

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI- OUM EL BOUAGHI**

**FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE**

**DEPARTEMENT DES SCIENCES DE LA MATIERE SM**

Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur en Sciences

Spécialité : PHYSIQUE

Option : ENERGETIQUE

PAR

**BOUZID SIHEM**

**ETUDE ET CALCUL DES DEFORMATIONS THERMOELASTIQUES DANS UN**  
**SOLIDE ANISOTROPE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

---

Soutenue publiquement le 19/06/2018 devant l'honorable jury composé de Messieurs :

<b>BERKANI</b>	<b>Walid</b>	<b>Maître de conférences à l'université d'Oum El Bouaghi</b>	<b>Président</b>
<b>BOUMAZA</b>	<b>A.Charif</b>	<b>Professeur à l'université de Khenchela</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>ZAABAT</b>	<b>Mourad</b>	<b>Professeur à l'université d'Oum El Bouaghi</b>	<b>Co-rapporteur</b>
<b>HEBBIR</b>	<b>Nacer</b>	<b>Maître de conférences à l'université d'Oum El Bouaghi</b>	<b>Examineur</b>
<b>CHEHAOUI</b>	<b>Oualid</b>	<b>Maître de conférences à l'université de Khenchela</b>	<b>Examineur</b>

## **Remerciements**

Pour moi, ce n'est pas le dernier pas, c'est plutôt le premier pas après une rupture avec le domaine de la recherche, c'est pourquoi je tiens à remercier énormément toute personne ayant participé, de près ou de loin, à ce retour et qui m'ont permis de voir l'issue. Par ces quelques mots, croyez bien que je vous exprime toute ma gratitude.

Bien qu'il s'agisse d'une des premières pages de ce manuscrit de thèse, c'est aussi la dernière page que j'ai rédigée. C'est pourquoi, quand j'en suis arrivé à l'écrire, je me suis dit que la fin de l'aventure de la thèse était proche. J'ai repensé à tous les moments passés, avant d'entamer une nouvelle expérience. En premier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement Messieurs le Professeur BOUMAZA Abd Charif, mon encadreur que je considère un grand frère, pour m'avoir fait l'honneur de rapporter ce travail de thèse, dans un délai relativement bref. Il a apporté son regard très pertinent, issu d'expériences différentes, à ce travail. Il n'a cessé tout au long des années et dans toutes les circonstances, de m'encourager et de m'apporter aide et conseils précieux. Grand Merci Professeur BOUMAZA.

Mes plus vifs remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur ZAABAT Mourad, mon co-encadreur, pour son aide et sa contribution considérables, pour la grande autonomie qu'il m'a laissé, et toutes les démarches administratives qu'il a facilité pour moi.

Je saisis cette occasion pour exprimer mes remerciements et ma reconnaissance à Monsieur le Professeur NOUIRI Abdelkader, éditeur en chef du journal JNTM pour m'avoir honoré par la publication à travers son journal.

Un remerciement particulier va à Monsieur le Professeur AFRID MOHAMED, Professeur au département de physique à Constantine, pour tous ses précieux conseils dont j'ai essayé de faire bon usage ainsi que les remarques et directives qu'il m'a indiqué lors des consultations qu'il m'a accordé.

Mon remerciement va aussi à Monsieur le Docteur BERKANI Walid, mon collègue, pour avoir accepté de présider mon jury, qu'il trouve ici l'expression de mon respect et ma considération.

Un remerciement adressé spécialement à Messieurs les Docteurs HEBBIR Nacer, et CHEHAOUI Oualid pour avoir accepté d'être membres de mon jury pour enrichir et éclairer le débat final à la lumière de leurs compétences respectives.

Sans oublier par l'occasion, d'exprimer mes remerciements à Messieurs BOUAOUD Salah, ARHAB Rabah et NADJAH Messaoud pour leur contribution à la procédure de transfert de dossier.

Et bien sûr un remerciement spécial pour ma chère collègue et amie pour les meilleurs comme les pires moments qu'on a passé ensemble durant ces années.

Une pensée à SALIHA PG pour son accueil chaleureux et sa gentillesse illimitée.

Pour conclure, je prie les personnes non mentionnées, mais non oubliées, de bien vouloir m'excuser... et à tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin ou qui m'ont donné le goût pour reprendre, j'adresse une pensée amicale.

