2. Lorsque X est une variété différentielle et F est un difféomorphisme, on parle de dynamique différentielle.
3. Lorsque X est une variété analytique complexe et F est holomorphe, on parle de dynamique holomorphe ou dynamique complexe.
4. Lorsque X est un espace mesuré et F est une application qui préserve la mesure, on entre dans le domaine de la théorie ergodique, et on parle de système dynamique mesuré.

2.5 Modèle déterministe, modèle stochastique et modèle chaotique

On peut différencier trois sortes de systèmes dynamiques :

les systèmes aléatoires (aussi appelés systèmes stochastiques), les systèmes déterministes et les systèmes chaotiques.

2.5.1 Systèmes aléatoires

Évoluent comme leur nom l'indique au hasard dans tout l'espace sans qu'aucune équation ne les régit, sans qu'aucune prévision exacte soit possible dans le temps.

2.5.2 Systèmes déterministes

Sont des systèmes régis par des lois mathématiques bien connues, on peut donc prévoir exactement l'évolution de ces systèmes dans le temps.

2.5.3 Systèmes chaotiques

Quant à eux, ont un comportement infiniment complexe. Ils sont irrésistiblement attirés par une figure géométrique de structure également infiniment complexe sur laquelle ils semblent errer au hasard, mais sans jamais la quitter, ni repasser deux fois par le même point. Les attracteurs qui caractérisent ces systèmes, semblent inclure à la fois des lois déterministes et des lois aléatoires, ce qui rend impossible toute prévision à long terme impossible.

2.6 Espace des phases

Il est possible de suivre l'évolution de l'état d'un système physique dans le temps. Pour cela, on construit d'abord un modèle avec les lois physiques et les paramètres nécessaires et suffisants pour caractériser le système. Ce modèle est bien souvent constitué par des équations différentielles. On définira, à un instant donné, un point dans un "repère". Ce point caractérisera l'état du système dans l'espace à cet instant. Cet espace est appelé "l'espace des phases". Lorsque la variable d'évolution change de valeur (quand le temps s'écoule, par exemple), le point figurant l'état du système décrit en général une courbe dans cette espace. Il faut bien comprendre qu'il n'existe aucune relation entre un cas d'image à trois dimensions et notre espace de phases tridimensionnel. Il s'agit là d'un espace purement mathématique qui comporte autant de dimensions qu'il y a de paramètres dans le système dynamique étudié. Ainsi on pourrait très bien imaginer se retrouver à manipuler un espace de phases à dix dimensions, si le système dynamique analysé implique dix paramètres (toute difficulté géométrique mise à part...).

Dans l'espace des phases, la position d'une balle de tennis est déterminée non pas par les trois coordonnées spatiales, mais aussi par trois coordonnées de vitesses: la vitesse de haut en bas, celle de droite à gauche, celle d'avant en arrière. Il faut donc six dimensions pour décrire totalement une balle de tennis. Prenons par exemple un système à trois dimensions: x , y et z . On va pouvoir tracer trois graphiques dans l'espace des phases à

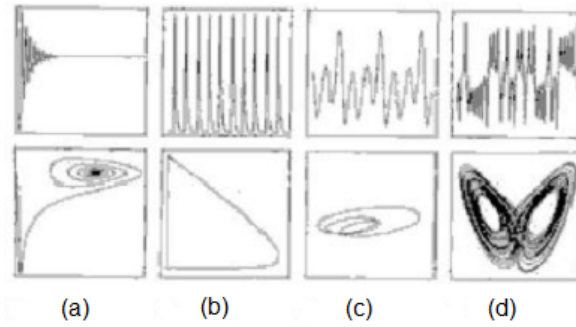


FIG. 2-1 – Le système (a) converge vers un état d'équilibre après maintes oscillations, ce qui correspond dans l'espace des phases à des boucles qui convergent vers un point. Le système (b) se répète périodiquement, ce qui correspond dans l'espace des phases à une orbite cyclique. Le système (c) a également un mouvement périodique mais plus complexe, il se répète seulement après trois oscillations différentes : on dit qu'il possède un cycle de période 3. Cela correspond à des boucles plus compliquées dans l'espace des phases. Le système (d) est chaotique, et dans l'espace des phases, il possède la forme en aile de papillon de l'attracteur étrange de Lorenz.

deux dimensions, en fonction de x et de y , en fonction de x et de t , et en fonction de y et de t .

On considérant un espace des phases à trois dimensions, on ne peut tracer ici qu'un graphique.

2.7 Attracteurs

Définition 2.3 : *Un attracteur est la limite asymptotique des solutions partant de toute condition initiale située dans un bassin d'attraction qui est un domaine de volume non nul. Lorsque les coordonnées, dans l'espace des phases, d'un système dynamique sont comprises au cours du temps dans un domaine restreint de l'espace entier (i.e. aucune coordonnée ne diverge) alors l'évolution du dit système a deux comportements possibles. Soit le système est chaotique au sens étymologique du terme, et l'évolution de ses coordonnées se fera dans l'anarchie la plus totale (comportement aléatoire). Soit il est chaotique*

déterministe et possède un attracteur étrange.

On distingue trois types d'attracteurs.

2.7.1 Point fixe

Il caractérise simplement un système atteignant un état stationnaire (Par exemple : on laisse balancer un pendule au bout d'une ficelle).

2.7.2 Cycle-limite

Il caractérise un système atteignant un état répétitif. Plus explicitement, prenons un cerceau qu'un enfant ferait tourner infiniment autour de sa taille, lorsqu'il le lance le cerceau a une trajectoire imparfaite, mais il prend de la vitesse et au bout d'un moment, sa trajectoire va se stabiliser et former des cercles parfaits, il aura atteint son état répétitif.

2.7.3 Attracteur étrange

Il décrit les systèmes chaotiques. L'attracteur étrange désigne une figure dans l'espace représentant le comportement d'un système dynamique. L'attraction des trajectoires autour de l'attracteur est liée au caractère chaotique du système réel. Par exemple: le mouvement de la Terre par rapport au soleil est un système périodique.

Un attracteur étrange est un ensemble invariant, sa dimension dans un espace tridimensionnel doit être strictement inférieure à 3. Mais nous cherchons également un attracteur dont la dimension n'est ni 1 (point fixe) ni 2 (cycle). Nous recherchons donc des objets de dimension non-entière. On comprend bien que leur nature doit être radicalement différente de celle d'un tore, qui ne peut être attracteur que d'un régime périodique. Les objets considérés ici, par contre, sont le siège de phénomènes apériodiques et du Chaos. On les appelle des attracteurs étranges. Et pour cause : il s'agit d'ensembles compacts, donc bornés, dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques, dont l'une des caractéristiques essentielles est la sensibilité à la condition initial (SCI). (les trajectoires

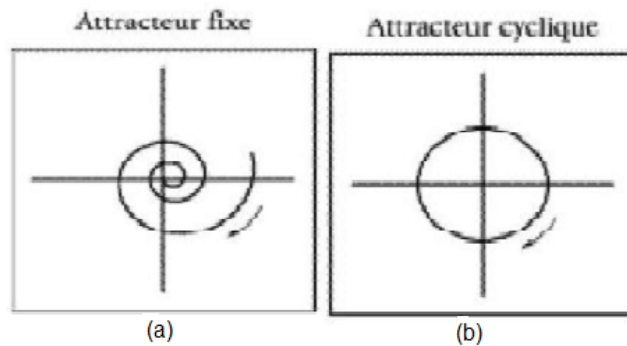


FIG. 2-2 – L'attracteur fixe obtenu par modélisation d'un pendule simple suspendu à une ficelle et avec les forces de frottements (a). L'attracteur circulaire qui peut être obtenu par le lancer d'une balle attachée à un socle sans forces de frottements (dans le vide) (b).

issues de conditions initiales proches s'écartent exponentiellement). Comment peut-on faire coexister l'attraction, qui implique le resserrement des trajectoires, avec la (SCI), qui implique leur écartement ? La solution réside dans le concept d'hyperbolicité de l'attracteur. L'attraction s'opère dans une direction, et la divergence dans une autre. La surface contenant les trajectoires divergentes est appelée variété instable, alors que celle contenant les trajectoires convergentes sera dénommés variété stable. Notons que ceci ne peut se concevoir que dans un espace de phase d'au moins trois dimensions.

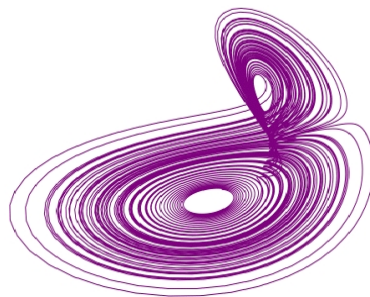


FIG. 2-3 – L'attracteur du système de Lorenz appelé aussi le papillon de Lorenz. C'est le plus connu et le premier des attracteurs étudiés, il en existe beaucoup d'autre aux formes très étranges.

Chapitre 3

Les bifurcations dans les systèmes dynamiques en dimension n ($n > 1$)

3.1 Introduction

Le terme de bifurcation a été introduit par Henri Poincaré au début du 20^{ème} siècle dans ses travaux sur les systèmes d'équations différentielles, lorsque crée des tourbillons dans un fluide, on observe une bifurcation de l'état de repos du fluide vers l'état convectif.

Une bifurcation veut dire division d'une branche principale en au moins deux branches. Le comportement d'un système dynamique linéaire peut changer quand un paramètre du système change. Ce changement de comportement correspond à un phénomène de bifurcation, il est accompagné d'un changement de type de stabilité.

Le terme de bifurcation est utilisé pour désigner dans un sens large, toute modification qualitative du comportement d'un système dynamique suit à la variation de l'un de ces paramètres. Une bifurcation correspond donc à la collision de deux objets (point répulsif ou selle, attracteur) ou de deux variétés. La collision de deux objets donne naissance à une bifurcation "locale" alors que la collision de deux variétés donne naissance à une bifurcation "globale".

Les bifurcations se produisent dans les deux systèmes dynamiques, continus (décrit

par des équations différentielles, EDO ou EDP), et discrets (décrits par des applications ou cartes).

3.1.1 Variétés stable (instable)

Définition 3.1 : *La variété stable (resp. instable) d'une solution est la courbe tangente au champ des vecteurs propres associés à une valeur propre du Jacobien dont la partie réelle est négative (resp. positive).*

Variété centrale

Soit le système dynamique non linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, p) \quad (3.1)$$

x_0 son point d'équilibre qu'on peut ramener à l'origine par la transformation : $u = x - x_0$, et soit A la matrice Jacobéenne d'ordre n associé au système (3.1) après sa linéarisation au voisinage de point x_0 .

$$\frac{du}{dt} = A.u \quad (3.2)$$

Soient :

1. $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ les valeurs propres de la matrice A dont la partie réelle est négative.
2. $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i$ les valeurs propres de la matrice A dont la partie réelle est positive.
3. $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$ les valeurs propres de la matrice A dont la partie réelle est nulle.

Avec : $m + i + k = n$

et soient :

1. E^m le sous espace vectoriel de dimension m engendré par : $\{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m\}$.
2. E^i le sous espace vectoriel de dimension i engendré par : $\{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i\}$.
3. E^k le sous espace vectoriel de dimension k engendré par : $\{\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k\}$.

Avec: $E^n = E^m \oplus E^i \oplus E^k$

On a le théorème suivant:

Théorème 3.1 : *Il existe des variétés de classe C^r , W^m (stable), W^i (instable), et W^k (centrale) tangentes respectivement à E^m , E^i , et E^k en x_0 . Ces variétés sont invariantes, par rapport au flot de système.*

3.1.2 Variété centrale dépendant d'un paramètre

On applique une petite perturbation ε sur le système (3.2) on obtient un système dépend de paramètre ε . Par une certaine transformation on peut ramener le système (3.1) à un système de la forme:

$$\begin{cases} x' = Bx + f(x, y, z, \varepsilon) \\ y' = Dy + g(x, y, z, \varepsilon) \\ w' = Cz + h(x, y, z, \varepsilon) \\ \varepsilon' = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

La variété centrale au voisinage de $(0, 0, 0, 0)$ est alors donnée par:

$$\begin{cases} y = \psi(x, \varepsilon) \\ z = \varphi(x, \varepsilon) \end{cases} \quad (3.4)$$

Par un simple calcul, et après avoir appliqué le développement de *Taylor* sur ψ et φ , on peut donc écrire le système (3.3) sous la forme:

$$\begin{cases} x' = Bx + f(x, \psi(x, \varepsilon), \varphi(x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \varepsilon' = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Théorème 3.2 (Cauchy): *Soit un sous-ensemble ouvert W d'un espace vectoriel normé E , $f : W \rightarrow E$, une application de classe C^1 (continûment différentiable) et x_0 un élément*

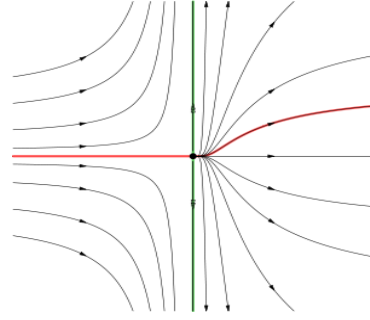


FIG. 3-1 – Variété centrale (rouge) et variété invariante instable (vert) de point d'équilibre noeud-col

de W . Alors, il existe un réel $a > 0$ et une unique solution $x: (-a, a) \rightarrow W$ de l'équation différentielle $x' = f(x)$ qui satisfasse la condition initiale $x(0) = x_0$.

Noter que ce théorème est local. La démonstration utilise le fait qu'une fonction de classe C^1 est localement Lipschitzienne.

Définition 3.2 : Une fonction $f: W \rightarrow E$ où W est un ouvert d'un espace vectoriel E est dite Lipschitzienne s'il existe une constante K telle que pour tout x et y de W on a : $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Elle est localement Lipschitzienne si pour tout point x de W il existe un voisinage W_0 tel que la restriction de f à W_0 est Lipschitzienne.

Théorème 3.3 (Liouville) : Soit E un espace vectoriel de dimension n , $f: W \rightarrow E$ un flot de classe C^1 , et X_0 , une condition initiale. On cherche à déterminer comment évolue un élément de volume dV , voisinage de X_0 . Sans perte de généralité, on suppose que :

$$dV = \prod_{i=1}^n [(X_i + \Delta_i) - X_i] = \prod_{i=1}^n \Delta_i$$

où Δ_i est une perturbation de la composante X_i . Le volume dV est donc ici un hypercube dont la diagonale va de X à $X + \Delta$, avec vecteur de composantes Δ_i . L'évolution

au cours du temps de dV est décrite par:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} \Delta_j \times \frac{d}{dt} [(X_i + \Delta_i) - X_i] \right)$$

Par définition de f , la dérivée par rapport au temps de X_i est la composante i de f , calculée au point X_i . On peut faire un développement au premier ordre de f_i :

$$f_i(X + \Delta_i) = f_i(X) + \Delta_i \frac{\partial f_i}{\partial X_i} + O(\Delta_i)$$

Donc

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_i} = \nabla f = \text{Tr}(J)$$

où J est le Jacobien de f au point X . Or, la trace de J est égale à la somme de ses valeurs propres, et si certaines de celles-ci ont des parties imaginaires non nulles, elles apparaissent comme paires conjuguées. Donc la somme des valeurs propres est également la somme des exposants de Lyapunov. On a donc finalement:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Un système est dissipatif si $\text{Tr}(J) < 0$ presque partout. C'est à dire sauf dans quelques zones de l'espace de phase où les trajectoires ne s'attardent pas. En particulier, sur un attracteur $\text{Tr}(J) < 0$ en moyenne, soit $\sum \lambda_i < 0$. C'est évident en particulier pour un point fixe de type puits, où tous les exposants de Lyapunov sont négatifs. Le long d'un cycle limite, un exposant de Lyapunov est nul (le long de la direction du cycle), et tous les autres sont négatifs. Sur un attracteur chaotique, un exposant est positif, mais il est inférieur à la somme des autres en valeur absolue. En particulier pour un système de dimension 3, on a $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$ et $\lambda_1 < |\lambda_3|$.

Dans le cas d'un système hamiltonien (de dimension $2n$), les variables apparaissent par paires de quantités conjuguées q_i et p_i telles que :

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

La divergence de f s'écrit donc :

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

On retrouve l'expression du théorème de Liouville, qui nous dit que le volume d'un élément d'espace de phase se conserve au cours du temps dans un système Hamiltonien.

3.2 Types de bifurcations

Il est utile de diviser les bifurcations d'un système dynamique en deux classes principales :

- Bifurcations locales, qui peuvent être analysés entièrement par des changements dans les propriétés de stabilité des équilibres locaux, orbites périodiques ou d'autres ensembles invariants comme les paramètres traversent des seuils critiques.

- Bifurcations globaux, qui se produisent souvent lorsque les plus grands ensembles invariants du système entrent en collision avec l'autre, ou avec les équilibres du système. Ils ne peuvent pas être détectés uniquement à une analyse de la stabilité des équilibres (points fixes).

3.2.1 Les bifurcations locales

Une bifurcation locale se produit lorsqu'un changement de paramètre entraîne la stabilité de l'équilibre (ou point fixe) pour changer. Dans les systèmes continus, cela correspond à la partie réelle d'une valeur propre d'un équilibre traversant la valeur zéro. Dans les systèmes discrets (ceux décrits par des cartes plutôt que de EDOs), ceci correspond à un point fixe ayant un multiplicateur de Floquet de module égal à 1. Dans les deux cas,

l'équilibre est non-hyperbolique au point de bifurcation.

Les changements topologiques dans le portrait de phase du système peuvent être limitées à façon arbitraire de petits voisinages des points fixes bifurquant en déplaçant le paramètre de bifurcation au proximité du point de bifurcation d'où "local". De manière plus technique, considérer le système dynamique continu décrit par l'ODE:

$$x' = f(x, \lambda) \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Une bifurcation locale se produit au (x_0, λ_0) si la matrice jacobienne $Df_{(x_0, \lambda_0)}$ a une valeur propre avec une partie réelle nulle. Si la valeur propre est égale à zéro, la bifurcation est une bifurcation à l'état stable, mais si la valeur propre est non nulle mais purement imaginaire, il s'agit d'une bifurcation de Hopf. Pour les systèmes dynamiques discrets, considérer le système:

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda) \quad (3.7)$$

Une bifurcation locale se produit au (x_0, λ_0) si la matrice jacobienne $Df_{(x_0, \lambda_0)}$ a une valeur propre de module égal à 1. Si la valeur propre est égale à 1, la bifurcation est soit un noeud-col (souvent appelé bifurcation pli dans les applications), bifurcation transcritique ou fourche. Si la valeur propre est égale à -1, il ya une doublement de période (ou bascule), et sinon, il ya une bifurcation de Hopf. Des exemples des bifurcations locales sont:

1. Bifurcation selle-noeud (fold).
2. bifurcation transcritique.
3. Bifurcation fourche.
4. Bifurcation doublement de période (Flip).
5. Bifurcation de hopf.
6. Bifurcation de Neimark (Hopf secondaire).

Nous allons parler de ces bifurcations en détail dans la prochaine section.

3.2.2 Les bifurcations globales

Les bifurcations globales se produisent lorsque des ensembles invariants, comme orbites périodiques, entrent en collision avec les équilibres. Cela entraîne des changements dans la topologie des trajectoires dans l'espace des phases qui ne peuvent être limités à un petit voisinage, comme le cas avec les bifurcations locales. En fait, les changements de topologie étendent jusqu'à une distance arbitrairement grand d'où "globale". Des exemples de bifurcations globales sont :

1. Bifurcation homocline dans laquelle un cycle limite entre en collision avec un point selle.
2. Bifurcation hétéroclinique dans laquelle un cycle limite entre en collision avec deux ou plusieurs points selle.
3. Bifurcation infini-période dans laquelle un nœud stable et un point selle se produisent simultanément sur un cycle limite.
4. bifurcation blue sky catastrophe dans laquelle un cycle limite entre en collision avec un cycle non hyperbolique.