## SOMMAIRE

<b>Remerciements</b> .....	i
<b>Dédicace</b> .....	ii
<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Nomenclature</b> .....	vii
<b>Liste des figures</b> .....	xi
<b>Liste des tableaux</b> .....	xii
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Revue bibliographique</b> .....	6
1.1 Introduction.....	6
1.2 Revue bibliographique.....	10
1.3 Bibliographie.....	18
<b>Chapitre 2 : Matériaux composites</b> .....	20
2.1 Définitions.....	20
2.1.1 Matrices.....	20
2.1.2 Renforts.....	21
2.2 Différentes structures des composites.....	22
2.2.1 Structures composites stratifiées.....	22
2.2.2 Structures sandwiches.....	22
2.2.3 Structures composites tissées multidirectionnelles.....	23
2.3 Relation composite/anisotropie.....	24
2.3.1 Classes de symétrie des solides anisotropes.....	25
2.4 Bibliographie.....	27
<b>Chapitre 3 : Notions sur le transfert de chaleur</b> .....	29
Introduction.....	29
3.1 Définition.....	29
3.2 Différents modes de transfert de la chaleur.....	28
3.2.1 Transfert de chaleur par conduction.....	30
3.2.1.1 Loi de Fourier (1822).....	30
3.2.1.2 Le champs de température.....	31
3.2.1.3 Le flux de chaleur.....	31
3.2.1.4 Conditions aux limites en conduction thermique.....	32

3.2.2 Transfert de chaleur par convection.....	34
3.2.3 Transfert de chaleur par rayonnement.....	35
3.3 Loi de Fourier pour un solide anisotrope.....	35
3.4 Quelques tenseurs de conductivité thermique $[K_{ij}]$ .....	38
3.5 Bibliographie.....	39
<b>Chapitre 4 : Modèle numérique.....</b>	<b>41</b>
4.1 Notions sur les méthodes numériques.....	41
4.2 Différentes méthodes numériques.....	41
4.2.1 Méthode des différences finis.....	41
4.2.2 Méthode des volumes finis.....	42
4.2.3 Méthode des éléments finis.....	42
4.2.3.1 Principe de la méthode.....	42
4.2.3.2 Fondements de la méthode des éléments finis.....	42
4.2.3.3 Discrétisation du domaine.....	43
4.2.3.4 Approximation nodale.....	43
4.2.3.5 Assemblage.....	44
4.2 Méthodes variationnelles.....	46
4.2.1 Méthode des résidus pondérés.....	46
4.2.2 Méthode de GALERKIN .....	46
4.2.3 Méthode de minimisation de l'énergie potentielle.....	47
4.3 Application de la méthode de Galerkin pour le calcul des températures.....	48
4.3.1 Description du problème.....	48
4.3.2 Discrétisation du domaine.....	49
4.3.3 Discrétisation de l'équation de chaleur.....	57
4.3.3.1 Choix de la fonction d'interpolation.....	58
4.3.3.2 Application de la méthode de Galerkin.....	61
4.3.3.3 Assemblage des matrices élémentaires.....	63
4.3.3.4 Vecteur charge élémentaire $\{B\}^{ee}$ .....	65
4.3.3.5 L'organigramme .....	68
<b>Chapitre 5 : Résultats et discussion.....</b>	<b>72</b>
5.1 Effet du maillage.....	72
5.2 Influence de la source de chaleur.....	75

5. 3 Résultats pour différents types de solide .....	77
5. 3.1 Cas du solide triclinique.....	77
5. 3.2 Cas du solide monolinique.....	82
5. 3.3 Cas du solide orthorhombique.....	87
5. 3.4 Cas du solide trigonal.....	92
5.3.5 Cas du solide isotrope.....	97
5. 4 Comparaison entre différents cas.....	102
<b>Conclusion</b> .....	104
<b>Bibliographie</b> .....	107
<b>Annexe</b> .....	111
<b>Résumé</b> .....	127



## NOMENCLATURE

### Lettres latines

A, B	constantes du calcul de l'intégrale du vecteur charge	
$a_i, b_i, c_i, d_i : i = i, j, k, l$ ou 1, 2, 3, 4	constantes géométriques	[m]
$\{B\}^e$	Vecteur de charge élémentaire	[w]
$\{B\}$	Vecteur de charge global	[w]
Cp	chaleur massique	[KJ/kgK]
D	Domaine d'étude	[m <sup>3</sup> ]
D <sup>e</sup>	Domaine élémentaire.	[m <sup>3</sup> ]
e	épaisseur	[m]
h	Coefficient de convection	[w/m <sup>2</sup> K]
i, j, k, l	nœuds dans l'éléments typique (ee)	
ie, je, ke, le, me, re, pe, qe	nœuds correspondants à l'élément typique (e)	
in, ik, ir, ib, id,	Compteurs	
$k_{ij}$	Composants du tenseur de conductivité thermique.	[w/mK]
$[K]^e$	Matrice de rigidité élémentaire.	[w]
.		
$[K]$	Matrice de rigidité globale	[w]
$K_{11}, \dots, K_{44}$	Composantes de la matrice de rigidité	[w]
$N_1, \dots, N_8$	Nœuds directeurs	

$N_i(x,y,z), N_j(x,y,z), N_k(x,y,z), N_l(x,y,z)$	fonctions d'interpolations aux nœuds	
$\vec{h}$	Vecteur unitaire normale à la surface.	
$n_x, n_y, n_z$	Composantes du vecteur normal à la surface d'un élément	
$q_i$	Flux de chaleur dans la direction i.	[w/m <sup>2</sup> ]
$R_n$	Résidu	
$S_1, S_2, S_3$	longueurs du domaine	[m]
$sp_1, sp_2, sp_3$	longueurs de divisions, $sp_i = S_i/N_2$	[m]
$S$	Surface	[m <sup>2</sup> ]
$T$	Température	°K
$T_0$	Température de milieu ambiant	°K
$\Delta T$	Variation de la température	
$U$	fonction à calculer	
$U_a$	solution approchée	
$V$	volume d'un élément tétraèdre (ee)	[m <sup>3</sup> ]
$W$	Source de chaleur	[w/m <sup>3</sup> ]
$x, y, z$	coordonnées du point	[m]

### **Lettres grecques**

$\mathcal{L}$	opérateur de variation	
$\varphi$	Densité de flux de chaleur	[w/m <sup>2</sup> ]
$\lambda_{eq}$	Conductivité de chaleur équivalente	[w/mK]

$\rho$	masse volumique	$[\text{kg/m}^3]$
	déterminant du système.	
$\Phi^e(x,y,z)$	fonction à calculer dans l'élément	
$\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, \Phi_l$	fonctions nodales	
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$	constantes de la fonction d'interpolation	
$\Sigma^e$	surface d'un élément	$[\text{m}^2]$

### **Indices**

$i, j, k$	indices de directions
-----------	-----------------------

### **Exposants**

(e)	Élément cube
(ee)	élément tétraèdre
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	puissances des fonctions d'interpolation



## LISTE DES FIGURES

N°	Titre	Page
Figure 1. 1	Echelle de la matière, des matériaux et des structures	6
Figures 1.2 (a) et (b)	Structures	7
Figure 1.3.	MEMS	7
Figure 1.4	Nanostructures	8
Figure 1.5	Joint de grains dans un carbure de silicium	8
Figure 1.6	Structures cellulaires	9
Figure 1.7	Expérience de plaque chaude gardée symétrique	10
Figure.1.8	Champs de température d'un milieu homogène en conduction pure	11
Figure 1.9	Microstructure hétérogène choisie pour la validation du code 3D en conduction pure	12
Figure 1.10	Champs de température d'un milieu hétérogène en conduction pure	12
Figure 1.11	Champs de températures mesurées sur la face de dessus	13
Figure 1.12	Représentation schématique du problème	13
Figure 1.13	Représentation imagée de la distribution de température dimensionnelle dans le bicouche soumis à un flux de chaleur	14
Figure 1. 14	Géométrie et conditions limites du cône tronqué composite; direction des fibres et système de coordonnées	14
Figure 1. 15	Contour de la température	15
Fig1. 16	Plancher chaud	16
Figure 1. 17	Champ de température EF	16
Figure 1. 18	Température identifiée	16
Figure 1. 19	Champ de température	17
Figure 1. 20	Caractère de la diffusion thermique (a) isotrope (b) anisotrope	17
Figure 2.1	Stratifié constitué de couches parfaitement liées	22
Figure 2.2	Désignations du stratifié	22
Figure 2.3	Désignations d'une âme nid d'abeilles	23
Figure 2.4	D Sic-Sic : matériau avec deux directions de renfort	23
Figure 2.5	Géométrie tri-orthogonale de l'Aerolor 32	24
Figure 2.6	Seppcarb(r) 4D C/C renfort carbone/matrice carbone : tissage suivant quatre directions de l'espace	24
Figure 2.7 (a) et (b)	Quelques exemples de microstructures de composites	25
Figure 2.8	Arbre des symétries des tenseurs d'élasticité	26
Figure 3.1	Transfert de chaleur par conduction dans un solide	30
Figure 3.2	Vecteur unitaire à la surface isotherme	31
Figure 3.3	Schéma du transfert de chaleur convectif	34
Figure 3.4	Elément de volume $dx dy dz$	36