Nous allons parler de ces bifurcations en détail dans la prochaine section.

Les bifurcations globales peuvent également impliquer des ensembles plus complexes, comme les attracteurs chaotiques.

3.2.3 Codimension d'une bifurcation

La codimension d'une bifurcation est le nombre de paramètres qui doivent être modifiés pour la bifurcation de se produire. Cela correspond à la codimension du jeu de paramètres pour lequel la bifurcation se produit à l'intérieur de l'espace complet de paramètres. La bifurcations noeud-col et la bifurcations de Hopf sont les seules bifurcations locales génériques qui sont vraiment codimension-1 (les autres ayant tous codimension supérieure). Cependant, la bifurcation transcritique et la bifurcations de fourche sont également souvent considérés comme des bifurcations de codimension-1, parce que les

formes normales peuvent être écrites avec un seul paramètre. Un exemple d'une bifurcation de codimension-2 qui a été bien étudié à la bifurcation Bogdanov-Takens.

3.3 Les bifurcations dans \mathbb{R}^2

Dans cette section, nous allons étudier des systèmes dynamiques planaires dépendant d'un paramètre réel, que nous noterons a , $a \in \mathbb{R}$. Nous allons donc étudier des systèmes dynamiques de la forme :

$$\begin{cases} x' = f(x, y, a) \\ y' = g(x, y, a) \end{cases}$$

Bifurcation selle-noeud (saddle-node)

Dans ce cas on pose

$$f(x, y) = x^2 + a, \quad g(x, y) = -y$$

On obtient le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + a \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.8)$$

Suivant le signe de a nous distinguons trois cas :

■ Pour $a < 0$

Le système admet deux points d'équilibre $P_1(-\sqrt{|a|}, 0)$, $P_2(\sqrt{|a|}, 0)$. La matrice jacobienne de manière générale de système (3.8) est.

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Donc

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{|a|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

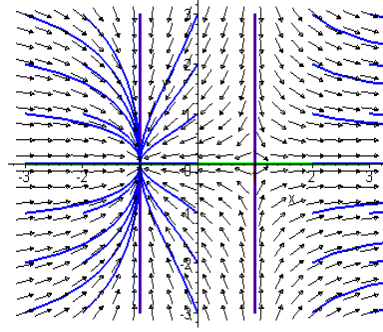


FIG. 3-2 – Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud pour $a < 0$.

La matrice (3.10) admet deux valeurs propres réelles et de signe négatif: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2\sqrt{|a|}$. Par

conséquent le point P_1 est un noeud asymptotiquement stable.

Et

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{|a|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

La matrice (3.9) admet deux valeurs propres réelles, et de signe opposé: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2\sqrt{|a|}$. Par

conséquent le point P_2 est un point selle (instable). Les isoclines verticales $\dot{x} = 0$ sont les deux droites $x = \pm\sqrt{|a|}$ et l'isocline horizontale $\dot{y} = 0$ est la droite $y = 0$. Le portrait de phase est représenté sur la figure (3.2).

■ Pour $a = 0$

Le système (3.8) s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.12)$$

qui admet l'origine comme unique point d'équilibre. Son matrice jacobienne est la

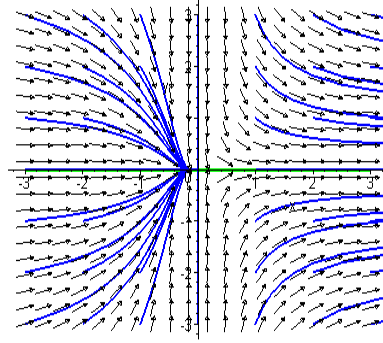


FIG. 3-3 – Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud pour $a = 0$.

suivante :

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Il s'agit donc, d'un point non hyperbolique. l'isocline horizontale $\dot{y} = 0$ est la droite $y = 0$ et l'isocline verticale $\dot{x} = 0$ est la droite $x = 0$. Le portrait de phase est représenté sur la figure (3.3).

Le portrait de phase montre l'apparition d'un noeud stable pour les $x < 0$ et d'un point selle pour les $x > 0$.

■ Pour $a > 0$.

Le système (3.8) s'ecrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + a \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.14)$$

Il n'a aucun point d'équilibre. La variable x est toujours croissante. La variable y est croissante pour les $y < 0$ et décroissante pour les $y > 0$, comme le montre le portrait de phase représenté sur la figure (3.4).

Il s'agit, d'une bifurcation selle-noeud. et correspond à l'apparition simultanée de deux points d'équilibre, l'un instable (un point selle) et l'autre asymptotiquement stable (un noeud). D'une manière générale, cette bifurcation se produit lorsque deux isoclines

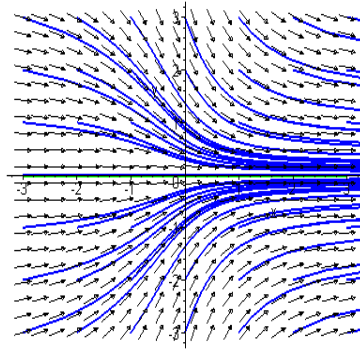


FIG. 3-4 – Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud pour $a > 0$.

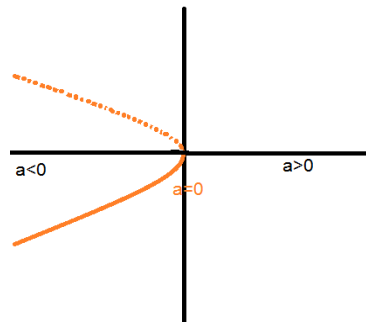


FIG. 3-5 – Diagramme de la bifurcation selle-noeud.

de natures différentes, c'est-à-dire l'une verticale $\dot{x} = 0$ et l'autre horizontale $\dot{y} = 0$, initialement disjointes, deviennent tangentes à la bifurcation, et se coupent ensuite en deux points d'équilibre qui apparaissent.

Bifurcation fourche (pitchfork)

Pour bien étudier cette bifurcation, on prend ce système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-a - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.15)$$

Selon le signe de paramètre de a , on distingue trois cas :

■ Pour $a < 0$

Le système (3.15) admet trois points d'équilibre $O(0, 0)$, $P_1(-\sqrt{|a|}, 0)$ et $P_2(\sqrt{|a|}, 0)$.
la matrice Jacobienne de système (3.15) s'écrit de manière générale:

$$A = \begin{pmatrix} -a - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

La matrice A au point $O(0, 0)$ est

$$A(O) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

qui admet deux valeurs propres réelles et de signe opposé: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -a$. Par conséquent, le point $O(0, 0)$ est un point selle (instable).

Et

$$A(P_1) = A(P_2) = \begin{pmatrix} -4a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

qui admet deux valeurs propres réelles et négatives: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4a$. Ainsi, ces deux points d'équilibre sont des noeuds asymptotiquement stables. Les isoclines verticales ($\dot{x} = 0$) sont les trois droites: $x = 0$, $x = -\sqrt{|a|}$, et $x = \sqrt{|a|}$. L'isocline horizontale ($\dot{y} = 0$) est la droite $y = 0$. Le portrait de phase de ce cas est illustré sur la figure (3.6).

Ce portrait de phase, montre un point selle fixé à l'origine entouré de deux noeuds asymptotiquement stables, symétriques autour de l'origine, et qui s'en éloignent lorsque $|a|$ augmente.

■ Pour $a = 0$

Dans ce cas, le système (3.15) se réduit à:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.19)$$

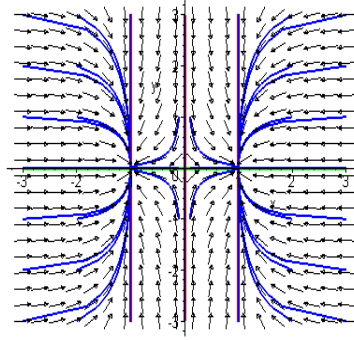


FIG. 3-6 – Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $a < 0$.

qui admet un seule point d'équilibre $O(0, 0)$. La matrice jacobienne a ce point est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Donc, le point $O(0, 0)$ est non hyperbolique. Pour déterminer la stabilité de ce point d'équilibre on va prendre la fonction de lyapunov suivante :

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

Puisque

$$\dot{V} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2(x^4 + y^2) < 0$$

Par conséquent, le point $O(0, 0)$ est asymptotiquement stable. le bassin d'attraction de ce point d'équilibre est \mathbb{R}^2 . Comme le montre la figure (3.7).

■ Pour $a > 0$

Le système (3.15) devient sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-a - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

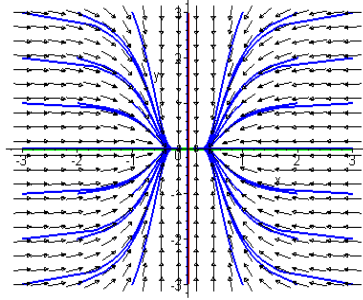


FIG. 3-7 – Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $a = 0$.

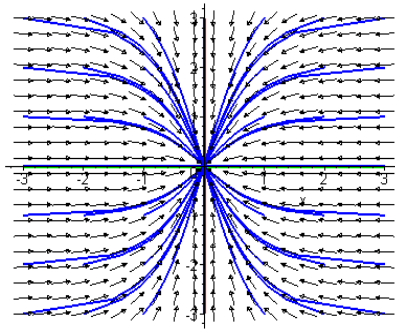


FIG. 3-8 – Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $a > 0$.

qui admet un seule point d'équilibre $O(0,0)$, La matrice Jacobienne en ce point est :

$$A(O) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives: $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -a$. Donc le point $O(0,0)$ est un noeud asymptotiquement stable, comme illustré sur la figure (3.8).

Le diagramme de bifurcation de cette bifurcation est donner dans la figure (3.9)

Pour la bifurcation fourche sous-critique on peut considéré le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-a - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.21)$$

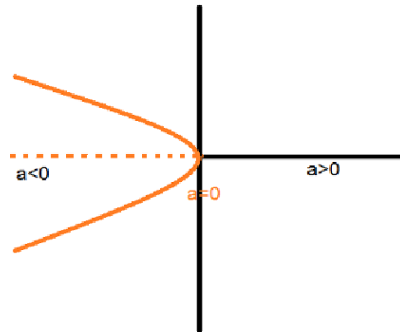


FIG. 3-9 – Diagramme de bifurcation de la bifurcation fourche super-critique.

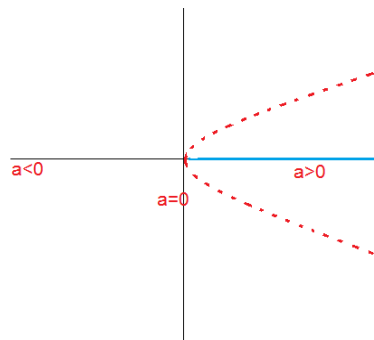


FIG. 3-10 – Diagramme de bifurcation de la bifurcation fourche sous-critique.

Ce système, admet une bifurcation sous-critique. Sont diagramme de bifurcation est illustré sur la figure (3.10).

Bifurcation verticale

Pour étudier cette bifurcation, on considère ce système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y \\ \dot{y} = -x + ay \end{cases} \quad (3.22)$$

Puisque le système (3.22) est linéaire, ce qui sera le cas pour toutes les bifurcations verticales.

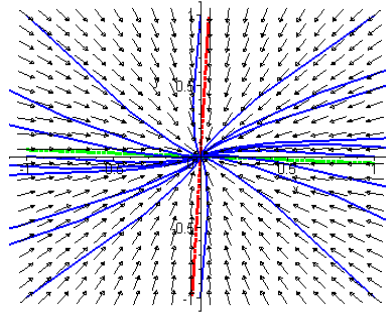


FIG. 3-11 – Portrait de phase de la bifurcation verticale pour $a < 0$.

On écrit le système (3.22) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Puisque le déterminant de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

est non nul ($a^2 + 1 \neq 0$) pour tout $a \in \mathbb{R}$. Le système (3.22) admet un point d'équilibre unique est $O(0, 0)$. La dynamique du système (3.22) dépend de la trace et du déterminant de la matrice A . Selon le signe de a . On distingue trois cas.

■ Pour $a < 0$

Dans ce cas, la trace de la matrice est égale à $2a < 0$, et le déterminant $a^2 + 1 > 0$. Ceci permet d'affirmer que l'origine est asymptotiquement stable et qu'elle correspond à un foyer, comme illustré sur la figure (3.11).

■ Pour $a = 0$

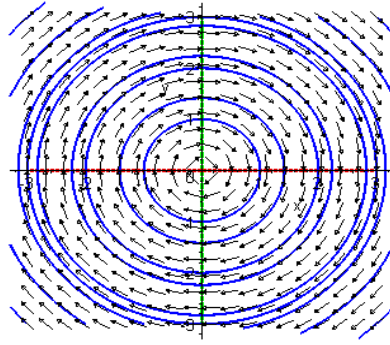


FIG. 3-12 – Portrait de phase de la bifurcation verticale pour $a = 0$.

Dans ce cas, le système (3.22) se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

La forme du système (3.23) correspond au représentant de la classe d'équivalence topologique des centres, comme illustré sur la figure (3.12).

■ Pour $a > 0$

Dans ce cas, la trace de la matrice vaut $2a > 0$. Le déterminant reste inchangé et strictement positif. le point $O(0,0)$ est donc un foyer instable. Cette bifurcation est appelée verticale. Pour $a = 0$, le point d'équilibre unique $O(0,0)$ change de nature. Pour $a < 0$, nous avons un foyer asymptotiquement stable. Pour $a > 0$, l'origine devient un foyer instable. Et pour $a = 0$, l'origine correspond à des centres. Cette bifurcation correspond à un système linéaire dont le déterminant est toujours positif et dont la trace change de signe. Le diagramme de la bifurcation de ce cas est illustré dans la figure (3.13).

La barre verticale en $a = 0$ signifie que le point d'équilibre peut prendre n'importe quelle valeur, on aura toujours des centres. La bifurcation verticale correspond à un système linéaire dont la trace de la matrice change de signe à déterminant positif. Nous allons maintenant étudier le cas d'un système non linéaire dont la partie linéaire se comporte de la même manière que précédemment. Cette situation correspond à la bifurcation

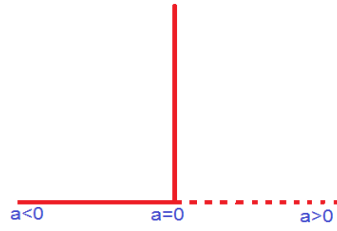


FIG. 3-13 – Diagramme de la bifurcation verticale.

de Poincaré-Andronov-Hopf.

Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf

Bifurcation super-critique de Poincaré-Andronov-Hopf Pour étudier cette bifurcation on considère le système dynamique :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{partie non linéaire}} \quad (3.26)$$

Le système (3.26) admet un point d'équilibre unique $O(0,0)$. On remarque que le système se compose de deux parties, partie linéaire (identique au système linéaire de la bifurcation verticale) et une partie non linéaire. La partie linéaire est donc caractérisée par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

La trace de la matrice est égale à $2a$, le déterminant à $a^2 + 1$ et le discriminant de l'équation caractéristique vaut -4 . Les valeurs propres de la matrice A sont complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = a \pm i$. La partie réelle et la partie imaginaire des valeurs propres sont : $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = a$, $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = \pm 1$. Lorsque le paramètre a change de signe,

l'origine passe de foyer asymptotiquement stable à foyer instable. Pour déterminer la stabilité de l'origine, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Puisque $\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2 + y^2)^2 < 0$. Par conséquent, la fonction V est une fonction de Lyapunov forte pour le système (3.26). Ainsi, les centres prévus par la linéarisation ne sont pas conservés et par le théorème de Lyapunov pour fonctions fortes, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable lorsque $a = 0$. Par ailleurs, le domaine d'attraction de l'origine est \mathbb{R}^2 . Pour préciser l'allure du portrait de phase, effectuons le changement en coordonnées polaires (r, θ) . Les coordonnées polaires sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (3.27)$$

Ces relations permettent d'effectuer le passage inverse c'est-à-dire des coordonnées polaires

vers les coordonnées rectangulaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Par ce changement le système (3.27) devient sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(a - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (3.28)$$

La solution de la deuxième équation de système (3.28) est de la forme :

$$\theta(t) = -t + \theta(0)$$

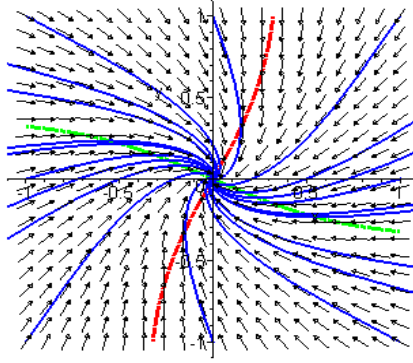


FIG. 3-14 – Portrait de phase de la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super-critique pour $a \leq 0$.

Où $\theta(0)$ est la valeur de l'angle à $t = 0$. Les trajectoires vont tourner autour de l'origine. La première équation gouverne la variation de la distance à l'origine. On détermine le nombre de points d'équilibre selon le signe du paramètre a :

■ pour $a \leq 0$

Dans ce cas le système admet un seul point d'équilibre $r = 0$ qui est asymptotiquement stable, comme le montre la fig (3.14).

■ Pour $a > 0$

Le système (3.28) admet deux points d'équilibre: $r = 0$ (stable) et $r = \sqrt{a}$ (asymptotiquement stable).

Le point $r = \sqrt{a}$ correspond donc à un cercle de rayon $r = \sqrt{a}$. Il s'agit d'un cycle limite asymptotiquement stable, comme représenté sur la figure (3.15).

■ Pour $a = 0$

Il ya un seul point d'équilibre $O(0, 0)$ qui est asymptotiquement stable.

■ Pour $a > 0$

Le seul point d'équilibre $O(0, 0)$ est un foyer instable entouré d'un cycle limite asymptotiquement stable de rayon $r = a$.

Le diagramme de bifurcation de cette bifurcation est représenté sur la figure (3.16).

Le point d'équilibre à l'origine devient instable, et s'entoure d'un cycle limite stable

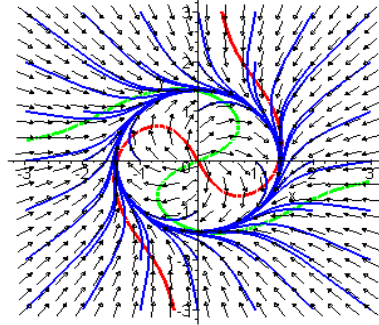


FIG. 3-15 – Portrait de phase de la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super-critique pour $a > 0$.

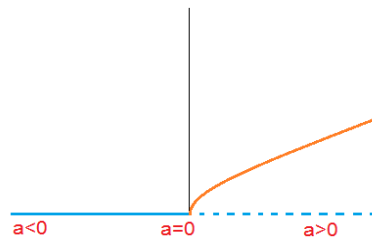


FIG. 3-16 – Diagramme de la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super-critique

dont l'amplitude (le rayon) augmente avec la racine carrée du paramètre de bifurcation. Lorsque le cycle limite créé à la bifurcation est asymptotiquement stable, on parle de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super-critique.

Bifurcation sous-critique de Poincaré-Andronov-Hopf Soit le système dynamique :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}}_{\text{partie linéaire}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{partie non linéaire}} \quad (3.29)$$

Pour la partie linéaire on les mêmes conclusions de cas précédent. Pour déterminé la stabilité de point d'équilibre $O(0,0)$, on va utilisé la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

On'a $\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)^2 > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, d'après le théorème de Lyapunov, le point d'équilibre $O(0,0)$ est cette fois instable lorsque $a = 0$.

Pour les autres cas on va utilisé les coordonnées polaires, on obtient le système :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(a + r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (3.30)$$

L'angle varie avec une vitesse angulaire constante $w = -1$. Le nombre de points d'équilibres de système varie selon le signe de paramètre a .