Figure 4.1	Types d'éléments finis	44
Figure 4.2	Domaine d'étude (D)	48
Figure 4.3	Figure 4.3 (a) Elément cube(e) (b) , élément tétraèdre(ee)	48
Figure 4.4	Nœuds directeurs	49
Figure 4.5 (a)	Discrétisation suivant l'axe (oy)	52
Figure 4.4 (b)	Discrétisation suivant l'axe (oy)	52
Figure 4.5	Numérotation des nœuds des faces	53
(a) (b) (c)		
Figure 4.5	Numérotation des nœuds des faces	54
(d) (e) (f)		
Figure 4.6	Discrétisation suivant l'axe (oz)	55
Figure 4.7	Discrétisation suivant l'axe (ox)	55
Figure 4.8	élément de base (e) , cube	56
Figure 4.9	Discrétisation de l'élément (e) en sous éléments (ee)	57
Figure 4.10	Elément type (ee)	58
Figure 4.11	Organigramme de l'algorithme développé	68/69
Figure 5.1.1	Maillage 6x6x6	72
Figure 5.1.2	Maillage 7x7x7	73
Figure 5.1.3	Maillage 8x8x8	73
Figure 5.1.4	Maillage 9x9x9	74
Figure 5.1.5	Maillage 13x13x13	74
Figure 5.2.1	Champ de température pour $W=100w/m^3$	75
Figure 5.2.2	Champ de température pour $W=1000w/m^3$	76
Figure 5.2.3	Champ de température pour $W=10000w/m^3$	76
Figure 5.3.1	Champ de température pour le solide triclinique	77
Figure 5.3.1.a	Profil de température sur le plan YZ	77
Figure 5.3.1.a1	Profil pour $x=0$	78
Figure 5.3.1.a2	Profil pour $x=0.5$	78
Figure 5.3.1.a3	Profil pour $x=1$	78
Figure 5.3.1.b	Profil de température sur le plan XZ	79
Figure 5.3.1.b1	Profil pour $y=0$	79
Figure 5.3.1.b2	Profil pour $y=0.5$	79
Figure 5.3.1.b3	Profil pour $y=1$	80
Figure 5.3.1.c	Profil de température sur le plan XY	80
Figure 5.3.1.c1	Profil pour $z=0$	81
Figure 5.3.1.c2	Profil pour $z=0.5$	81
Figure 5.3.1.c3	Profil pour $z=1$	81
Figure 5.3.1.c4	Profil 2D	81
Figure 5.3.2	Champ de température pour le solide monoclinique	82
Figure 5.3.2.a	Profil de température sur le plan YZ	82
Figure 5.3.2.a1	Profil pour $x=0$	83
Figure 5.3.2.a2	Profil pour $x=0.5$	83
Figure 5.3.2.a3	Profil pour $x=1$	84
Figure 5.3.2.b	Profil de température sur le plan XZ	84

Figure 5.3.2.b1	Profil pour $y=0$	85
Figure 5.3.2.b2	Profil pour $y=0.5$	85
Figure 5.3.2.b3	Profil pour $y=1$	85
Figure 5.3.2.c	Profil de température sur le plan XY	86
Figure 5.3.2.c1	Profil pour $z=0$	86
Figure 5.3.2.c2	Profil pour $z=0.5$	86
Figure 5.3.2.c3	Profil pour $z=1$	87
Figure 5.3.2.c4	Profil 2D	87
Figure 5.3.3	Champ de température pour le solide orthorhombique	87
Figure 5.3.3.a	Profil de température sur le plan YZ	88
Figure 5.3.3.a1	Profil pour $x=0$	88
Figure 5.3.3.a2	Profil pour $x=0.5$	88
Figure 5.3.3.a3	Profil pour $x=1$	89
Figure 5.3.3.b	Profil de température sur le plan XZ	89
Figure 5.3.3.b1	Profil pour $y=0$	90
Figure 5.3.3.b2	Profil pour $y=0.5$	90
Figure 5.3.3.b3	Profil pour $y=1$	90
Figure 5.3.3.c	Profil de température sur le plan XY	91
Figure 5.3.3.c1	Profil pour $z=0$	91
Figure 5.3.3.c2	Profil pour $z=0.5$	91
Figure 5.3.3.c3	Profil pour $z=1$	91
Figure 5.3.3.c4	Profil 2D	91
Figure 5.3.4	Champ de température pour le solide trigonal	92
Figure 5.3.4.a	Profil de température sur le plan YZ	92
Figure 5.3.4.a1	Profil pour $x=0$	93
Figure 5.3.4.a2	Profil pour $x=0.5$	93
Figure 5.3.4.a3	Profil pour $x=1$	93
Figure 5.3.4.b	Profil de température sur le plan XZ	94
Figure 5.3.4.b1	Profil pour $y=0$	94
Figure 5.3.4.b2	Profil pour $y=0.5$	94
Figure 5.3.4.b3	Profil pour $y=1$	95
Figure 5.3.4.c	Profil de température sur le plan XY	95
Figure 5.3.4.c1	Profil pour $z=0$	96
Figure 5.3.4.c2	Profil pour $z=0.5$	96
Figure 5.3.4.c3	Profil pour $z=1$	96
Figure 5.3.4.c4	Profil 2D	96
Figure 5.3.5	Cas du solide isotrope	97
Figure 5.3.5.a	Profil de température sur le plan YZ	97
Figure 5.3.5.a1	Profil pour $x=0$	98
Figure 5.3.5.a2	Profil pour $x=0.5$	98
Figure 5.3.5.a3	Profil pour $x=1$	98
Figure 5.3.5.b	Profil de température sur le plan XZ	99
Figure 5.3.5.b1	Profil pour $y=0$	99
Figure 5.3.5.b2	Profil pour $y=0.5$	99
Figure 5.3.5.b3	Profil pour $y=1$	100
Figure 5.3.5.c	Profil de température sur le plan XY	100
Figure 5.3.5.c1	Profil pour $z=0$	101
Figure 5.3.5.c2	Profil pour $z=0.5$	101
Figure 5.3.5.c3	Profil pour $z=1$	101
Figure 5.3.5.c4	Profil 2D	101

Figure 5.4.1	Superposition du profil de température pour différents cas	102
Figure 5.4.2	Superposition du profil de température pour différents cas	102

**LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 2.1	Systèmes cristallins	25
Tableau 4.1	Coefficients A et B pour le calcul de l'intégrale	66

## INTRODUCTION

Tout phénomène physique nécessitant une analyse de son comportement vis-à-vis aux sollicitations extérieures diverses, consiste en la formulation mathématique de sa géométrie, et de la connaissance des paramètres gouvernant son comportement, ceci peut être formulé par les équations aux dérivées partielles couplées.

La modélisation des problèmes liés aux phénomènes de transferts de matière ou de chaleur est primordiale, d'une part lors de la phase d'étude ou de conception d'un produit, et d'autre part, pour le suivi de ce produit en phase de fonctionnement.

Parallèlement aux progrès technologiques, des avancées importantes ont vu le jour dans le domaine des transferts de chaleur, et les sciences liées à la thermique en particulier. Cette discipline se développe depuis quelques décennies à un rythme élevé grâce à l'outil informatique. Les secteurs concernés étant nombreux: nucléaire, spatial, aéronautique, automobile, pétrochimie, etc. [1].

Les matériaux composites suscitent un intérêt croissant au vu de leurs applications dans de nombreux secteurs industriels, car leur emploi tend à se généraliser.

Les objets à différentes échelles allant du nanomètre (assemblages atomiques) au kilomètre, voire au-delà (écorce et manteau terrestres, planètes et étoiles), même s'ils ont l'air tout homogènes, sont en fait des structures multi échelles, c'est-à-dire qu'ils présentent des niveaux d'hétérogénéité à différentes échelles.