■ Pour $a < 0$

Le système (3.29) admet de points d'équilibres $r = 0$ (asymptotiquement stable) et $r = \sqrt{-a}$ (instable).

Celui-ci correspond à un cercle de rayon $r = \sqrt{-a}$ qui est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire $w = -1$ et entourant un foyer asymptotiquement stable. Il s'agit donc d'un cycle limite instable, ce cas est représenté sur la figure (3.17).

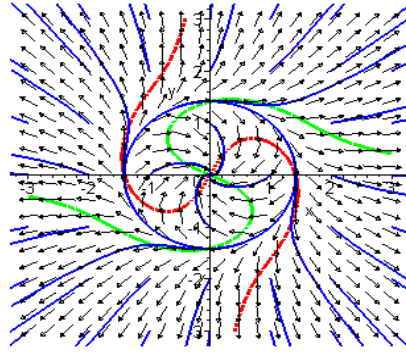


FIG. 3-17 – Portrait de phase de la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf sous-critique pour $a < 0$.

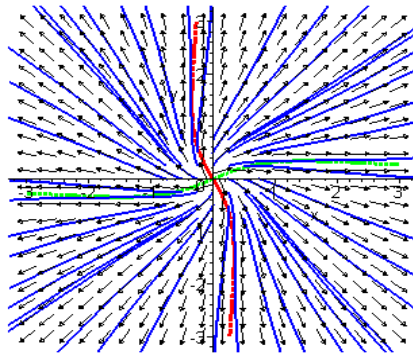


FIG. 3-18 – Portrait de phase de la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf sous-critique pour $a \geq 0$.

■ Pour $a \geq 0$

Le système admet un seul point d'équilibre $r = 0$ (instable), ce cas est représenté sur la figure (3.18).

Le diagramme de cette bifurcation est représenté sur la figure (3.19).

Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf

Le théorème de Poincaré-Bendixson n'est pas toujours facilement applicable, il nous permet de démontrer plus aisément l'existence de solutions périodiques correspondant à

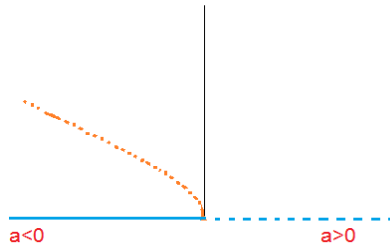


FIG. 3-19 – Diagramme de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf sous-critique.

un cycle limite. De plus, le théorème de Poincaré-Bendixson qui n'est valable que dans le plan, il est applicable seulement en dimension supérieure à deux.

Théorème 3.4 (*P-A-H*) :

Soit le système dynamique :

$$\begin{cases} x' = f(x, y, a) \\ y' = g(x, y, a) \end{cases} \quad (3.31)$$

Supposons que le système (3.31) a un seul point d'équilibre $P \left(x^*(a), y^*(a) \right)$. Soit $A(P)$ la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre. Supposons que les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme : $\lambda_{1,2} = \alpha(a) + i\beta(a)$. Soit une valeur a^* particulière du paramètre a pour laquelle on a $\alpha(a^*) = 0$, $\beta(a^*) \neq 0$ et $\frac{d\alpha}{da} \Big|_{a^*} \neq 0$. Alors si $\frac{d\alpha}{da} \Big|_{a^*} > 0$, trois sont possible :

1. Lorsque $a = a^*$ (à la bifurcation), il existe des trajectoires concentriques autour de point P . Le point d'équilibre P correspond alors à des centres. On parle de bifurcation de Hopf dégénérée.

2. Lorsque $a > a^*$, le point d'équilibre P est asymptotiquement stable, et il existe $a_0 > a^*$ tel que pour tout $a^* < a < a_0$ le point P est asymptotiquement stable, et il existe un cycle

limite instable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{|a - a^*|}$. On parle de bifurcation de Hopf sous-critique.

3. Lorsque $a < a^*$, le point d'équilibre P est instable, et il existe $a_0 < a^*$ tel que pour tout $a_0 < a < a^*$. Le point P est asymptotiquement stable, et il existe un cycle limite instable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{|a - a^*|}$. On parle de bifurcation de Hopf sous-critique.

Remarque 3.1 :

■ Dans le cas où $\frac{d\alpha}{da} \Big|_a < 0$, il faut inverser les conclusions, c'est-à-dire que le cycle limite asymptotiquement stable (resp. instable) apparaît pour des valeurs du paramètre inférieures (resp. supérieures) à a^* .

■ Une bifurcation de Hopf se produit donc, lorsque les valeurs propres du système linéaire traversent l'axe imaginaire, autrement dit que leur partie réelle peut s'annuler. Le système linéaire pour $a = a^*$ prévoit donc des centres. Dans le premier cas, les centres sont conservés, il s'agit de la bifurcation de P-A-H dégénérée.

■ Dans le second cas, le théorème prévoit l'existence d'un cycle limite asymptotiquement stable pour des valeurs du paramètre supérieures à a^* . Il s'agit d'une bifurcation de P-A-H supercritique. Enfin, dans le troisième cas, le théorème prévoit un cycle limite instable pour des valeurs du paramètre inférieures à a^* . Il s'agit d'une bifurcation de P-A-H sous-critique. Lorsqu'un cycle limite existe, son amplitude est nulle à la bifurcation et augmente en $\sqrt{|a - a^*|}$. L'existence d'un cycle limite est garantie jusqu'à une valeur a_0 qui dépendra de chaque cas, cette valeur assure que les valeurs propres sont complexes conjuguées. Dans le cas où il existe des centres à la bifurcation (cas 1), il est nécessaire de mettre en évidence une intégrale première présentant un extremum au point d'équilibre. Le théorème ne permet pas de déterminer lequel des trois cas. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes.

Utilisation d'une fonction de Lyapunov Dans le cas de la bifurcation de P-A-H super-critique générique de la subsection précédente, on se rappelle que $O(0, 0)$ (point

d'équilibre unique) est asymptotiquement stable à la bifurcation. Une première méthode pour démontrer que la bifurcation est super-critique (c'est-à-dire que le cycle limite est asymptotiquement stable) consiste à rechercher une fonction de Lyapunov permettant de démontrer la stabilité asymptotique du point d'équilibre $P(x^*(a), y^*(a))$ pour la valeur $a = a^*$.

Exemple 3.1 : Soit le système dynamique suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - ay - \frac{1}{3}y^3 \end{cases} \quad (3.32)$$

Le point $O(0,0)$ est l'unique point d'équilibre de système (3.32). La matrice Jacobienne de la partie linéaire de système (3.32) est:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i \frac{\sqrt{|4-a^2|}}{2}$$

■ Pour $-2 < a < 2$, $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -\frac{a}{2} = 0$ pour $a = a^* = 0$. par contre $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = \frac{\sqrt{|4-a^2|}}{2} = 1$ pour $a = 0$. De plus, nous avons $\frac{d\text{Re}(\lambda_{1,2})}{da}(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$. D'après le théorème de P-A-H, L'origine est un foyer instable pour $a < 0$, et un foyer stable.

■ Pour $a > 0$. Pour déterminer s'il existe un cycle limite asymptotiquement stable, utilisons la fonction définie positive suivante:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Sa dérivée par rapport au temps est: $\dot{V}(x, y) = -ay^2 - \frac{1}{3}y^4$. elle n'est pas toujours négative. V est donc une fonction de Lyapunov faible pour notre système, puisque

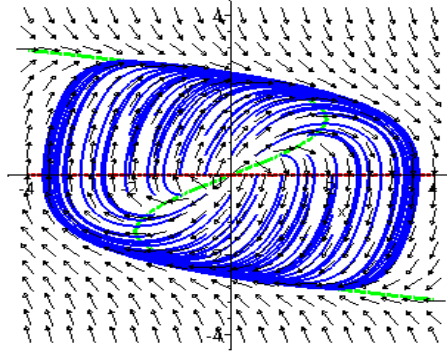


FIG. 3-20 – Portrait de phase pour une valeur de $a < 0$.

$\dot{V}(x, y) \leq 0$ pour tout $a \leq 0$. Par conséquent, en utilisant le théorème de Lyapunov pour la fonction faible, nous pouvons conclure la stabilité asymptotique de l'origine. Il est maintenant possible de conclure qu'il existe un cycle limite asymptotiquement stable entourant l'origine et que puisque $\frac{d\text{Re}(\lambda_{1,2})}{da} = -\frac{1}{2} < 0$, le cycle limite apparaît pour $a \leq 0$. Il s'agit donc d'une bifurcation de Hopf super-critique. Les deux isoclines verticale et horizontale sont la droite d'équation $y = 0$ qui passe par le point d'équilibre $O(0, 0)$, et la courbe d'équation $x = -ay - \frac{1}{3}y^3$ qui passe par l'équilibre $O(0, 0)$, et les deux points $(0, \sqrt{-3a})$, $(0, -\sqrt{-3a})$. Le point $O(0, 0)$ est l'unique point d'équilibre et correspond à un foyer instable s'entourant d'un cycle limite asymptotiquement stable, comme est représenté sur la figure (3.20).

Utilisation de l'indice de Marsden-McCacken Pour utiliser cette méthode, il faut mettre le système dynamique étudié sous une forme adéquate.

On va suivre les étapes suivantes :

1. Il faut ramener le système dynamique étudié à l'origine par le changement de variable :

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

Tel que (x_0, y_0) les coordonnées de point d'équilibre de système dynamique.

2. Faire un changement de variables pour mettre la matrice Jacobienne à l'origine sous sa forme de Jordan lorsque $a = \bar{a}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Il faut calculer l'indice I de Marsden-McCracken comme suit :

$$I = \bar{\omega}^*(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) + f_{xx}g_{xx} - f_{yy}g_{yy}$$

Où $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est calculée au point d'équilibre (l'origine) pour $a = \bar{a}$ et ainsi de suite.

On distingue trois cas :

- a. Si $I < 0$: le point d'équilibre est stable.
- b. Si $I > 0$: le point d'équilibre est instable.
- c. Si $I = 0$: on ne peut rien conclure par cette méthode.

Exemple 3.2 : On va appliquer cette méthode sur l'exemple (3.32). La matrice jacobienne de système dynamique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\bar{\omega} = 1$.

a aussi: $f_{xy} = f_{xx} = f_{yy} = f_{xxx} = f_{xyy} = 0$, $g_{xy} = g_{xx} = g_{yy} = g_{xxy} = 0$, et $g_{xxy} = -2$.

On obtient: $I = -2 < 0$. Ce qui confirme que le point d'équilibre est asymptotiquement stable. Il existe une bifurcation super-critique et un cycle limite asymptotiquement stable.

Bifurcation par doublement de la période

En mathématiques, une bifurcation par doublement de la période dans un système dynamique discret est une bifurcation dans laquelle le système passe à un nouveau com-

portement à deux fois la période du système d'origine. Autrement dit, il existe deux points tels que l'application de la dynamique de chacun des points donne l'autre point. Bifurcation par doublement de la période peuvent également se produire dans les systèmes de dynamiques continus, à savoir quand un nouveau cycle limite apparaît d'un cycle limite existante, et la période du nouveau cycle limite est le double de celle de l'ancien.

Définition 3.3 : Une application F_a dépendant d'un paramètre a admet une bifurcation par doublement de la période en a_1 s'il existe un intervalle ouvert $I \in \mathbb{R}$ contenant exactement un point fixe P_a de F_a tel que: $a \in [a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon]$:

1. le point fixe $P_{a_1-\epsilon}$ est attractif et $P_{a_1+\epsilon}$ n'a pas d'autres points fixes dans I .
2. le point fixe P_{a_1} est neutre et F_{a_1} n'a pas d'autres points fixes dans I .
3. le point fixe $P_{a_1+\epsilon}$ est répulsif et $F_{a_1+\epsilon}$ a une orbite périodique attractive de période 2 dans I .

Remarque 3.2 : Inverser $a_1 - \epsilon$ et $a_1 + \epsilon$ ne modifie pas la définition. La définition reste valable pour un point fixe répulsif qui devient attractif en créant une orbite périodique répulsive de période 2. Lorsque l'application F_a a une bifurcation par doublement de période en a_1 , on dit que $F_a^2 = F_a \circ F_a$ a une bifurcation fourche en a_1 . Plus généralement, on dit que F_a a une bifurcation par doublement de période en a_1 , si n -ième itérée $F_a^n = F_a \circ F_a \dots F_a$ vérifie les critères de la définition (3.3). En d'autres termes, si une orbite de longueur n change de stabilité en a_1 et crée une orbite de longueur $2n$ de stabilité initiale, alors il ya une bifurcation par doublement de la période en a_1 .

Exemple 3.3 : Le meilleur exemple sur cette bifurcation est la suite logistique:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad \text{avec } x_0 \in [0, 1] \quad \text{et } a \in [0, 4] \quad (3.33)$$

1. Si $3 < a < 1 + \sqrt{6} \simeq 3.45$, elle finit par osciller entre deux valeurs (la période est 2).

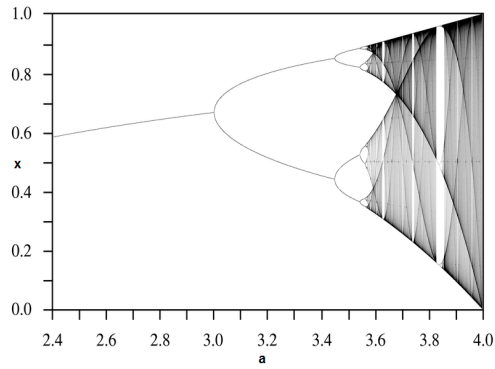


FIG. 3-21 – Le diagramme de la bifurcation doublement de période de suite la logistique pour $x_0 \in [0, 1]$ et $a \in [2.4, 4]$

2. Si $3.45 < a < 3.54$, elle finit par osciller entre quatre valeurs (la période est 4).
3. Si a est légèrement plus grand que 3,54, la population finit par osciller entre huit valeurs, puis 16, 32, etc.(la période est 8, 16, 32, etc).
4. Si $3.57 < a < 4$, la période est invisible (nous ne pouvons pas la déterminés).

Le diagramme de bifurcation (3.21) permet de résumer tout cela.

Bifurcation de Neimark-sacker

La bifurcation Neimark-sacker est la naissance d’une courbe invariante fermée à partir d’un point fixe dans les systèmes dynamiques avec le temps discret (cartes itérées), lorsque le point fixe change la stabilité via une paire de valeurs propres complexes avec le module de l’unité. La bifurcation peut être supercritique ou sous-critique, ce qui entraîne une courbe stable ou instable (dans un collecteur bidimensionnel invariant) invariante fermé, respectivement. Le critère pour vérifier si la bifurcation se produit est similaire à celle de procédure de Hopf avec quelques différences simple. Cette note se concentre sur le cas de $2D$.

Soit le système dynamique :

$$\dot{x} = f(x, a) \tag{3.34}$$

On suppose que le système (3.34) admet un seul point d'équilibre P_a est elle existe sur un intervalle des valeurs de a d'intérêt, et en outre la matrice jacobienne de la carte au point P_a a une paire de valeurs propres :

$$\lambda_a = R_a e^{i\theta_a}$$

Si, $a = a_0$

$$R_a = 1 \text{ et } 0 < \theta_{a_0} < \pi$$

Est

$$\frac{dR_a}{da}(a_0) \neq 0 \text{ et } e^{ik\theta_a(a_0)} \neq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

La bifurcation de Neimark-sacker se produit à $a = a_0$.

Exemple 3.4 : Soit l'application suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(1-y) \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (3.35)$$

Le système dynamique admet deux points fixes $P_1(0,0)$ et $P_2(1 - \frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a})$. La matrice Jacobienne au point P_2 admet une paire de valeur propres :

$$\lambda_a = \sqrt{a-1} e^{i \arg \operatorname{tg}(\sqrt{4a-5})}$$

Donc nous avons :

$$R_a = \sqrt{a-1} \text{ et } \theta_a = \arg \operatorname{tg}(\sqrt{4a-5})$$

On a $R_a = 1$ donne

$$a_0 = 2 \text{ et } \theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

Par conséquent

$$\frac{dR_a}{da}(a_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0, \quad e^{ik\theta_a(a_0)} = e^{ik\frac{\pi}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \neq 1$$

pour $k = 1, 2, 3, 4$ respectivement. Donc il ya une bifurcation de Neimark-sacker qui ce produit au point $P_2(1 - \frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a})$ pour $a = a_0 = 2$.

3.4 Bifurcation de hopf dans les systèmes dynamiques discrets

Il ya une contrepartie à temps discret de la bifurcation de Hopf. Il se produit lorsqu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de l'application traverse le cercle unité. Il est un peu plus compliqué que la version pour les flux. Le théorème correspondant a été prouvé de façon indépendante par Naimark et sacker et la bifurcation est donc parfois appelé la bifurcation Naimark-sacker.

Considérons la carte planaire $F_\mu = (f_\mu, g_\mu) : IR^2 \rightarrow IR^2$, de paramètre μ , et supposons qu'il a un point fixe (x_0, y_0) , qui peut dépendre de μ . Supposons en outre que, à ce point fixe DF_μ (la matrice jacobienne) a une paire de valeurs propres complexe conjugué, $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu) = |\lambda(\mu)| e^{\pm i\omega(\mu)}$, et que, pour une certaine valeur de $\mu = \mu_0$, les conditions suivantes sont satisfaites:

1. Condition de non-hyperbolicité

$$|\lambda(\mu_0)| = 1$$

2. Condition de résonance non-forte

$$\lambda^k(\mu_0) \neq 1 \text{ pour } k = 1, 2, 3, 4$$

3. Condition de transversalité

$$\left. \frac{d|\lambda(\mu)|}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$$

4. Conditions de généricité

$$a \neq 0, \text{ où } a = -\operatorname{Re} \left[\frac{(1 - 2e^{ic})e^{-2ic}}{1 - e^{ic}} c_{11}c_{20} \right] - \frac{1}{2} |c_{11}|^2 - |c_{02}|^2 + \operatorname{Re}(e^{-ic}c_{21}),$$

$$c = \omega(\mu_0), \operatorname{sgn}(\omega(\mu_0)) = \operatorname{sgn} \left[\left. \frac{\partial g_\mu}{\partial x} \right|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0) \right]$$

Et

$$c_{20} = \frac{1}{8} [(f_{xx} - f_{yy} + 2g_{xy}) + i(g_{xx} - g_{yy} - 2f_{xy})].$$

$$c_{11} = \frac{1}{4} [(f_{xx} + f_{yy}) + i(g_{xx} + g_{yy})].$$

$$c_{02} = \frac{1}{8} [(f_{xx} - f_{yy} - 2g_{xy}) + i(g_{xx} - g_{yy} + 2f_{xy})].$$

$$c_{21} = \frac{1}{16} [(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + i(g_{xxx} + g_{xyy} - f_{xxy} - f_{yyy})].$$

Puis une courbe fermée simple invariant bifurque soit en $\mu > \mu_0$ ou $\mu < \mu_0$, selon les signes de d et a . Ce cercle invariant est attractif, si elle bifurque dans la région de l'origine où μ est instable (une bifurcation surcritique) et répulsif, si elle bifurque dans la région dont l'origine est stable (une bifurcation sous-critique). Notons que ce résultat ne dit rien sur la dynamique sur le cercle invariant. En fait, la dynamique sur le cercle a la complexité des cartes de cercle dits (y compris la possibilité d'avoir attirer les orbites périodiques sur le cercle invariant), et dépend de sensibilité sur toute la perturbation (voir l'exemple ci-dessous). Par conséquent, contrairement à la bifurcation de Hopf pour les systèmes continus, la bifurcation de Hopf pour les applications est pas structurellement stable.

Exemple 3.5 : *Considérons la famille des applications suivantes:*

$$F_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + d\mu + a(x^2 + y^2)) \times \quad (3.36)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(c + b(x^2 + y^2)) & -\sin(c + b(x^2 + y^2)) \\ \sin(c + b(x^2 + y^2)) & \cos(c + b(x^2 + y^2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

L'origine est un point fixe pour chaque μ . La matrice jacobienne de F_μ à ce point fixe est :

$$DF_\mu(0,0) = (1 + d\mu) \begin{pmatrix} \cos c & -\sin c \\ \sin c & \cos c \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

et les valeurs propres sont :

$$\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = (1 + d\mu)e^{\pm ic} \quad (3.38)$$

La carte prend un simple forme en coordonnées polaires $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{artg}(\frac{y}{x})$:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r(1 + d\mu + ar^2) \\ \theta + c + br^2 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Cette carte codimension-5 est en fait la forme normale de la bifurcation de Hopf jusqu'à les termes cubiques (soit, par un changement en douceur des coordonnées que nous pouvons apporter toute F_μ dans cette forme (plus des termes d'ordre supérieur)). Les paramètres a , c et d dans (4.35) et (4.38) sont précisément ceux qui sont définis dans les conditions ci-dessus. Nous choisissons $a = -0,02$, $b = c = 0,1$, $d = 0,2$. La carte est ensuite soumis à une bifurcation de Hopf supercritique à $\mu = 0$, comme illustré dans la figure (3.22).

Pour $\mu > 0$ suffisamment petit, nous avons un cercle invariant attractif donnée par : $r = \sqrt{-\frac{d\mu}{a}}$ (fig). Sur le cercle de la carte est donnée par : $\theta \rightarrow \theta + c - \frac{bd\mu}{a}$. Cela est tout simplement une rotation d'un angle fixe : $\phi = c - \frac{bd\mu}{a}$, donnant des orbites périodiques si $\frac{2\pi}{\phi} \in \mathbb{Q}$, ou des orbites denses (irrationnelles) si, $\frac{2\pi}{\phi} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

3.4.1 Dégénération de la bifurcation de Hopf

Si, une ou plusieurs des conditions énumérées pour une bifurcation de Hopf ne sont pas satisfaits (par exemple en raison de symétrie), on peut encore avoir l'émergence d'une orbite périodique, mais quelques-unes des conclusions du théorème peut cesser d'être vrai. La bifurcation est alors appelé la bifurcation de Hopf dégénéré. Par exemple, si la condition de transversalité est pas respecté le point fixe ne peut pas changer la stabilité, ou des solutions périodiques multiples peut bifurquer. Un cas important est fourni par un système hamiltonien, qui a des valeurs propres complexes viennent dans la symétrie quadruples et donc, la condition de transversalité ne peut être satisfaite. Voilà pourquoi la bifurcation analogue dans les systèmes hamiltoniens est beaucoup plus compliqué. Pour une chose, il a besoin d'un espace de phase de quatre dimension.

3.4.2 Généralisation en dimension supérieure

Dans cette sous section, nous présentons l'étude des bifurcations en dimensions supérieure où égale à deux. Il s'agit d'une généralisation de l'étude des bifurcations présentées précédemment. Prenons par exemple, une équation dans espace des phases de trois dimension. Soit $X(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ un vecteur vérifiant l'équation $X' = F(X)$. La démarche est toujours la même: recherche des points d'équilibre, étude de la stabilité de ces points, et diagramme de bifurcation.

En cherche les points X^* tels que, $F(X^*) = 0$. L'étude de la stabilité s'effectue en introduisant une perturbation vectorielle: $U = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ au voisinage de X^* . Puis on utilise un développement de Taylor de F à l'ordre 1:

$$X' = U' = F(X^* + U) = A.U + O(U^2)$$

Où, A désigne la matrice jacobienne de F évaluée en X^* . Supposons dans un premier temps, que la matrice A est diagonalisable, c'est-à-dire, son polynôme caractéristique associé possède alors, trois racines non nulles, dont l'une est réelle, et les deux autres

sont soit réelles, soit complexes conjuguées. Notons $\lambda_k = \rho_k + i\omega_k$ les valeurs propres de A pour $k = 1, 2, 3$.

Ainsi, chaque composante u_k vérifient l'équation $u_k' = \lambda_k u_k$, qui admet des solutions du type $u_k(t) = u_k(0)e^{\lambda_k t}$.

Comme $|e^{\lambda_k t}| = |e^{\rho_k t}|$, on a alors, les deux cas suivants :

1. Si, $\rho_k < 0$, le point d'équilibre est stable dans la direction du vecteur propre associé à λ_k .
2. Si, $\rho_k > 0$, le point d'équilibre est instable dans la direction du vecteur propre associé à λ_k .

On se ramène pour chaque direction propre aux cas précédemment étudiés.

Dans le cas où il ya une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées. la représentation des valeurs propres de la matrice jacobienne A dans le plan complexe permet d'étudier le comportement du système. On a alors, les deux cas suivants :

Le premier cas :

Soit, le système se déstabilise par passage de l'axe des ordonnées de sa valeur propre réelle.

1. Soit, il n'y a pas eu de brisure de la symétrie dans l'évolution du système alors, il y a eu une bifurcation noeud-col.
2. Soit, il y avait effectivement une brisure de la symétrie alors, on est en une présence d'une bifurcation fourche.

Le deuxième cas :

Soit il perd sa stabilité par passage des deux valeurs propres complexes conjuguées alors, il y a eu une bifurcation de Hopf.

3.5 Analyse dynamique d'un système non linéaire en trois dimensions

Dans cette subsection, on va faire une analyse dynamique d'un système non linéaire en trois dimensions. Premièrement par la projection sur le plan, et deuxièmement par le choix du paramètre de bifurcation appropriée. Pour simplifier cette étude considérons le système dynamique non linéaire de codimension-7 suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1x_3 + b \\ \frac{dx_3}{dt} = c_1x_1 + c_2x_2x_3 + c \end{cases} \quad (3.40)$$

Où, $a_i \neq 0, (1 \leq i \leq 3)$ $c_i \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$ sont des paramètres réels.

Nous allons étudier d'abord un sous-système du système d'origine, en analysant le comportement dynamique de celui-ci par l'utilisation d'une dimension inférieure 2-D. Cela aboutira à l'étude finale du comportement dynamique.

Par la projection sur le plan $(x_1 - x_2)$, on obtient le nouveau système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1x_3 + b \end{cases} \quad (3.41)$$

Où x_3 est considérée comme une fonction connue de la variable temps t . Lorsque $t = t_0$ le système (3.41) est à deux dimensions linéaires à coefficient constants. La matrice jacobéenne de système (3.41) est :

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(J) = -a_2x_3$$

■ Pour: $x_3 \neq 0$ on a: $\det(J) \neq 0$.

Le point d'équilibre de système (3)

Le point d'équilibre de système (3.41) ce produit de

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$$

D'où

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ x_1x_3 + b = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Avec un simple calcul on obtient

$$x_1^e = -\frac{b}{x_3} \text{ et } x_2^e = \frac{a_1b - a_3x_3^2}{a_2x_3}$$

Donc, le système (3.41) à un seule point d'équilibre $e \left(-\frac{b}{x_3}, \frac{a_1b - a_3x_3^2}{a_2x_3} \right)$. Par la translation :

$$\begin{cases} x = x_1 - x_1^e \\ y = x_2 - x_2^e \end{cases}$$

On peut ramener le point e à l'origine O .

Classification de point d'équilibre suivant les valeurs propres

À partir de la matrice J on obtient :

$$\det(\lambda I - J) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2x_3$$

Posons

$$\det(\lambda I - J) = 0$$

D'où

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2x_3 = 0 \quad (3.43)$$

■ Supposons que: $a_2 > 0$

1. Pour $x_3 > 0$, l'équation(3.43) a deux solutions λ_1 et λ_2 tel que: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ alors, le point d'équilibre e est un point "selle". La courbe de la solution dans le plan $x_1 - x_2$ est représentée sur Figure (3.22 (a)) , où les directions des orbites sont représentées par des flèches à l'augmentation du temps t , lorsque t tend vers l'infini seulement deux orbites se dirigent vers le point d'équilibre e , tandis que les autres divergent à l'infini suivant deux directions différentes.
2. Pour $a_1 < 0$, et lorsque $x_3 < -\frac{a_1^2}{4a_2}$. L'équation (3.43) possède deux solutions λ_1 et λ_2 tel que: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, alors, le point e est un "noeud", ce qui explique la tendance des courbes de solutions sur le plan $x_1 - x_2$ vers l'infini à l'exception de deux orbites qui tendent vers le point e . Cela est présenté sur Figure (3.22 (b)) ci dessous: Où le sens des orbites est représenté par des flèches.
3. Pour $a_1 < 0$, et lorsque $-\frac{a_1^2}{4a_2} < x_3 < 0$. L'équation (3.43) a deux solutions complexes conjuguées avec une partie réelle négative, le point d'équilibre e est un "puits en spirale" (foyer). La courbe des solutions sur le plan $x_1 - x_2$ est représenté sur Figure (3.22 (c)), où le sens de la flèche est la direction de l'orbite à l'augmentation du temps t . Lorsque t tend vers l'infini, toutes les orbites en spirales autour du point e .

La corrélation entre la variable temps t et la fonction $x_3(t)$

On remarque que lorsque t tend vers l'infini, l'orbite $x_3(t)$ coupe les deux droites $x_3 = -\frac{a_1^2}{4a_2}$ et $x_3 = 0$ alternativement à plusieurs reprises, d'où la division de l'axe x_3 en trois domaines disjoints $(-\infty, -\frac{a_1^2}{4a_2})$, $(-\frac{a_1^2}{4a_2}, 0)$ et $(0, +\infty)$, ce qui implique la possession du système (3.41) de différents comportements dynamiques dans les trois domaines ci-dessus. Quand t tend vers l'infini le système (3.41) change de comportement

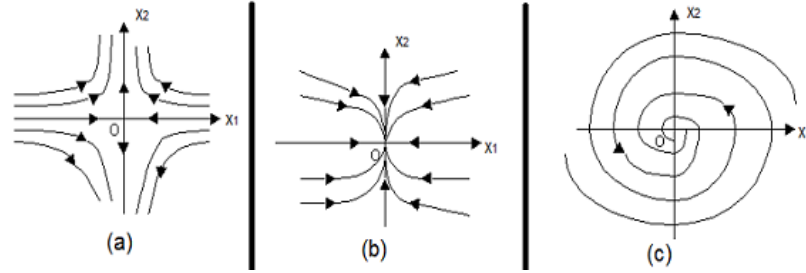


FIG. 3-22 – Le point d'équilibre e est un point "selle" (a), un "noeud" (b), un "puits en spirale" (c).

dynamique et $x_3(t)$ passe par ces domaines de façon répétée, conduisant à des dynamiques complexes tels que l'apparition des bifurcations et chaos. Il est noté que le système (3.41) dépend de temps t lorsque $x_3(t)$ varie dans le temps. On peut vérifier que les deux systèmes (3.40) et (3.41) sont chaotiques ou la fonction $x_3(t)$ passe par les lignes droites: $x_3 = -\frac{a_1^2}{4a_2}$ et $x_3 = 0$, en alternance.

3.5.1 Résumé

Nous avons présenté une méthode pratique pour distinguer les orbites chaotiques, périodiques et quasi-périodiques. Dans cette section, on a étudié d'abord un sous-système du système d'origine, en analysant le comportement dynamique de celui-ci par l'utilisation d'une dimension inférieure (D-2). Cela aboutira à l'étude finale du comportement dynamique.

3.5.2 Le point d'équilibre de système (2)

Passons maintenant à chercher le point d'équilibre du système (3.41), il résulte de la première et la deuxième équation.

$$x_3 = -\frac{b}{x_1} \quad (3.44)$$

Et

$$x_2 = \frac{a_3 b - a_1 x_1^2}{a_2 x_1} \quad (3.45)$$

Une substitution de (3.44) et (3.45) dans la troisième équation de système (3.40) donne alors, une équation algébrique en fonction de x_1 comme suit :

$$a_2c_1x_1^3 + (a_1bc_2 + a_2c)x_1^2 - a_3c_2b = 0 \quad (3.46)$$

Laisser

$$a_1bc_2 + a_2c = 0 \text{ ou } c = -\frac{a_1c_2}{a_2}b \quad (3.47)$$

Puis sous la condition (3.47), l'équation (3.46) à une racine réelle unique :

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{a_3c_2}{a_2c_1}b} \quad (3.48)$$

Nous obtenons ainsi le point d'équilibre $E(x_1, x_2, x_3)$ du système (3.40).

Linéarisation de système (2) autour de point $E(x_1, x_2, x_3)$

La stabilité de l'état d'équilibre (point E) est analysée en linéarisant le système (3.40) à E en vertu de la transformation linéaire :

$$\begin{cases} x = x_1 - x_0 \\ y = x_2 - y_0 \\ z = x_3 - z_0 \end{cases} \quad (3.49)$$

Avec

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt[3]{\frac{a_3c_2}{a_2c_1}b} \\ y_0 = \frac{a_3b - a_1x_1^2}{a_2x_1} \\ z_0 = -\frac{b}{x_1} \end{cases} \quad (3.50)$$

Le système (3.40) devient sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + a_2y + a_3z \\ \frac{dy}{dt} = z_0x + x_0z + xz \\ \frac{dz}{dt} = c_1x + c_2z_0y + c_2y_0z + c_2yz \end{cases} \quad (3.51)$$

La matrice Jacobienne $A(E)$ de système (3.51) est :

$$A(E) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ z_0 & 0 & x_0 \\ c_1 & c_2z_0 & c_2y_0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C \quad (3.53)$$

Avec

$$\begin{cases} A = -(c_2y_0 + a_1) \\ B = bc_2 - a_3c_1 + a_1c_2y_0 - a_2z_0 \\ C = a_2c_1x_0 \end{cases} \quad (3.54)$$

Ensuite, les conditions de *Routh-Hurwitz* conduisent à la condition que les parties réelles des racines sont négatives si et seulement si: $A > 0$, $C > 0$ et $AB - C > 0$. Notons que les coefficients du polynôme (3.53) sont tous positifs. Donc $P(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda > 0$, par conséquent, le seul point d'équilibre est instable ($rel(\lambda) > 0$). On suppose que $P(\lambda)$ admet deux valeurs propres complexes conjugués. On les notes: $\lambda_1 = +i\omega$ et $\lambda_2 = -i\omega$.

Puisque la somme des trois racines de la cubique P est

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -A \quad (3.55)$$

Nous avons donc, $\lambda_3 = -A = a_1 + c_2y_0$ qui se trouve sur la marge de stabilité de système

(3.40).

De l'égalité (3.55) on a:

$$\lambda_3 = \frac{-c_2 a_1 x_0^2 + a_1 a_2 x_0 + c_2 a_3 b}{a_2 x_0} \quad (3.56)$$

Puis nous avons:

$$P(\lambda_3) = -AB + C = 0 \quad (3.57)$$

Avec

$$\begin{cases} A = \frac{a_2 a_3 c_1 c_2 x_0^2 + a_1 a_3 b c_2^2 x_0 - a_1 a_2 a_3 c_2 b}{a_2 a_3 c_2 b} \\ B = \frac{(a_1 a_2 a_3 c_1 c_2 + a_2^3 c_1) x_0^2 - a_1^2 a_3 b c_2^2 x_0 + a_3 b c_2 (a_2 b c_2 - a_2 a_3 c_1)}{a_2 a_3 c_2 b} \\ C = a_2 c_1 x_0 \end{cases} \quad (3.58)$$

On rappelle que:

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{a_3 c_2}{a_2 c_1} b}$$

Une substitution de (3.57) dans (3.58) et avec un calcul très compliqué on obtient:

$$\begin{aligned} & (a_2^2 a_3 b c_1 c_2^3 - a_2^2 a_3^2 c_1^2 c_2^2 - a_1^3 a_3 b c_1^4 - a_1^2 a_2^2 a_3 c_1 c_2 - a_1 a_2^4 c_1) x_0^2 \\ & + (-a_1 a_2 a_3^2 b c_1 c_2^3 - a_2^3 a_3 b c_1 c_2^2 + a_1 a_2 a_3 b^2 c_2^4 - a_1 a_2 a_3^2 b c_1 c_2^2 + a_1^3 a_2 a_3 b c_2^2 + a_2^3 a_3 b c_1 c_2^2) x_0 \\ & - a_1^2 a_3^2 b^2 c_2^4 + a_1 a_3^2 b^2 c_1 c_2^4 + a_1 a_2^2 a_3 b c_2^3 - a_1 a_2^2 a_3 b^2 c_2^2 + a_1 a_2^2 a_3^2 b c_1 c_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Où

$$\alpha a_1^3 + \beta a_1^2 + \gamma a_1 + \delta = 0 \quad (3.60)$$

Avec

$$\begin{cases} \alpha = -a_3 b c_1^4 x_0^2 + a_2 a_3 b c_2^2 x_0 \\ \beta = -a_2^2 a_3 c_1 c_2 x_0^2 - a_3^2 b^2 c_2^4 \\ \gamma = -a_2^4 c_1 x_0^2 + (-a_2 a_3^2 b c_1 c_2^3 + a_2 a_3 b^2 c_2^4 - a_2 a_3^2 b c_1 c_2^2) x_0 \\ \quad + a_3^2 b^2 c_1 c_2^4 + a_2^2 a_3 b c_2^3 - a_2^2 a_3 b^2 c_2^2 + a_2^2 a_3^2 b c_1 c_2 \\ \delta = (a_2^2 a_3 b c_1 c_2^3 - a_2^2 a_3^2 c_1^2 c_2^2) x_0^2 + (-a_2^3 a_3 b c_1 c_2^2 + a_2^3 a_3 b c_1 c_2^2) x_0 \end{cases} \quad (3.61)$$

Supposant $\alpha > 0$, et que l'équation (3.60) a une seule solution $a_1 = a_0$. Pour $a_1 = a_0$ l'équilibre E va perdre sa stabilité, donc une bifurcation de hopf peut se produire. En utilisant les deux conditions (3.56), (3.57) et pour $a_1 = a_0$ le polynôme $P(\lambda)$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(\lambda) = (\lambda - a_0 - c_2 y_0)(\lambda^2 + \tilde{B}) \quad (3.62)$$

Avec

$$\tilde{B} = \frac{(a_0 a_2 a_3 c_1 c_2 + a_2^3 c_1) x_0^2 - a_0^2 a_3 b c_2^2 x_0 + a_3 b c_2 (a_2 b c_2 - a_2 a_3 c_1)}{a_2 a_3 c_2 b} \quad (3.63)$$

Il est évident que l'équation $P(\lambda) = 0$ a trois racines, une négative, $\lambda_1 = a_0 + c_2 y_0$ et une paire de racines purement imaginaires conjuguées :

$$\lambda_{2,3} = \pm i \sqrt{\frac{(a_0 a_2 a_3 c_1 c_2 + a_2^3 c_1) x_0^2 - a_0^2 a_3 b c_2^2 x_0 + a_3 b c_2 (a_2 b c_2 - a_2 a_3 c_1)}{a_2 a_3 c_2 b}} = \pm i d \quad (3.64)$$

Différencier les deux côtés de l'équation $P(\lambda) = 0$ par rapport à a_1 . On obtient :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{c_2 x_0}{a_2}\right) \lambda^2 + \left(\frac{2a_1 b c_2 x_0 - a_2 c_1 x_0^2}{a_2 b}\right) \lambda}{3\lambda^2 + 2A\lambda + B} \quad (3.65)$$

D'où

$$\frac{d \operatorname{Re} \lambda}{da_1} \Big|_{a_1=a_0} = -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{c_2 x_0}{a_2} - 1\right) d^2 + (a_0 + c_2 y_0) \left(\frac{2a_0 b c_2 x_0 - a_2 c_1 x_0^2}{a_2 b}\right)}{d^2 + (a_0 + c_2 y_0)^2} < 0 \quad (3.66)$$

Et

$$\frac{d \operatorname{Im} \lambda}{da_1} \Big|_{a_1=a_0} = -\frac{1}{2} d \frac{\left(\frac{2a_0 b c_2 x_0 - a_2 c_1 x_0^2}{a_2 b}\right) + (a_0 + c_2 y_0) \left(1 - \frac{c_2 x_0}{a_2}\right)}{d^2 + (a_0 + c_2 y_0)^2} \quad (3.67)$$

Conclusion 3.5 : *Selon le théorème de bifurcation de hopf, nous pouvons conclure que:*

1. a_0 est la valeur critique.
2. Le point d'équilibre E est stable lorsque $a_1 < a_0$, et il existe des solutions périodiques

lorsque $a_1 > a_0$.