Les bonnes propriétés des matériaux composites permettent un allègement des structures, particulièrement recherché dans des secteurs d'activités comme l'aéronautique et l'automobile. Les difficultés relatives aux dimensionnements des pièces en composites proviennent principalement du caractère anisotrope de leurs propriétés. Le calcul de ces structures demande une connaissance plus précise du comportement (mécanique, thermique, thermomécanique, ...) anisotrope de ces matériaux. On s'intéresse en particulier, à l'équilibre de ces structures pour connaître les charges (forces, températures,...) qu'elles supportent. Les problèmes liés à la durabilité des tels matériaux demandent, quant à eux, une meilleure connaissance des processus d'endommagement qui surviennent lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations thermomécaniques et/ou environnementales [2].

Dans plusieurs situations pratiques, le transfert de chaleur par conduction n'est pas monodimensionnel. Il est bi- ou tridimensionnel, différentes approches sont possibles :

- ✓ Analytique exacte (séparation des variables, limitée à des géométries simples avec conditions aux limites) ;
- ✓ Graphique approximative (sans génération interne d'énergie, valeur limitée pour des considérations quantitatives) ;

- ✓ et Numérique approximative (différences finies, éléments finis ou éléments frontières). C'est l'approche la plus utilisée et qui s'adapte à tous les niveaux de complexité).

La température intervient dans le comportement thermomécanique des matériaux, elle induit des déformations au sein de l'élément de matière. Ce sont les sollicitations d'origines thermiques qui jouent un rôle essentiel dans la plupart des structures et des composants industriels. Elles sont responsables de nombreuses ruptures en service à cause de la fatigue induite par leurs répétitions un grand nombre de cycles. Pour calculer ces contraintes d'origine thermique dans une pièce, il faut connaître le champ de température qui y règne [3].

Souvent, les calculs de transfert thermique sont exécutés indépendamment des calculs de contraintes: ils rapportent le champ de températures, qui sert d'un apport aux calculs de contraintes, il y a une interaction mutuelle entre contrainte/déformation et températures [4].

L'objectif de notre travail est de modéliser, résoudre et analyser le comportement thermique stationnaire des solides anisotropes tridimensionnels représentant certains matériaux composites. Notre contribution se construit à partir de la connaissance des microstructures de ces solides (triclinique, monoclinique...), sous l'effet d'une source de chaleur interne imposée, utilisant une méthode numérique se basant sur la méthode des éléments finis.

On vise, à élaborer un code numérique en langage Fortran, permettant le calcul des températures à tous les nœuds du solide pour différents types de solide. A titre comparatif on utilisera les résultats obtenus par un travail effectué dans le cas bidimensionnel [5].

Le domaine d'étude est tridimensionnel, la forme géométrique considérée est un cube de dimensions considérées égales à l'unité dans les trois directions, sollicité par une charge thermique constituée par une source volumique interne  $W$ , les frontières du domaine sont convectives avec le milieu ambiant.

Le manuscrit est réparti sur cinq chapitres comme suit :

Le chapitre 1 est une revue bibliographique des travaux réalisés par des chercheurs dans le but de prédire le comportement thermique et thermomécanique des structures composites, les plus utilisées récemment dans différents domaines, ceci pour répondre à des besoins de plus en plus précis.

Le chapitre 2 présente des généralités sur les matériaux composites, leurs applications dans différents domaines ainsi qu'un aperçu sur la modélisation thermique et thermomécanique de composites.

Le chapitre 3 constitue un rappel des définitions du transfert de chaleur en précisant celles de la conduction dans les solides par: la définition du champ de températures, du gradient de température, du flux de chaleur dans un solide ainsi que l'énoncé de la loi de Fourier et conditions aux limites.

Le chapitre 4 est consacré à l'élaboration du modèle numérique de notre étude, à commencer par la présentation des méthodes variationnelles en donnant un bref aperçu sur la méthode de Galerkin, une description de la méthode des éléments finis et ses fondements, puis on entame la discrétisation du domaine géométrique d'étude, ainsi que le développement des équations régissant le phénomène de transfert de chaleur pour les solides anisotropes, on aboutit ensuite à un système d'équations linéaires qui sera résolu par la méthode classique de décomposition LU (de Crout) avec substitution, enfin on représente l'organigramme et le listing du programme obtenu par à cette discrétisation,

Le chapitre 5 est dédié à la présentation et à l'analyse des résultats numériques obtenus par l'outil numérique développé, pour exprimer le profil de température au sein de chacun des types de solides étudiés. Différents résultats seront illustrés par des graphes tracés à l'aide des logiciels de graphisme Tecplot et Origin pour permettre leurs discussion et analyse détaillées.