3. Quand a_1 traverse (franchit) la valeur $a_1 = a_0$, le système (3.40) subit une bifurcation de hopf à l'équilibre E .

3.5.3 Propriété de la bifurcation de hopf

Dans cette section, on va tirer les formules explicites pour déterminer l'orientation, la stabilité et la période de ces solutions périodiques de bifurcation d'équilibre E pour la valeur critique $a_1 = a_0$ en utilisant des techniques de la forme normale.

3.5.4 Bifurcations super-critique et sous-critique

Laissez les vecteurs propres correspondant aux valeur propres $\lambda_1 = a_0 + c_2 y_0$ et $\lambda_2 = id$ soit v_1 et $v_2 + iv_3$. Par des calculs direct, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{a_2 c_1 x_0^2 - a_0 a_2 b}{-a_0^2 c_2 x_0^2 + (a_0^2 a_2 + a_2 b c_2) x_0 + a_0 a_3 b c_2} \\ \frac{(a_2^2 c_1 + a_0 b c_2^2) x_0^2 - a_3 b^2 c_2^2}{a_0 a_2^2 x_0^2 - a_2 a_3 b c_2 x_0} \end{array} \right) \\ v_2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{-a_0 a_2 x_0^2 + a_3 d^2 x_0 - a_2 a_3 b}{a_2^2 x_0^2 + a_3^2 d^2} \\ \frac{c_2 b^2 (b c_2 - d^2) - c_1 c_2^2 x_0 y_0}{((b c_2 - d^2) x_0)^2 + (c_2 d x_0 y_0)^2} \end{array} \right) \\ v_3 \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{d(a_3 b^2 c_2 + a_0 a_3 c_1 x_0 + a_3^2 b c_1)}{a_2 a_3 b^2 c_2 + a_3^2 c_1 d^2 x_0} \\ \frac{(c_1 c_2 b - c_1 d^2) x_0^2 + c_2^2 b^2 y_0}{((b c_2 - d^2) x_0)^2 + (c_2 d x_0 y_0)^2} \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (3.68)$$

On pose

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ \frac{a_2 c_1 x_0^2 - a_0 a_2 b}{-a_0^2 c_2 x_0^2 + (a_0^2 a_2 + a_2 b c_2) x_0 + a_0 a_3 b c_2} & \frac{-a_0 a_2 x_0^2 + a_3 d^2 x_0 - a_2 a_3 b}{a_2^2 x_0^2 + a_3^2 d^2} & \frac{d(a_3 b^2 c_2 + a_0 a_3 c_1 x_0 + a_3^2 b c_1)}{a_2 a_3 b^2 c_2 + a_3^2 c_1 d^2 x_0} \\ \frac{(a_2^2 c_1 + a_0 b c_2^2) x_0^2 - a_3 b^2 c_2^2}{a_0 a_2^2 x_0^2 - a_2 a_3 b c_2 x_0} & \frac{c_2 b^2 (b c_2 - d^2) - c_1 c_2^2 x_0 y_0}{((b c_2 - d^2) x_0)^2 + (c_2 d x_0 y_0)^2} & \frac{(c_1 c_2 b - c_1 d^2) x_0^2 + c_2^2 b^2 y_0}{((b c_2 - d^2) x_0)^2 + (c_2 d x_0 y_0)^2} \end{array} \right)$$

Pour faciliter les calculs, on remplace la matrice P par la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Avec

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{a_2c_1x_0^2 - a_0a_2b}{-a_0^2c_2x_0^2 + (a_0^2a_2 + a_2bc_2)x_0 + a_0a_3bc_2} \\ \alpha_2 = \frac{-a_0a_2x_0^2 + a_3d^2x_0 - a_2a_3b}{a_2^2x_0^2 + a_3^2d^2} \\ \alpha_3 = \frac{d(a_3b^2c_2 + a_0a_3c_1x_0 + a_3^2bc_1)}{a_2a_3b^2c_2 + a_3^2c_1d^2x_0} \end{cases} \quad (3.70)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{(a_2^2c_1 + a_0bc_2^2)x_0^2 - a_3b^2c_2^2}{a_0a_2^2x_0^2 - a_2a_3bc_2x_0} \\ \beta_2 = \frac{c_2b^2(bc_2 - d^2) - c_1c_2^2x_0y_0}{((bc_2 - d^2)x_0)^2 + (c_2dx_0y_0)^2} \\ \beta_3 = \frac{(c_1c_2b - c_1d^2)x_0^2 + c_2^2b^2y_0}{((bc_2 - d^2)x_0)^2 + (c_2dx_0y_0)^2} \end{cases} \quad (3.71)$$

Ensuite, effectuer la transformation (3.73) sur le système (3.51).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

De manière à obtenir

$$\begin{cases} u_1 = M_1x + M_2y + M_3z \\ u_2 = N_1x + N_2y + N_3z \\ u_3 = K_1x + K_2y + K_3z \end{cases} \quad (3.73)$$

D'où

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -du_2 + F(u_1, u_2, u_3) \\ \frac{du_2}{dt} = du_1 + G(u_1, u_2, u_3) \\ \frac{du_3}{dt} = \lambda u_3 + H(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad (3.74)$$

Avec

$$\begin{cases} F(u_1, u_2, u_3) = M_2 f(u_1, u_2, u_3) + M_3 c_2 g(u_1, u_2, u_3) \\ G(u_1, u_2, u_3) = N_2 f(u_1, u_2, u_3) + N_3 c_2 g(u_1, u_2, u_3) \\ H(u_1, u_2, u_3) = K_2 f(u_1, u_2, u_3) + K_3 c_2 g(u_1, u_2, u_3) \\ f(u_1, u_2, u_3) = (u_1 + u_2)(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3) \\ g(u_1, u_2, u_3) = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3) \end{cases} \quad (3.75)$$

$$\begin{cases} M_1 = \left(1 + \frac{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1}{(\beta_3 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)}\right) \\ M_2 = -\frac{\beta_3}{(\beta_3 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ M_3 = \frac{\alpha_3}{(\beta_3 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{cases} \quad (3.76)$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3}{\beta_3(\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_3(\beta_2 - \beta_1)} \\ N_2 = \frac{\beta_3}{\beta_3(\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_3(\beta_2 - \beta_1)} \\ N_3 = -\frac{\alpha_3}{\beta_3(\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_3(\beta_2 - \beta_1)} \end{cases} \quad (3.77)$$

$$\begin{cases} K_1 = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2}{\beta_3(\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_3(\beta_2 - \beta_1)} \\ K_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_3(\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_3(\beta_2 - \beta_1)} \\ K_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_3(\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_3(\beta_2 - \beta_1)} \end{cases} \quad (3.78)$$

Appliquer maintenant la méthode de Auchmuty et Nicolis (Hassard et al.1981, Zhang,1991), à partir de système(3.75), nous pouvons calculer les quantités suivantes à $a_1 = a_0$ et $O(0, 0, 0)$.

Calcul de quantité g_{11}

On a :

$$g_{11} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} + i \left(\frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u_2^2} \right) \right]$$

D'où

$$g_{11} = \frac{1}{2} [(M_2\beta_1 + M_2\beta_2 + M_3c_2\alpha_1\beta_1 + M_3c_2\alpha_2\beta_2)] + \frac{1}{2} i [(N_2\beta_1 + N_2\beta_2 + N_3c_2\alpha_1\beta_1 + N_3c_2\alpha_2\beta_2)] \quad (3.79)$$

Calcul de quantité g_{02}

On a :

$$g_{02} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial u_1 \partial u_2} + i \left(\frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial u_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} \right) \right]$$

D'où

$$g_{02} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} M_2(\beta_1 - \beta_2) + M_3c_2(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) - N_2(\beta_1 + \beta_2) - \\ N_3c_2(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2) \end{array} \right] + \frac{1}{2} i \left[\begin{array}{c} N_2(\beta_1 - \beta_2) + N_3c_2(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) + M_2(\beta_1 + \beta_2) + \\ M_3c_2(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2) \end{array} \right] \quad (3.80)$$

Calcul de quantité g_{20}

On a :

$$g_{20} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial u_1 \partial u_2} + i \left(\frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial u_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} \right) \right]$$

D'où

$$g_{20} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_2(\beta_1 - \beta_2) + M_3c_2(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) + M_2(\beta_1 + \beta_2) + \\ M_3c_2(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} i \begin{bmatrix} N_2(\beta_1 - \beta_2) + N_3c_2(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) - M_2(\beta_1 + \beta_2) - \\ M_3c_2(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2) \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Calcul de quantité G_{21}

On a :

$$G_{21} = \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 F}{\partial u_1^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial u_1 \partial u_2^2} + \frac{\partial^3 G}{\partial u_1^2 \partial u_2} + \frac{\partial^3 G}{\partial u_2^3} + i \left(\frac{\partial^3 G}{\partial u_1^3} + \frac{\partial^3 G}{\partial u_1 \partial u_2^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial u_1^2 \partial u_2} - \frac{\partial^3 F}{\partial u_2^3} \right) \right]$$

D'où

$$G_{21} = 0 \quad (3.82)$$

Calcul de quantité h_{11}

On a :

$$h_{11} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} \right]$$

D'où

$$h_{11} = \frac{1}{2} [K_2(\beta_1 + \beta_2) + K_3c_2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)] \quad (3.83)$$

Calcul de quantité h_{20}

On a :

$$h_{20} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} - 2i \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \right]$$

D'où

$$h_{20} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K_2(\beta_1 - \beta_2) + K_3c_2(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) - \\ i(K_2(\beta_1 + \beta_2) + K_3c_2(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)) \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

On obtient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_1 \omega_{11} = -h_{11} \\ (\lambda_1 - 2id) \omega_{20} = -h_{20} \end{cases}$$

La solution du système d'équations ci-dessus est :

$$\begin{cases} \omega_{11} = -\frac{h_{11}}{\lambda_1} \\ \omega_{20} = -\frac{h_{20}}{\lambda_1 - 2id} \end{cases} \quad (3.85)$$

D'où

$$\begin{cases} \omega_{11} = -\frac{K_2(\beta_1 + \beta_2) + K_3 c_2(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)}{2\lambda_1} \\ \omega_{20} = -\frac{K_2 \lambda_1(\beta_1 - \beta_2) + K_3 c_2(\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2) + 2d(K_2(\beta_1 + \beta_2) + K_3 c_2(\alpha_2 \beta_1 + \beta_2 \alpha_1))}{2(\lambda_1^2 + 4d^2)} + \\ i \frac{2d(K_2(\beta_1 - \beta_2) + K_3 c_2(\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2)) - \lambda_1(K_2(\beta_1 + \beta_2) + K_3 c_2(\alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2))}{2(\lambda_1^2 + 4d^2)} \end{cases} \quad (3.86)$$

Maintenant laissez :

$$G_{110} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial_3 u} + \frac{\partial^2 G}{\partial u_2 \partial_3 u} + i \left(\frac{\partial^2 G}{\partial u_1 \partial_3 u} - \frac{\partial^2 F}{\partial u_2 \partial_3 u} \right) \right]$$

D'où

$$\begin{aligned} G_{110} &= \frac{1}{2} [\beta_3 (M_2 + N_2) + \alpha_3 c_2 (M_3 \beta_1 + N_3 \beta_2) + c_2 \beta_3 (M_3 \alpha_1 + N_3 \alpha_2)] + \\ &\frac{1}{2} i [\beta_3 (N_2 - M_2) + \alpha_3 c_2 (N_3 \beta_1 - M_3 \beta_2) + c_2 \beta_3 (N_3 \alpha_1 - M_3 \alpha_2)] \end{aligned} \quad (3.87)$$

Puis nous avons :

$$g_{21} = G_{21} + (2G_{110}\omega_{11} + G_{110}\omega_{20})$$

Aussi laissez :

$$C_1(0) = \frac{1}{2d} \left[g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right] + \frac{g_{21}}{2} \quad (3.88)$$

Puis nous navons :

$$\mu_2 = -\frac{\operatorname{Re}(C_1(0))}{\operatorname{Re}(\lambda'(a_0))} \quad (3.89)$$

$$\tau_2 = -\frac{\operatorname{Im}(C_1(0)) + \mu_2 \operatorname{Im}(\lambda'(a_0))}{d} \quad (3.90)$$

Et

$$\gamma_2 = 2 \operatorname{Re}(C_1(0)) \quad (3.91)$$

Conclusion 3.6 : *Il est bien connu que :*

1. μ_2 détermine la direction de la bifurcation de Hopf.
 - a. Si $\mu_2 > 0$ la bifurcation de hopf est sous critique.
 - b. Si $\mu_2 < 0$ la bifurcation de hopf est super-critique et la solution périodique bifurquée existe pour : $a_1 > a_0$ et $a_1 < a_0$.
2. γ_2 détermine la stabilité de solution périodique bifurquée.
 - a. Si $\gamma_2 < 0$ les solutions périodiques bifurquées sur le collecteur du centre sont stables.
 - b. Si $\gamma_2 > 0$ les solutions périodiques bifurquées sur le collecteur du centre sont instables.
3. τ_2 détermine les périodes de la bifurcation des solutions périodiques.
 - a. Si $\tau_2 > 0$ les périodes augmentent.
 - b. Si $\tau_2 < 0$ les périodes diminuent.

Exemple 3.6 : *Et enfin, nous allons donner un Exemple numérique du système (3.40).*

Nous posons: $a_2 = 1.5$, $a_3 = 2$, $b = -1.3$, $c_1 = -1.5$, $c_2 = -1$.

■ Pour $a_1 = -1.221$

On obtient L'attracteur généré par le système chaotique (3.40). Figure (3.23).

■ Pour $a_1 = -1.44$

On obtient L'attracteur généré par le système chaotique (3.40). Figure (3.24).

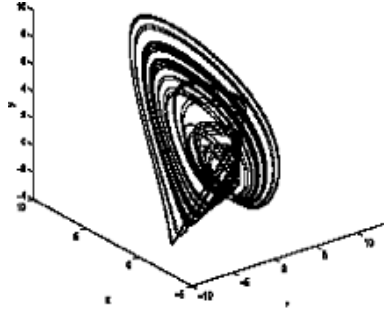


FIG. 3-23 – L'attracteur généré par le système chaotique (4.40). Avec, $a_1 = -1.221$, $a_2 = 1.5$, $a_3 = 2$, $b = -1.3$, $c_1 = -1.5$, $c_2 = -1$

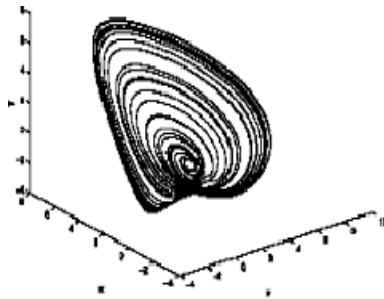


FIG. 3-24 – L'attracteur généré par le système chaotique (4.40). Avec, $a_1 = -1.44$, $a_2 = 1.5$, $a_3 = 2$, $b = -1.3$, $c_1 = -1.5$, $c_2 = -1$

3.5.5 Résumé

Dans ce chapitre, un système quadratique autonome en trois dimensions chaotiques a été étudié. En choisissant un paramètre de bifurcation échéant, j'ai prouvé que la bifurcation de Hopf se produit lorsque le paramètre de bifurcation \mathbf{a}_1 traverse la valeur critique \mathbf{a}_0 . La direction de la bifurcation de Hopf et la stabilité des solutions périodiques bifurquées sont analysées en détail.

3.5.6 Les bifurcations globales

Orbites homoclines et hétéroclines Considérons le système dynamique continu $\{\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ défini par le système de *EDOs*

$$\dot{x} = f(x), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \quad (3.92)$$

Où f est lisse. Soit x_0, x_1 et x_2 les points d'équilibres de système (3.92).

Définition 3.4 : *Un orbite Γ_0 qui départ par le point $x \in \mathbb{R}^n$ est dite homocline au point x_0 de système (3.93) si:*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\varphi^t) = x_0$$

Une orbite homocline est une trajectoire d'un écoulement d'un système dynamique qui se joint à un point d'équilibre elle-même. Plus précisément, une orbite homocline se trouve dans l'intersection de la variété stable et le collecteur d'un équilibre instable.

Définition 3.5 : *Un orbite Γ_0 qui départ par le point $x \in \mathbb{R}^n$ est dite homocline au point x_0 et x_1 de système (3.93) si:*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (\varphi^t) = x_0$$

Est

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi^t) = x_1$$

Une orbite hétéroclinique (parfois appelé une connexion hétéroclinique) est une trajectoire dans l'espace de phase qui relie deux points d'équilibre différents. Si les points d'équilibre au début et à la fin de l'orbite sont les mêmes, l'orbite est dite homocline.

Bifurcations homocline Une bifurcation homocline, est une bifurcation globale qui se produit souvent quand une orbite périodique entre en collision avec un point selle. La figure (3.25) montre un portrait de phase avant, pendant et après une bifurcation homocline en $2D$. L'orbite périodique développe jusqu'à ce qu'il entre en collision avec le point selle. Au point de bifurcation de la période de l'orbite périodique a augmenté à l'infini et il est devenu une orbite homocline. Après la bifurcation il n'y a plus une orbite périodique. La bifurcations homoclines peuvent se produire supercritique ou sous-critique. La figure (3.25) présente une bifurcation homocline de " type I " en $2D$, il ya une bifurcation homocline " type II ", dans lequel l'orbite homoclines «pièges» les autres extrémités des collecteurs stables et instables de point selle. En trois dimensions ou plus, les bifurcations homocline d'une grande codimension peuvent se produire, mais la production dynamique sera complexe, elle peut-être chaotiques.

Bifurcations hétéroclinique Une bifurcation hétéroclinique est une bifurcation globale impliquant un cycle hétéroclinique. Bifurcations hétéroclines sont de deux types: les bifurcations par résonance et bifurcations transversales. Les deux types de bifurcation se traduira par la modification de la stabilité du cycle hétéroclinique. A une bifurcation par résonance, la stabilité du cycle change quand une condition algébrique sur les valeurs propres de l'équilibre dans le cycle est satisfaite. Cela est généralement accompagnée par la naissance ou la disparition d'une orbite périodique. Une bifurcation transversale d'un cycle hétéroclinique se produit lorsque la partie réelle d'une valeur propre transversal de

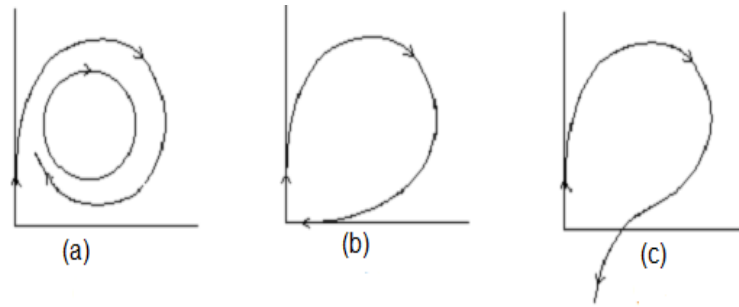


FIG. 3-25 – Bifurcation homocline: Pour de petites valeurs de paramètres, il ya un point selle à l'origine et un cycle limite (a). Comme le paramètre de bifurcation augmente, le cycle limite développe jusqu'à ce qu'il croise exactement le point selle, ce qui donne une orbite de longueur infinie (b). Lorsque le paramètre de bifurcation augmente encore, le cycle limite disparaît complètement (c).

l'un des équilibres dans le cycle passe par zéro. Cela permettra également de faire un changement de la stabilité du cycle hétéroclinique.

Exemple 3.7 : *Considérons le système dynamique suivant:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + ay - x^2 \end{cases} \quad (3.93)$$

Les point d'équilibres de système (3.93) sont $P_1(0,0)$ et $P_2(1,0)$. La matrice Jacobienne est:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x & a \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

On a

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Puisque $\text{Det}(A(P_1)) = -1 < 0$. Donc P_1 est un point selle.

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

On a

$$\text{Det}(A(P_1)) = 1, \text{ tr} = a, \Delta = a^2 - 4$$

Donc, pour $-2 < a < 2$. Le point d'équilibre P_2 est un foyer asymptotiquement stable si: $-2 < a < 0$, instable si $0 < a < 2$. Par conséquent la valeur de bifurcation est $a_0 = 0$.
Donc on va voir que se passe-t-il si : $a = a_0$. Soit la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

On a

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y}$$

D'où

$$\dot{V}(x, y) = 2xy - x^2y$$

On remarque que le signe de $\dot{V}(x, y)$ n'est pas clair. On peut alors soit calculer l'indice de Marsden-McCracken, soit rechercher la possibilité de centres par une intégrale première. On à

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^2}{y}$$

D'où

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$$

On peut prendre la fonction:

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

comme solution de système (3.93). On peut aussi vérifier que le point $P_2(1, 0)$ est un minimum à cette fonction, et les courbes de niveaux de $H(x, y) = C$ se referment autour de ce point. On a donc des centres. On remarque aussi que la courbe $H(x, y) = 0$ est une

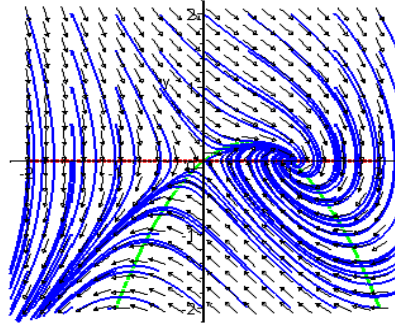


FIG. 3-26 – Portrait de phase de système (4.95) pour $a = -1$.

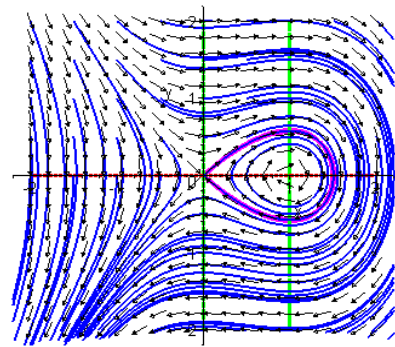


FIG. 3-27 – Portrait de phase de système (4.95) pour $a = 0$.

trajectoire homocline. L'équation $H(x, y) = 0$ donne:

$$y = \pm x \sqrt{\left|1 - \frac{2}{3}x\right|} \text{ avec } 1 - \frac{2}{3}x \geq 0$$

Il s'agit d'une bifurcation homocline, comme illustré sur les figures (3.26), (3.27) et (3.28).

bifurcation de période infinie Une bifurcation de période infinie est une bifurcation globale qui peut se produire lorsque deux points fixes apparaissent sur un cycle limite. Lorsque la limite d'un paramètre se rapproche d'une certaine valeur critique, la vitesse

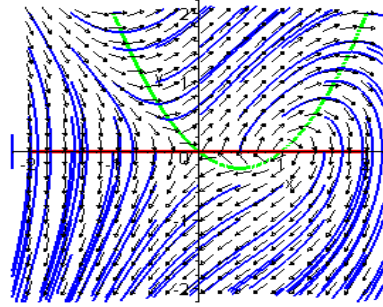


FIG. 3-28 – Portrait de phase de système (4.95) pour $a = 1$.

de l'oscillation ralentit et la période tend vers à l'infini. La bifurcation de période infinie se produit à cette valeur critique. Au-delà de la valeur critique, les deux points fixes émergent en permanence l'une de l'autre sur le cycle limite pour perturber l'oscillation et forment deux points de selle.

Bifurcation blue sky catastrophe La bifurcation blue sky catastrophe est un type de bifurcation d'une orbite périodique. En d'autres termes, il décrit une sorte de comportement des solutions stables d'un ensemble d'équations différentielles, elle peut subir quand les équations sont progressivement modifiées. Ce type de bifurcation est caractérisé à la fois par la période et la longueur de l'orbite approchant à l'infini lorsque le paramètre de contrôle se rapproche d'une valeur de bifurcation finie, mais avec l'orbite restant dans une partie limitée de l'espace de phase, et sans perte de stabilité avant la bifurcation de point. En d'autres termes, l'orbite disparaît dans le blue sky.

La bifurcation a été appliquée dans des modèles lent-rapide de neurosciences computationnelles. La possibilité du phénomène a été soulevée par David Ruelle et Floris Takens en 1971, et exploré par R. Devaney et d'autres. Cette bifurcation a également été trouvé dans le contexte de la dynamique des fluides, pour savoir la convection de double diffusion d'un fluide de faible nombre de Prandtl. Le double diffusion par convection se produit lorsque du fluide est entraîné par les deux gradients thermiques et de concentration, et les diffusivités de température et de concentration prendre des valeurs différentes.

La bifurcation se trouve dans une orbite qui apparaît dans une bifurcation globale selle boucle, devient chaotique dans une cascade de doublement de la période, et disparaît dans le blue sky catastrophe.

La bifurcation de Bogdanov–Takens Dans la théorie des bifurcations, une bifurcation **Bogdanov-Takens** est un exemple bien étudié d’une bifurcation de codimension-2, ce qui signifie que deux paramètres doivent être modifiés pour la bifurcation de se produire. Il est nommé d’après **R. Bogdanov** et **F. Takens**, qui a décrit indépendamment et simultanément cette bifurcation.

Un système $x' = f(x)$ subit une bifurcation **Bogdanov-Takens** si elle a un point fixe et la linéarisation de f autour de ce point a une valeur propre double égal à zéro (en supposant que certaines conditions de non-dégénérescence techniques sont satisfaites). Trois bifurcations de codimension-1 se produisent à proximité: une bifurcation noeud-col, une bifurcation **Andronov-Hopf** et une bifurcation homocline. Toutes les courbes de bifurcation associés répondent à la bifurcation **Bogdanov-Takens**. La forme normale de la bifurcation **Bogdanov-Takens** est :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a + bx + x^2 \pm xy \end{cases} \quad (3.95)$$

3.5.7 Méthode standard d’étudier les bifurcations dans les systèmes dynamiques discret

Nous considérons le système dynamique discret (la carte) suivant

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (3.96)$$

L’étude des bifurcations d’un système dynamique discret passe par les étapes suivantes :

I. Localisez le point fixe x^* de l’application (3.97).

$$x_{n+1} = x_n = x^*$$

II. Linéariser localement le système discret dans le voisinage d'un point fixe par l'obtention de la matrice jacobienne.

III. Obtenir les valeurs propres de la matrice jacobienne A de système (3.97). Les valeurs propres indiquent le type de point fixe.

Si, λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A , on a les cas suivants :

■ λ_1 et λ_2 réels.

1. Point attractif si, $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$.
2. Point répulsif si, $\lambda_1 > 1, \lambda_2 > 1$.
3. Une selle régulière si, $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$.
4. Une selle flip si, $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 < -1$.

■ λ_1 et λ_2 complexes.

1. Un attracteur en spirale si, $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$.
2. Un répulsif en spirale si, $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$.

Remarque 3.3 :

1. La bifurcation se produit lorsque un point fixe perd sa stabilité.
2. La condition de la stabilité d'un point fixe $|\lambda| < 1$, i.e., les valeurs propres devrait rester à l'intérieur du cercle unité.
3. La classification des bifurcations dépend du lieu où une valeur propre traverse le cercle unité.
4. Les systèmes dynamiques lisses peuvent perdre la stabilité de trois façons possibles.
 - a. Une bifurcation de doublement de période si: les valeurs propres traverse le cercle unité sur la ligne réelle négative. Dans la bifurcation de doublement de période, un point fixe devient instable et une autre orbite périodique double stable émerge.

- b. Une selle-nœud ou une bifurcation plier si: une valeur propre touche le cercle unité sur la ligne réel positif. Dans une bifurcation selle-nœud, une paire de nouveaux points fixes sont créés, une stable et l'autre instable sont responsable de fenêtres périodiques.
- c. Une bifurcation de hopf ou une bifurcation de Naimark si: une paire de valeurs propres complexe conjugué traversent le cercle unité. Dans une bifurcation de Naimark, une orbite périodique change à une orbite quasi-périodique (sommation de deux fréquences incommensurables).

3.5.8 Les systèmes dynamiques hybrides

Sont des systèmes dynamiques avec l'évolution en temps continu, ponctué par des événements discrets par exemple les circuits électroniques de puissance, circuits non linéaires comme l'oscillateur Colpitts, circuit de Chua etc, robots capables de marcher, Les systèmes hydrauliques avec vannes d'arrêt, le cœur humain, les systèmes continus commandés par une logique discrète...etc.

Dans les systèmes dynamiques hybrides, certains événements discrets se produisent lorsque certaines conditions sur les variables d'état sont satisfaits. Les événements discrets signifient un changement dans les temps continu variable d'état des équations. Mathématiquement, ce type de systèmes peut être écrit sur la forme:

$$x' = f(x, \mu) = \begin{cases} f_1(x, \mu): x \in R_1 \\ f_2(x, \mu): x \in R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x, \mu): x \in R_n \end{cases} \quad (3.97)$$

Où R_1, R_2, \dots, R_n sont différentes régions de l'espace d'état, et μ est un paramètre de système. Les régions sont divisées par les conditions d'événements discrets. En l'espace

d'état ce sont $(n - 1)$ surfaces dimensionnelles données par les équations algébriques de la forme :

$$\Gamma_n(x) = 0$$

Ce sont les variétés de commutation. Il peut aussi y avoir des systèmes où l'état ne bouge pas entre les compartiments dans l'espace de l'Etat, mais les événements de commutation modifier les équations d'état :

$$x' = f(x, \mu) = \begin{cases} f_1(x, \mu) : & \Gamma_1(x) = 0 \\ f_2(x, \mu) : & \Gamma_2(x) = 0 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ f_n(x, \mu) : & \Gamma_n(x) = 0 \end{cases} \quad (3.98)$$

Où $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x), \dots, \Gamma_n(x)$ sont des conditions de commutation. Il peut aussi y avoir des systèmes où les équations d'état ne le font pas changer, mais la variable d'état passe à une valeur différente en tant que la condition de commutation est satisfaite. La frontière dans le domaine discret correspond à la condition où l'orbite passe par la variétés de commutation dans le système à temps continu.

Chapitre 4

Bifurcations collision de la frontière

4.1 Dynamique des Cartes lisses par morceaux

Si un point fixe perd sa stabilité tandis que dans chaque côté, les bifurcations obtenus peuvent être classées sous les classes génériques des bifurcations lisses. Mais que faire si un point fixe traverse la frontière quand un paramètre est varié ?

Les valeurs propres peuvent passer d'une valeur à une autre valeur dans le cercle unité. Les bifurcations résultant sont appelés bifurcations collision de la frontière. Donc dans la commutation des systèmes dynamiques la séquence de bifurcation est gouverné par une interaction complexe entre les bifurcations lisses et les bifurcations collision de la frontière. Les différents types des bifurcations lisses sont bien connus. Quels sont les différents types des bifurcations collision de la frontière ? La réponse à cette question dépend de la nature de la frontière et aussi les fonctions sur les deux côtés de la frontière. Dans les systèmes de deux dimension, la classification des points fixes dépendra de la continuité de la fonction à travers la frontière et les éléments Jacobiennes aux deux côtés de la frontière. Il ya les possibilités suivantes :

1. La fonction est continue, mais le jacobien change de façon discontinue à travers la frontière.
2. Déterminant supérieur à l'unité dans un côté de frontière (point fixe peut être

répulsif). Naissance d'un tore par la bifurcation collision de la frontière.

3. La fonction ainsi que le jacobien sont discontinues à travers la frontière.
4. Cartes avec une singularité de la racine carrée. Pour les systèmes mécaniques subissant les impacts mous, il a été montré que le déterminant reste constant, mais la trace de la jacobienne montre une singularité de la racine carrée.
5. Système avec une dimension différente sur les deux côtés de la frontière.

4.1.1 L'analyse des bifurcations dans les cartes lisses par morceaux en deux dimensions

Tout système de la forme:

$$\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, \quad a_3 \neq 0 \quad (4.1)$$

Peut être transformé à la forme normale suivante:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ -\delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu \quad (4.2)$$

En utilisant la transformation

$$x_k = TX_k \quad (4.3)$$

Avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_4}{a_3} \\ 0 & -\frac{\delta}{a_3} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Où

$$\tau = \text{trace}(A) = a_1 + a_4 \text{ et } \delta = \det(A) = a_1a_4 - a_3a_2$$

4.1.2 Classification des bifurcations collision des frontières

La classification de ces bifurcations sera suivant la relation entre τ et δ .

1. Le point fixe est une selle flip si, $\tau < -(1 + \delta)$.
2. Le point fixe est un attracteur flip si, $-(1 + \delta) < \tau < -2\sqrt{\delta}$.
3. Le point fixe est un attracteur en spirale si, $-2\sqrt{\delta} < \tau < 2\sqrt{\delta}$.
4. Le point fixe est un attracteur régulière si, $2\sqrt{\delta} < \tau < (1 + \delta)$.
5. Le point fixe est une selle régulière si, $\tau > (1 + \delta)$.

4.1.3 Les types possibles de points fixes suivant les valeurs propres

Soit λ_1 et λ_2 les deux valeur propres de la matrice jacobienne A de système (4.1).

■ Si, le déterminant de A est positive et λ_1, λ_2 deux nombres réels, on a les cas suivants:

1. $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, Le point fixe est un attracteur régulière.
2. $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$, Le point fixe est une selle régulière.
3. $-1 < \lambda_1 < 0, -1 < \lambda_2 < 0$, le point fixe est un attracteur flip.
4. $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 < -1$, le point fixe est une selle flip.

■ Si, le déterminant de A est positive et λ_1, λ_2 deux nombres complexes, on a le cas suivant: $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$, le point fixe est un attracteur en spirale dans le sens horaire ou antihoraire.

■ Si, le déterminant de A est négative et λ_1, λ_2 deux nombres réels, on a les cas suivants:

1. $-1 < \lambda_1 < 0, 0 < \lambda_2 < 1$, le point fixe est un attracteur flip.
2. $\lambda_1 > 1, -1 < \lambda_2 < 0$, le point fixe est une selle flip.
3. $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 < -1$, le point fixe est une selle flip.

Chapitre 5

Le chaos dans les systèmes dynamiques en dimension n ($n > 1$)

5.1 Introduction

Le chaos a été un objet de recherches actives dans les domaines de la physique, les mathématiques et dans de nombreux autres domaines de la science au cours des dernières années. Le chaos est une véritable théorie scientifique. Elle repose sur la représentation des solutions des équations différentielles dans l'espace des phases associé : représenter les solutions sous forme de trajectoire dans l'espace plutôt que l'une des variables en fonction du temps permet de révéler la structure sous-jacente c'est ce qui conduit à affirmer que la théorie du chaos contribue à «trouver de l'ordre caché sous un désordre apparent.». L'attracteur de Lorenz précédemment représenté est un exemple d'une évolution d'un système dans l'espace des phases. Au déterminisme Laplacien permettant la prédiction sur des temps arbitrairement long a succédé un déterminisme de nature fondamentalement différente. Il peut être approché de manière probabiliste et alors caractérisé par l'existence d'invariants prenant la forme de mesures de probabilités, de dimension fractale ou par une description topologique des attracteurs. Toutes les sciences, y compris sociales, sont concernées par ce changement de paradigme, en particulier, cette théorie

peut inclure l'organisation du vivant dans la nature.

Définition 5.1 : *Un système dynamique est dit chaotique si une portion « significative » de son espace des phases présente simultanément les trois caractéristiques suivantes:*

1. *Le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.*

Attracteur étrange.

Une forte récurrence.

5.2 Propriétés du chaos

5.2.1 Sensibilité aux conditions initiales

Une très petite erreur sur la connaissance de l'état initial x_0 dans l'espace des phases d'un système dynamique va se trouver presque toujours rapidement amplifiée. Mathématiquement on dit que f montre une dépendance sensible aux conditions initiales.

$$\exists k > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in D, \exists (y, p) \in D: \begin{cases} \|x - y\| < \varepsilon \\ \|f^p(x) - f^p(y)\| > k \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2.2 L'attracteur étrange

Un système chaotique dissipatif possède au moins un attracteur qu'on'a déjà appelée étrange (chaotique).

5.2.3 Spectre de puissance

On peut caractériser le chaos avec une méthode simple, cette méthode consiste à calculer le spectre de Fourier de l'évolution temporelle d'une des variables du système. Lorsqu'il est possible de déterminer complètement les trajectoires d'un système dans son espace des phases, ce système est dit intégrable, les trajectoires étant la composition des mouvements d'oscillation ayant chacun une pulsation ω_i . Le spectre d'une variable d'un

tel système ne contient donc qu'une assemblée de raies fines situées aux pulsations ω_i , à leurs harmoniques $n \omega_i$ avec $n \in \mathbb{N}$, aux combinaisons linéaires de fréquences $n\omega_i + m\omega_j$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$, les spectres qui sont la combinaison de plusieurs fréquences sans rapport simple sont dit quasi-périodiques.

L'existence de spectres larges est une caractéristique essentielle des mouvements chaotiques d'un système. L'évolution temporelle d'un système dynamique est souvent représentée par la valeur d'une de ses variables dans un intervalle régulier, c'est ce qu'on appelle la série temporelle.

5.3 Détection du chaos

Pour savoir c'est un système non linéaire est ou non chaotique, il existe plusieurs méthodes. Elles ne sont pas généralement très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On a choisi de mettre en oeuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui, d'ailleurs sont complémentaires: la dimension fractale et les exposants de Lyapunov.

5.3.1 Les exposants de lyapunov

Le 12 Octobre 1892, Lyapunov à l'université de Moscou, une thèse de doctorat intitulées : *Le problème général de la stabilité du mouvement*. Il y introduit l'idée de mesurer la divergence possible entre deux orbites issue de conditions initiales voisines. Lorsque cette divergence croit exponentiellement avec le temps pour presque toutes les conditions initiales voisines d'un système donné, on a le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, idée à laquelle sont attachés les exposants de Lyapunov, qui donnent une mesure quantitative de cette divergence exponentielle locale et mesure en effet le degré de sensibilité d'un système dynamique.

Rappelons d'abord cette formule et voyons comment Lyapunov a pu arriver à déduire

une telle formule.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})| \right) \quad (5.2)$$

Considérons un système dynamique quelconque dont la condition initiale x_0 est affectée d'une erreur infinitésimale E_0 sera donc amplifiée d'un facteur $\left| \frac{E_n}{E_0} \right|$. Notons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à 1.

Puisque

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$$

Il se suffit alors, de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale. Le logarithme d'un produit correspond à une somme de lui même. On obtient alors,

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| + \dots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \\ \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| + \dots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \\ \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \end{aligned} \quad (5.3)$$

Avant de faire tendre cette dernière quantité vers l'infinis, calculons d'abord la moyenne de la somme obtenue. On arrive ainsi à l'exposant de Lyapunov.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \quad (5.4)$$

E_i et E_{i-1} étant de très petites valeurs, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation utilisée si, naturellement la fonction est dérivable. Soit f cette fonction.

$$E_i = f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1}) \text{ et } \frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}}$$

Puisque

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Alors, si f est dérivable, on a

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \text{ lorsque } E_{i-1} \rightarrow 0$$

Par conséquent

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \quad (5.5)$$

Lorsque l'exposant de Lyapunov est positif, nous avons

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0$$

Et par conséquent

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1$$

L'erreur infinitésimale du début ira donc en augmentant. Le système sera donc sensible aux très petites variations de sa condition initiale, une des caractéristiques des systèmes chaotiques. Si au contraire l'exposant de Lyapunov est négatif, l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant. l'erreur initiale n'aura dans ce cas aucun effet à long terme. Généralement, on peut distinguer trois cas suivant le signe de l'exposant de Lyapunov.

1. Si, $\lambda < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique.
2. Si, $\lambda = 0$, l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.
3. Si, $\lambda > 0$, l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités : ces points sont instables. Pour un système discret, on a un ensemble de

point sans aucun rapport de liaison. Pour un système continu, l'espace de phases est un ensemble de lignes croisées.

5.4 Routes vers le chaos

On ne sait pas toujours à l'heure actuelle dans quelles conditions un système non linéaire va devenir chaotique. Cependant, il existe un certain nombre de scénarios transition vers le chaos qui sont universels, et si un système entre dans un de ces scénarios, son évolution peut être décrite. Supposons que la dynamique étudiée dépend d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique. Nous allons passer en revue quelques scénarios de transition vers le chaos. Par ces scénarios il faut comprendre une conjecture sur le comportement d'un système donnant une explication simplifiée et possible de la cascade de bifurcation qu'il subit lorsque les paramètres de contrôle varient. Cette conjecture repose sur l'hypothèse d'un système bifurquant. La différenciation des scénarios découlera d'une hypothèse supplémentaire de résonance ou de non résonance, de super-criticalité ou sous-criticalité. Tous ces scénarios ont été prédits par la théorie et observés dans de nombreuses expériences.

En physique, c'est notamment la convection thermique de **Rayleigh-bénard**, dans laquelle une couche de fluide située entre deux plaques horizontales est soumise à un gradient de température vertical, qui a servi à l'origine de système modèle pour l'étude du chaos.

Depuis, le chaos a été mis en évidence dans bien d'autres domaines : optique, chimie, biologie, et même économie. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

5.4.1 Doublement de période

Ce scénario de transition vers le chaos est sans doute le plus connu. Il a été étudié en particulier en dynamique de population par **R. May** sur l'application logistique. Ce

problème consiste à considérer l'itération: $X_{n+1} = f(X_n)$ avec $f(x) = ax(1 - x)$, c'est à dire: $X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$. Selon la valeur du paramètre a , la suite converge soit vers un point fixe nul ou pas. Dès que a est plus grand que 3 le système bifurque, c'est à dire qu'il oscille entre 2 valeurs autour du point fixe. On parle de cycle attracteur de période 2. En continuant à augmenter a , ces 2 attracteurs s'écartent du point fixe jusqu'à ce qu'une nouvelle bifurcation ait lieu. Chaque point se dédouble et on obtient un cycle attracteur de période 4. On dit qu'il y a doublement de période. C'est à partir de cet exemple que **Feigenbaum** a présenté l'existence d'une forme d'universalité dans cette transition vers le chaos sous forme de cascade de doublement de période. De là naquit la constante de **Feigenbaum** (4.6692016609), également retrouvée grâce à la théorie des groupes de renormalisations, bien connue aux physiciens.

5.4.2 Intermittence

Ce scénario se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière. Parmi les différentes possibilités, l'intermittence de type 1 est habituellement associée à un canal de réinjection des bouffées chaotiques interrompent des phases laminaires associées à une trajectoire au voisinage d'une orbite périodique qui est créée par une bifurcation de type nœud-col, lorsque un paramètre de commande est légèrement perturbé. L'intermittence suppose en particulier que le cycle limite (correspondant à l'état périodique d'où est issu ce phénomène de transition) bifurque de façon sous-critique et qu'il n'y ait pas d'attracteur à proximité. C'est ce que l'on observe dans le système de **Rössler**.

5.4.3 Quasi-périodicité

Le scénario via la quasi-périodique a été mis en évidence par les travaux théorique de **Ruelle** et **Takens** (1971) illustré par exemple sur le modèle de **Lorenz** (1963), ce scénario a été confirmé par de nombreuses expériences dont les plus célèbres se trouvent en thermohydrodynamique convection de Rayleigh-Bénard dans une petite boîte et en chimie

réaction de **Bélousov-Zabotinsky** entre-autres, L'exemple de **Lorenz** est probablement le plus souvent développé pour illustrer ce phénomène de quasi-périodicité, C'est donc **E.N. Lorenz**, météorologue au **MIT** qui a exhibé cet attracteur étrange avant même que le terme n'ait été inventé, Il avait conçu un modèle très simplifié de la circulation atmosphérique, représenté par un système de 3 équations non linéaires.

5.5 L'application de Hénon

L'application (carte) de Michel Hénon, est une bijection du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dans lui-même définie par: $M(x_n, y_n) \rightarrow M(x_{n+1}, y_{n+1})$.

Où

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (5.6)$$

Selon les valeurs de a et b , la suite de points (M_n) , peut avoir les états suivants:

1. Converge, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A$
2. Avoir un attracteur de période 2, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{2p} = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{2p+1} = B$ où $A \neq B$.
3. Avoir un attracteur de période $n \in \mathbb{N}$.
4. Diverger, les coordonnées de M_n tendent vers ∞ , ou la suite est chaotique sur le plan.
5. Avoir un attracteur étrange.

L'application de Hénon présente un attracteur chaotique pour $(a, b) = (1.4, 0.3)$ appeler l'attracteur de henon. On note que le système dynamique de Hénon n'est pas conservatif, car le jacobien de la transformation est constant et vaut $-b$, qui est différent de l'unité dans les cas intéressants.

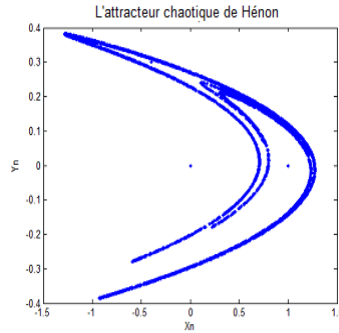


FIG. 5-1 – L'attracteur de Hénon pour $(a, b) = (1.4, 0.3)$, avec la condition initial $(x_0, y_0) = (0, 0)$

5.6 L'application de Lozi

En 1978, Lozi introduit dans une courte note une nouvelle carte chaotique en deux dimensions, les équations et les attracteurs ressemblent à ceux de la célèbre carte de Hénon. Simplement, un terme quadratique dans celui-ci est remplacé par un autre terme linéaire par morceaux dans la première équation. Cela permet de prouver rigoureusement le caractère chaotique de certains attracteurs et une analyse détaillée de leurs bassins d'attraction.

L'application de Lozi est défini par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - a|x_n| \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (5.7)$$

Où a et b sont les paramètres réels non nulle. L'intérieur de la région où les orbites restent bornées, la carte de Lozi peut présenter à la fois des comportements réguliers et chaotiques suivant les valeurs des deux paramètre a et b .

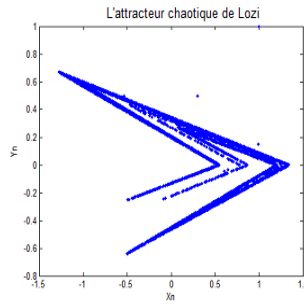


FIG. 5-2 – L'attracteur de Lozi pour $(a, b) = (1.7, 0.5)$, avec la condition initial $(x_0, y_0) = (0, 0)$

5.7 Types du chaos

5.7.1 Le type de chaos dans le système Lorenz

Une trajectoire chaotique ne passe pas, mathématiquement, deux fois par le même point car en ce cas, ce point rigoureusement commun aux deux trajectoire pourrait leur servir de condition initiale commune, et elles coïncideraient alors de $t \rightarrow -\infty$ à $t \rightarrow +\infty$. elle ne montre non plus aucun des comportements cohérents que nous avons reliés plus haut à des attracteurs ponctuels ou cycliques.

Dans le système de Lorenz, les trajectoires décrivent des spires situées dans deux plans et tournant autour de deux régions moyennes, sans jamais revenir sur elles-mêmes. les deux plans représentent deux types de situations atmosphériques, et la trajectoire saute sporadiquement de l'une à l'autre sans que l'on puisse prévoir le moment d'un saut. Si l'on part de deux situations initiales différentes mais proches, le comportement sera du même type, mais les sauts d'un plan à un autre se produiront à des moments différents. toute prédiction précise est donc exclue, on ne prévoit que un comportement statistique (pouvant être de deux natures: les deux lobes) et l'existence de basculements catastrophiques à des instants imprévisibles.

5.7.2 Le type de chaos dans les deux applications Hénon et Lozi

Le diagramme de bifurcation de l'attracteur de Hénon est de type de bifurcation de doublement de période, l'attracteur de Hénon contient deux points fixes. un cycle de période 2 stable commence pour $a = 0.3675$ suivi d'un autre cycle de période 4 pour $a = 0.9$ et ainsi de suite. La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière. Pour $a = 1.4$, on ne distingue plus les cycle, le système est chaotique. la structure de l'attracteur se répète identiquement à elle-même aux échelles d'observation successives. Cette structure dont la permanence à différent échelle est caractéristique d'un objet fractale. On peut calculer la dimension de l'attracteur de Hénon par la dimension de Lyapunov. On a pour $a = 1.4$, $b = 0.3$, la carte de Hénon a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.42205$, $\lambda_2 = -1.626$. La dimension de Lyapunov par définition est égale à $D_L = 1.2596$.

Pour l'application de Lozi, on peut faire un agrandissement d'un région de l'attracteur et on observe que la structure se répète. Contrairement au cas de l'application de Hénon, la route vers le chaos par l'application de Lozi n'est pas une bifurcation de doublement de période. Puisque sa dérivée n'est pas continue. On peut aussi calculer la dimension de l'attracteur de Hénon par la dimension de Lyapunov. On a pour $a = 1.7$, $b = 0.5$, la carte de Lozi a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.69314$, $\lambda_2 = -1.204$. La dimension de Lyapunov par définition est égale à $D_L = 1.5757$.

5.7.3 Le chaos robuste

Certains systèmes dynamiques chaotiques donne deux types d'attracteurs chaotiques. Le premier est appelé le chaos fragile, les attracteurs disparaissent avec des perturbations d'un paramètre, ou coexister avec d'autres attracteurs. La seconde est appelée le chaos robuste, ce type se caractérise par l'absence d'orbites périodiques et ne accepte coexistence dans le voisinage de l'espace des paramètres. L'existence de ces orbites dans certaines régions chaotiques signifie qu'un petit changement dans les paramètres détruire le chaos, ce qui implique la fragilité de ce type de chaos.

On sait cependant que pour les systèmes chaotiques les plus lisses, il ya un ensemble dense de fenêtres périodiques pour tout intervalle de valeurs de paramètres. Par conséquent, dans des systèmes pratiques de travail en mode chaotique, de faibles fluctuations accidentelle d'un paramètre peut prendre le système à partir du chaos. Nous disons un attracteur chaotique est robuste si, par ses valeurs de paramètres, il existe un voisinage dans l'espace des paramètres sans attracteur périodique et l'attracteur chaotique est unique dans ce voisinage. Le chaos robuste a plusieurs applications dans le monde réel, comme les applications d'ingénierie, le chiffrement d'image, le cryptage,...

Chapitre 6

Le chaos robuste dans l'application de Lozi avec la fonction \max

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous montrons que le chaos robuste peut se produire dans les systèmes lisses par morceaux, et obtenir les conditions de sa survenance. Nous illustrons ce phénomène avec un exemple qui a été proposé par le professeur Elhadj Zraouia. Nous allons étudier l'application de Lozi en remplaçant le terme $|x|$ par la fonction $\max(f(x, y), g(x, y))$, où f et g sont deux fonctions arbitraires. Ceci est un modèle général qui nous permet d'étudier plusieurs nouvelles applications lisses par morceaux. On va donner quelques conditions qui permettent à ce modèle de converger vers un attracteur chaotique robuste. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale: << **Robust Chaos in a General Lozi Mapping with Max Function, Far East Journal of Dynamical Systems, Vol 26, Num 1, pages 15-29, 2015** >>.

6.2 Le chaos robuste dans l'application de Lozi avec la fonction max

Dans ce chapitre, le chaos robuste est examiné pour une famille d'applications de Lozi avec la fonction max et démontré qu'ils peuvent avoir des attracteurs chaotiques robustes pour certaines valeurs de ces deux paramètres. Ici, nous donnons certaines conditions et certaines formes de deux fonctions f et g pour les deux paramètres a et b , de sorte que ces cartes (applications) converger vers un attracteur chaotique robuste.

La famille des applications de Lozi avec la fonction max , est défini par :

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - a \max(f(x, y), g(x, y)) + by \\ x \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Où f et g sont deux fonctions arbitraires et a, b sont les paramètres de bifurcation. Nous pouvons écrire l'application L sous la forme :

$$L(x, y) = \begin{cases} L_A(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - af(x, y) + by \\ x \end{pmatrix} & \text{si, } (x, y) \in R_A \\ L_B(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - ag(x, y) + by \\ x \end{pmatrix} & \text{si, } (x, y) \in R_B \end{cases} \quad (6.2)$$

Où

$$\begin{cases} R_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f \geq g\} \\ R_B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f \leq g\} \end{cases} \quad (6.3)$$

et la frontière entre eux est $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = g(x, y)\}$. Il est supposé que les deux fonctions f, g et leurs dérivés sont continues, d'où l'application L est continue et sa dérivée est pas continue sur la frontière Π . Nous supposons que (6.2) a deux points fixes $P_A(x_A, y_A)$ et $P_B(x_B, y_B)$ sur les deux sous-régions R_A et R_B respectivement, les deux matrices de (6.4) et (6.5) ont évalué aux deux points P_A, P_B dans R_A et R_B respectivement

sont

$$J_A = \begin{pmatrix} -a \frac{\delta f}{\delta x}(x_A, y_A) & -a \frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) + b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$J_B = \begin{pmatrix} -a \frac{\delta g}{\delta x}(x_B, y_B) & -a \frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) + b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Par conséquent, les déterminants des deux matrices donnés dans (6.4), (6.5) sont $Det_A = a \frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) - b$, $Det_B = a \frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) - b$ respectivement.

L'application (6.1) est un système dynamique dissipatif lorsque,

$$\left| a \frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) - b \right| < 1, \quad \left| a \frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) - b \right| < 1 \quad (6.6)$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{cases} \frac{-b+1}{a} < \frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) < \frac{b+1}{a} \text{ et } \frac{-b+1}{a} < \frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) < \frac{b+1}{a} \text{ si } a > 0. \\ \frac{b+1}{a} < \frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) < \frac{-b+1}{a} \text{ et } \frac{b+1}{a} < \frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) < \frac{-b+1}{a} \text{ si } a < 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

6.2.1 Les résultats analytiques

Dans cette sous section, nous allons donner une preuve rigoureuse de certaines conditions sur les paramètres a et b , de sorte que l'application (6.1) converge vers un attracteur chaotique robuste.

La nature des bifurcations collision des frontières dépend de la nature locale de l'application au voisinage des points fixes, donc il suffit de regarder l'approximation linéaire par morceaux sur les côtés de la frontière.

La forme normale de l'application (6.2) dans le voisinage de l'un des points fixes à la frontière est donnée par la forme :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \tau_A & 1 \\ -\delta_A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } x_n \leq 0 \\ \begin{pmatrix} \tau_B & 1 \\ -\delta_B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } x_n \geq 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

où μ est le paramètre de bifurcation et $\tau_A, \tau_B, \delta_A, \delta_B$ sont les traces et les déterminants pour les deux matrices J_A et J_B évalués à P_A et P_B respectivement.

Par conséquent, nous avons

$$\begin{cases} \tau_A = -a \frac{\delta f}{\delta x}(x_A, y_A) \\ \tau_B = -a \frac{\delta g}{\delta x}(x_B, y_B) \\ \delta_A = a \frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) - b \\ \delta_B = a \frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) - b \end{cases} \quad (6.9)$$

Les bifurcations collision de la frontière de l'application L dépendent uniquement des valeurs de $\tau_A, \tau_B, \delta_A, \delta_B$, alors il suffit d'étudier les bifurcations collision de la frontière de la forme normale (6.2).

Nous considérons la situation où l'application L est dissipatif sur R_A et R_B . i.e., $|\delta_A| < 1, |\delta_B| < 1$.

Nous choisissons τ_A, τ_B satisfaisant les deux conditions:

$$-(1 + \delta_A) < \tau_A < (1 + \delta_A) \quad (6.10)$$

Est

$$-2\sqrt{\delta_B} < \tau_B < 2\sqrt{\delta_B} \quad (6.11)$$

Les conditions précédentes assurent que le point fixe P_A est un attracteur de flip et P_B est une spirale dans le sens horaire ou le sens antihoraire. Ainsi, il n'y a pas d'orbites périodiques apparaissent.

Les points fixes dans les sous-régions R_A, R_B sont donnés par :

$$P_A\left(\frac{\mu}{1 - \tau_A + \delta_A}, \frac{\mu\delta_A}{1 - \tau_A + \delta_A}\right), P_B\left(\frac{\mu}{1 - \tau_B + \delta_B}, \frac{\mu\delta_B}{1 - \tau_B + \delta_B}\right) \quad (6.12)$$

Ces points existe pour

$$\frac{\mu}{1 - \tau_A + \delta_A} \leq 0 \text{ et } \frac{\mu}{1 - \tau_B + \delta_B} \geq 0$$

Selon (6.9), (6.10) et (6.11), on obtient

$$-(1 + a\frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) - b) < -a\frac{\delta f}{\delta x}(x_A, y_A) < (1 + a\frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) - b), \quad (6.13)$$

et

$$-2\sqrt{a\frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) - b} < -a\frac{\delta g}{\delta x}(x_B, y_B) < 2\sqrt{a\frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) - b}. \quad (6.14)$$

En conséquence, nous avons

$$-1 + b - a\frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) < a\frac{\delta f}{\delta x}(x_A, y_A) < 1 - b + a\frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A), \quad (6.15)$$

et

$$-2\sqrt{a\frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) - b} < a\frac{\delta g}{\delta x}(x_B, y_B) < 2\sqrt{a\frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) - b}. \quad (6.16)$$

D'après (6.16), on obtient

$$0 < \left(a\frac{\delta g}{\delta x}(x_B, y_B)\right)^2 < 4(a\frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) - b) \quad (6.17)$$

à cause de $|\delta_A| < 1$ et $|\delta_B| < 1$, nous avons

$$b - 1 < a\frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) < b + 1 \text{ et } b - 1 < a\frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) < b + 1 \quad (6.18)$$

En utilisant (6.15), (6.16) et (6.18), on obtient

$$-2 < a \frac{\delta f}{\delta x}(x_A, y_A) < 2 \text{ et } -2 < a \frac{\delta g}{\delta x}(x_B, y_B) < 2 \quad (6.19)$$

Ainsi, nous obtenons

$$\left| a \frac{\delta f}{\delta x}(x_A, y_A) \right| < 2 \text{ et } \left| a \frac{\delta g}{\delta x}(x_B, y_B) \right| < 2 \quad (6.20)$$

Proposition 6.1 *Nous considérons l'application L défini par:*

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - a \max(f(x, y), g(x, y)) + by \\ x \end{pmatrix}$$

Où f et g sont deux fonctions arbitraires, a et b représentent deux paramètres réels de bifurcation. L'application L est écrit sous la forme nomal:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \tau_A & 1 \\ -\delta_A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{pour } x_n \leq 0 \\ \begin{pmatrix} \tau_B & 1 \\ -\delta_B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{pour } x_n \geq 0 \end{cases}$$

Nous supposons que l'application L a deux points fixes $P_A(x_A, y_A)$ et $P_B(x_B, y_B)$ situé sur les deux sous-régions $R_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f \geq g\}$, $R_B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f \leq g\}$ respectivement. L'application L est dissipatif sur les deux sous-régions R_A, R_B . En outre, on suppose également que τ_A, τ_B satisfaisant à $-(1 + \delta_A) < \tau_A < (1 + \delta_A)$, $-2\sqrt{\delta_B} < \tau_B < 2\sqrt{\delta_B}$ respectivement. Si nous avons $|a \frac{\delta f}{\delta x}(x_A, y_A)| < 2$ et $|a \frac{\delta g}{\delta x}(x_B, y_B)| < 2$, il ya une paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ assure la convergence de l'application L vers un attracteur chaotique robuste.

6.2.2 Quelques formes de fonctions f et g

Dans cette subsection, nous allons déterminer quelques formes de fonctions f et g en utilisant [18]. Ici, nous déterminons rigoureusement la région des paramètres a et b où l'application L converge vers un attracteur chaotique robuste.

Si les deux points fixes P_A et P_B donné en (6.12) existent, nous pouvons écrire l'application (6.1) sous la forme normale (6.2). Ainsi, nous supposons que

$$\delta_A < \frac{\tau_A^2}{4} \text{ et } \delta_B < \frac{\tau_B^2}{4} \quad (6.21)$$

Par conséquent, nous obtenons en utilisant les deux inégalités $\tau_A^2 - 4\delta_A > 0$ et $\tau_B^2 - 4\delta_B > 0$ les valeurs propres $\lambda_{A1} = \frac{\tau_A + \sqrt{\tau_A^2 - 4\delta_A}}{2}$, $\lambda_{A2} = \frac{\tau_A - \sqrt{\tau_A^2 - 4\delta_A}}{2}$ respecté à R_A et $\lambda_{B1} = \frac{\tau_B + \sqrt{\tau_B^2 - 4\delta_B}}{2}$, $\lambda_{B2} = \frac{\tau_B - \sqrt{\tau_B^2 - 4\delta_B}}{2}$ respecté à R_B .

À partir de (6.12), nous avons

$$\tau_A = -a \frac{\delta f}{\delta x}(x_A, y_A) \quad (6.22)$$

et

$$\tau_B = -a \frac{\delta g}{\delta x}(x_B, y_B) \quad (6.23)$$

Pour $a \neq 0$, nous avons

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_A, y_A) = -\frac{\tau_A}{a} \neq 0 \quad (6.24)$$

et

$$\frac{\delta g}{\delta x}(x_B, y_B) = -\frac{\tau_B}{a} \neq 0 \quad (6.25)$$

Par conséquent

$$\begin{cases} f(x, y) = \eta x + u(y): \eta \neq 0 \\ g(x, y) = \mu x + v(y): \mu \neq 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

Où, $\eta = -\frac{\tau_A}{a} \neq 0$, $\mu = -\frac{\tau_B}{a} \neq 0$, et u, v sont des fonctions arbitraires de y .

Appliquons maintenant les conditions qui a été donnée dans [18].

La première condition est

$$\begin{cases} \tau_A > \delta_A + 1 \text{ et } \tau_B < -(1 + \delta_B) \\ \delta_A < 0 \text{ et } -1 < \delta_B < 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

Par conséquent

$$\delta_A < \min(-\eta a - 1, 0) \text{ et } -1 < \delta_B < \min(\mu a - 1, 0) \quad (6.28)$$

La deuxième condition est

$$\frac{\lambda_{A1} - 1}{\tau_A - 1 - \delta_A} > \frac{\lambda_{B2} - 1}{\tau_B - 1 - \delta_B} \quad (6.29)$$

Où

$$\frac{\lambda_{B2} - 1}{\tau_B - 1 - \delta_A} < \frac{\tau_A - \delta_A - \lambda_{A2}}{(\tau_A - 1 - \delta_A)(\lambda_{A2} - \tau_B)} \quad (6.30)$$

Par conséquent

$$\frac{\eta a - \sqrt{\eta^2 a^2 - 4\delta_A} + 2}{\eta a + 1 - \delta_A} > \frac{\mu a + \sqrt{\mu^2 a^2 - 4\delta_B} + 2}{\mu a + 1 + \delta_B} \quad (6.31)$$

Où

$$\frac{\mu a + \sqrt{\mu^2 a^2 - 4\delta_B} + 2}{\mu a + 1 + \delta_A} < \frac{\eta a + 2\delta_A - \sqrt{\eta^2 a^2 - 4\delta_A}}{(\eta a + 1 + \delta_A) \left(\mu a - \frac{\eta a + \sqrt{\eta^2 a^2 - 4\delta_A}}{2} \right)} \quad (6.32)$$

Et la troisième condition est

$$(\lambda_{A2} - \tau_B)\lambda_{A1} - \tau_A + \tau_B + \delta_A > 0 \quad (6.33)$$

Par conséquent

$$\mu a \left(\frac{-\eta a + \sqrt{\eta^2 a^2 - 4\delta_A}}{2} \right) + (\eta - \mu)a + 2\delta_A > 0 \quad (6.34)$$

Et, d'autre part, nous avons

$$\delta_A = a \frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) - b \quad (6.35)$$

$$\delta_B = a \frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) - b \quad (6.36)$$

Pour $a \neq 0$, nous avons

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x_A, y_A) = \frac{\delta_A + b}{a} \neq 0 \quad (6.37)$$

et

$$\frac{\delta g}{\delta y}(x_B, y_B) = \frac{\delta_B + b}{a} \neq 0 \quad (6.38)$$

Par conséquent

$$\begin{cases} f(x, y) = \alpha y + \omega(x) : \alpha \neq 0 \\ g(x, y) = \beta y + \varphi(x) : \beta \neq 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

Où, $\alpha = \frac{\delta_A + b}{a} \neq 0$, $\beta = \frac{\delta_B + b}{a} \neq 0$ and ω, φ sont des fonctions arbitraires de x .

En appliquant les mêmes conditions ci-dessus, nous obtenons la première condition comme suit :

$$\tau_A > \alpha a - b + 1 \text{ et } \tau_B < -1 - \beta a + b \text{ avec } \max(\alpha a, \beta a) < b < \beta a + 1 \quad (6.40)$$

La deuxième condition est

$$\frac{\tau_B + \sqrt{\tau_A^2 - 4\alpha a + 4b} - 2}{\tau_A - 1 - \alpha a + b} > \frac{\tau_B - \sqrt{\tau_B^2 - 4\beta a + 4b} - 2}{\tau_B - 1 - \beta a + b} \quad (6.41)$$

Où

$$\frac{\tau_B - \sqrt{\tau_B^2 - 4\beta a + 4b} - 2}{\tau_B - 1 - \alpha a + b} < \frac{\tau_A - 2\alpha a + 2b + \sqrt{\tau_A^2 - 4\alpha a + 4b}}{(\tau_A - 1 - \alpha a + b) \left(\frac{\tau_A - \sqrt{\tau_A^2 - 4\alpha a + 4b}}{2} - \tau_B \right)} \quad (6.42)$$

et la troisième condition est

$$\tau_B \left(1 - \frac{\tau_A + \sqrt{\tau_A^2 - 4\alpha a + 4b}}{2} \right) - \tau_A + 2\alpha a - 2b > 0 \quad (6.43)$$

Il est prouvé numériquement que:

Pour

$$\begin{cases} f(x, y) = -px + qy^2, & g(x, y) = px - qy^3 \\ 0.7 \leq a \leq 0.9, & 0.2 \leq b \leq 0.7, & 0.91 \leq p \leq 1, & 0.90 \leq q < 1 \end{cases} \quad (6.44)$$

et

$$\begin{cases} f(x, y) = -py + qx^2, & g(x, y) = py - qx^3 \\ 0.7 \leq a \leq 0.9, & 0.2 \leq b \leq 0.3, & 0.9 \leq p < 1, & 0.9 \leq q \leq 1. \end{cases} \quad (6.45)$$

1. La proposition (6.1) est satisfaite pour (6.44) et (6.45).
2. Le modèle (6.1) peut donner deux attracteurs chaotiques robustes différentes, un pour (6.44) et l'autre pour (6.45).
3. Les conditions (6.28), (6.31) et (6.32) ou (6.28), (6.32) et (6.34) sont satisfaites pour (6.44) et les conditions (6.40), (6.41) et (6.43) ou (6.40), (6.42) et (6.43) sont satisfaites pour (6.45).

6.2.3 Simulation numérique et l'observation des attracteurs chaotiques robustes

Dans cette section, nous allons étudier numériquement quelques exemples, pour démontrer l'efficacité des résultats.

◆ Pour :

$$f(x, y) = -0.99x + 0.95y^2 \text{ et } g(x, y) = 0.99x - 0.95y^3$$

Avec, $(a, b) = (0.85, 0.5)$, l'application peut être écrite sous la forme :

$$L(x, y) = \begin{cases} 1 - 0.85 \max(-0.99x + 0.95y^2, 0.99x - 0.95y^3) + 0.5y \\ x \end{cases} \quad (6.46)$$

Dans cet exemple, la simulation numérique montre que, pour la condition unitial $(1, 1)$ de l'application (6.44), a un attracteur chaotique robuste, comme illustré sur les figures (6.1), (6.2) et (6.3).

Les exposants de Lyapunov existent avec les valeurs $E_1 = -0.755957492608380$ et $E_2 = 0.732395492608378$. Cela prouve que, l'application (6.44) possède une forte sensibilité à l'état initial. En outre, la simulation numérique a également indiqué que cette attracteur est bornée en raison de $\max(x_n) = \max(y_n) \approx 1.748021334457663$ et $\min(x_n) = \min(y_n) \approx 0.258991265924537$.

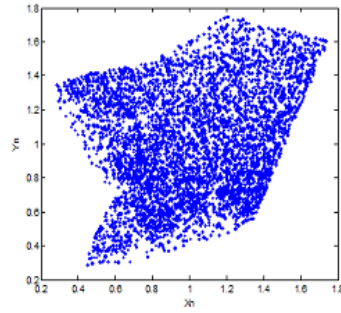


FIG. 6-1 – L'attracteur chaotique robuste de l'application L avec $f(x, y) = -0.99x + 0.95y^3$, $g(x, y) = 0.99x - 0.95y^3$ et $(a, b) = (0.85, 0.50)$.

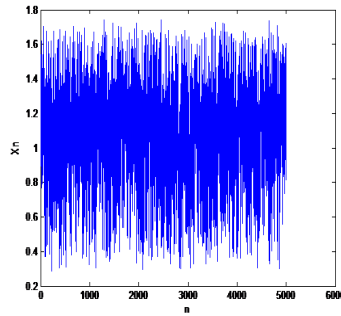


FIG. 6-2 – Les séries chronologiques x_n correspondant à l'état initial $(1, 1)$.

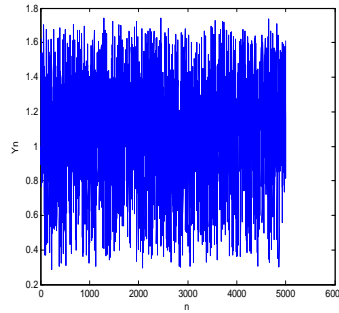


FIG. 6-3 – Les séries chronologiques y_n correspondant à l'état initial $(1, 1)$.

◆ Pour :

$$f(x, y) = -0.95y + 0.99x^2 \text{ et } g(x, y) = 0.95y - 0.99x^3$$

Avec, $(a, b) = (0.75, 0.25)$, l'application L peut être écrit sous la forme :

$$L(x, y) = \begin{cases} 1 - 0.75 \max(-0.95y + 0.99x^2, 0.95y - 0.99x^3) + 0.25y \\ x \end{cases} \quad (6.47)$$

Dans cet exemple, la simulation numérique montre que, pour la condition unitial $(1, 1)$ de l'application (6.45) a un attracteur chaotique robuste complètement différente de la précédente, comme illustré sur les figures (6.4), (6.5) et (6.6).

Les exposants de Lyapunov existent avec les valeurs $E_1 = -0.642765954762084$ et $E_2 = 0.347161540062413$. Cela prouve que l'application (6.45) possède une forte sensibilité à l'état initial. En outre, la simulation numérique a également indiqué que l'attracteur est bornée puisque $\max(x_n) = \max(y_n) \approx 1.313853530714129$ et $\min(x_n) = \min(y_n) \approx 0.678971819331489$.

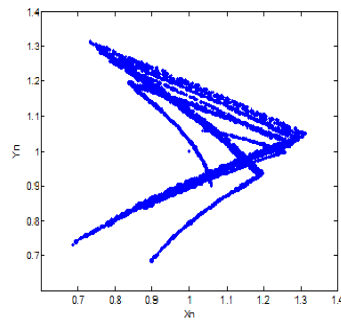


FIG. 6-4 – L'attracteur chaotique robuste de l'application L avec $f(x, y) = -0.95y + 0.99x^3$, $g(x, y) = 0.95y - 0.99x^3$ et $(a, b) = (0.75, 0.25)$.

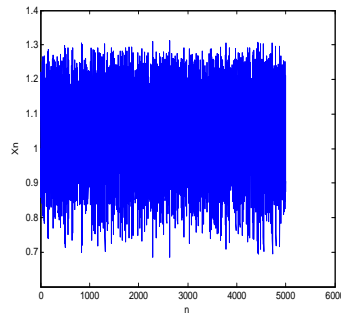


FIG. 6-5 – Les séries chronologiques x_n correspondant à l'état initial $(1, 1)$.

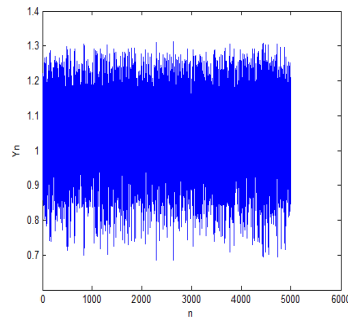


FIG. 6-6 – Les séries chronologiques y_n correspondant à l'état initial $(1, 1)$.

6.2.4 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques résultats analytiques et quelques formes des fonctions f et g qui permettent à l'application générale de Lozi avec la fonction max de converger vers un attracteur chaotique robuste. Si il ya d'autres formes pour les deux fonctions f et g , nous laissons ça pour le future recherche.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons présenté, un cadre de base sur le chaos et les bifurcations dans les systèmes dynamiques en dimension n ($n > 1$).

Au début, nous avons présenté l'importance de la théorie du chaos et bifurcations dans les systèmes dynamiques, et leurs applications dans les différents domaines de la science. Nous avons démontré que le chaos représente un mécanisme important d'adaptation, et qu'il intervient largement dans le monde du vivant.

Après, on a focalisé sur deux théories des systèmes dynamique, on parle de la théorie de la bifurcation et la théorie de chaos. On a exposé l'un des bifurcations la plus étudiée aux systèmes dynamiques au cours des dernières années, appelé « *la bifurcation collision des frontières* » qui ce produit aux systèmes dynamiques lisses par morceaux. On a présenté également quelques propriétés, et quelques types de chaos, l'un de ces types est « *le chaos robuste* ».

Finalement, on a examiné *le chaos robuste* sur une famille d'applications de Lozi avec la fonction *max* et démontré qu'ils peuvent avoir *des attracteurs chaotiques robustes* pour certaines valeurs de ces deux paramètres, nous avons donné certaines conditions et certaines formes de deux fonctions f et g pour les deux paramètres a et b , de sorte que ces cartes converge vers un *attracteur chaotique robuste*. Le contenu de cette partie à fait l'objet d'une publication international « **Robust Chaos in a General Lozi Mapping with Max Function, Far East Journal of Dynamical Systems, Vol 26, Num 1, pages 15-29, 2015** ».

Références

- [1]. A. Alaoui, C. Robert, C. Grebogi, *Dynamics of a Hénon-Lozi-type map*, Chaos, Solitons and Fractals, **12**, 2323-2341, 2001.
- [2]. A. Priel, I. Kanter, *Robust chaos generation by a perceptron*, Europhys. Lett, **51(2)**, 230-236, 2000.
- [3]. D. J. Albers, J. C. Sprott, W. D. Dechert, *Routes to chaos in neural networks with random weights*, Int. J of Bifurcation and Chaos, **8**, 1463-1478, 1998.
- [4]. F. R. Maorotto, *Chaotic behavior in the Hénon mapping*, Journal Com Math. Phys, **68**, 187-194, 1979.
- [5]. G. Nagamani, S. Ramasamy and P. Balasubramaniam, *Robust dissipativity and passivity analysis for discrete-time stochastic neural networks with time-varying delay*, Wiley Online Library, **20(3)**, 1-12, 2014
- [6]. H. Sompolinsky, A. Crisanti, H. J. Sommers, *Chaos in random neural networks*, Phys. Rev. Lett, **61**, 259-26, 1998.
- [7]. M. Hénon, *A two dimensional mapping with a strange attractor*, Commun. Math. Phys, **50**, 69-77, 1976. M. Andrecut,
- [8]. M. K. Ali, *On the occurrence of robust chaos in a smooth system*, Modern Physics Letters B, **15**, 391-395, 2001.
- [9]. M. Benedicks, L. Carleson, *the dynamics of the Hénon maps*, *Annals of Mathematics*, **133**, 1-25, 1991.
- [10]. M. Misiurewicz, *Strange attractor for the Lozi-mapping in Nonlinear dynamics*, Annals of the New York Academy of Sciences, **357**, 348-358, 1980.
- [11]. R. Lozi, *Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon*, Phys. Colloque C5 39 (1978), Supplément au, **8**, 9-10 (French), 1978.
- [12]. R. Senkerik, I. Zelinka and others, *Evolutionary control of chaotic Lozi map by means of chaos driven differential evolution*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014, **282**, 371-380, 2014.

- [13] . S. Banerjee, C. Grebogi, *Border collision bifurcations in two-dimensional piece-wise smooth maps*, Interdisciplinary Nonlinear Science, **2**, 4052-4061, 1999.
- [14] . S. Banerjee, J. A. York, C. Grebogi, *Robust chaos*, Phys. Rev. Lett, **80(14)**, 3049-3052, 1998.
- [15] . T. Gilbert, J. R. Dorfman, *On the parametric dependences of a class of non-linear singular maps*, AIM sciences, **4**, 1-17, 2004.
- [16] . Z. Elhadj, J. C. Sprott, *A new simple 2-D piecewise linear map*, J System Sci Complex, **23**, 379-389, 2010.
- [17] . Z. Elhadj, J. C. Sprott, *On the robustness of Chaos in dynamical systems*, Frontiers. Physics. China, **3(2)**, 195-204, 2008.
- [18] . Z. Elhadj, *A unified piecewise smooth chaotic mapping that contains the Hénon and the Lozi systems*, Annual review of chaos theory bifurcations and dynamical systems, **1**, 50-60, 2012.
- [19] . Z. Elhadj, *Lozi Mappings : Theory and Applications*. CRC Press. 2013, ISBN-10 : 1466580704.
- [20] . P. Gabriel. Erez, *Robust chaos in polynomial unimodal maps*, Int. J. Bifurcation. and Chaos, **14 (7)**, 2431-2437, 2004.
- [21] . Robinson C, *Homoclinic Bifurcation to a Transitive Attractor of Lorenz Type*, Non-linearity, **2**, 495-518, 1989.
- [22] . Kowalczyk. P, *Robust chaos and border collision bifurcations in non invertible piecewise linear maps*, Nonlinearity, **18**, 485-504, 2005.
- [23] . J. Lu, T. Zhou, G. Chen et S. Zhang, *Local bifurcations of the chen system*, Int. J. of bifurcations and chaos, **12**, 2257-2270, 2001.
- [24] . T. Zhou et G. Chen, *Classification of Chaos in 3-D Autonomous quadratic System-I*, Int. J. of Bifurcation and Chaos, **16**, 2459-2479, 2006.
- [25] S. Dadras, H. Re. Momeni et Qi. Guoyuan, *Analysis of a new 3-D smooth autonomous system with different wing chaotic attractors and transient chaos*, Indian

Journal of Microbiology, **62**, 391-405, 2007.