Une conclusion générale clôt ce travail, résumant les résultats obtenus et examinant les perspectives se rattachant à l'étude réalisée.

## Bibliographie

N°	Auteurs	Titre	journal	Année
[1]	Hamid Belghazi.	Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement	Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Limoges	2008
[2]	Damien Ducret	Elasticité anisotrope et endommagement des matériaux composites : caractérisation ultrasonore et modélisation micromécanique.	L'institut national des sciences appliquées de Lyon. Ingénieur INSA de Lyon	2000
[3]	Samuel Forest, Michel Amestoy, Gilles Amamme, Serge Kruch, Vincent Maurel, Matthieu Mazière.	Mécanique des milieux continus	Ecole des mines de PARIS	2009– 2010
[4]	Guido Dhondt	The Finite Element Method for Three-dimensional Thermo mechanical Applications	Munich, Germany. John Wiley & Sons.	2004
[5]	S. Bouzid, A.C. Boumaza, M. Afrid.	Calcul du champ de température dans un solide anisotrope par la méthode des éléments finis - Cas bidimensionnel	<i>Revue des Energies Renouvelables CISM'08 Oum El Bouaghi 103 – 111</i>	2008



## CHAPITRE 1 : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1.1 Introduction

Les objets de la mécanique des milieux continus sont :

- la matière sous ses formes fluides (Liquides, gaz, plasmas...) et solides,
- les matériaux et les structures qui sont des assemblages d'éléments de matériaux ou de sous structures.

On étudie leurs mouvements sous l'action de forces, et les variations de mouvement d'un point matériel à un autre.

La variable température influence aussi le mouvement de ces objets et doit donc être prise en compte dans le cadre plus général de la thermomécanique des milieux continus.

On rencontre ces objets à différentes échelles allant du nanomètre (assemblages atomiques) au kilomètre, voire au-delà (écorce et manteau terrestres, planètes et étoiles). Chaque objet, même s'il a l'air tout à fait homogène, est en fait une structure multi échelles, c'est-à-dire qu'il présente des niveaux d'hétérogénéité à différentes échelles [1].

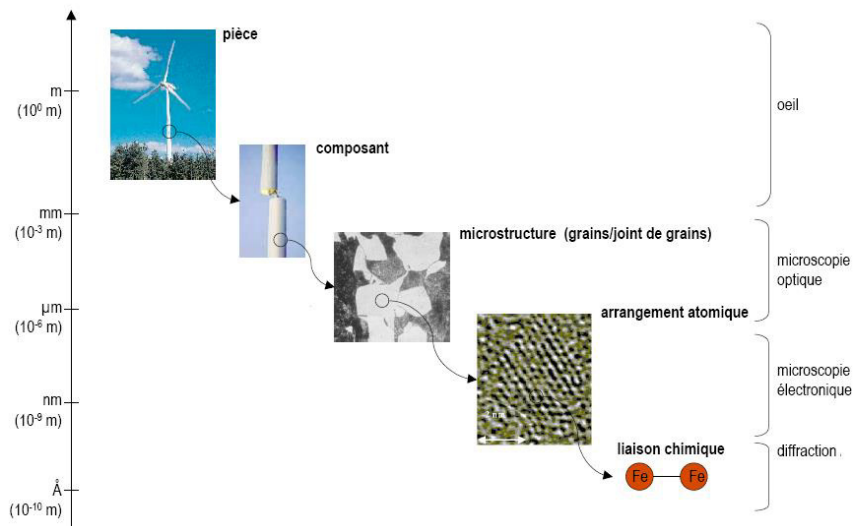


Figure 1. 1 Echelle de la matière, des matériaux et des structures [1].

### Les différentes échelles de la matière, des matériaux et des structures

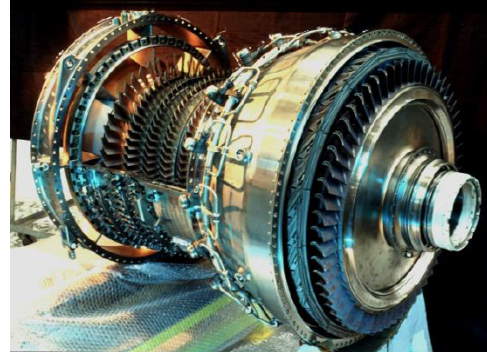
- Structures, microstructures, nanostructures

Les **structures** proprement dites : structures du génie civil qui font appel souvent au béton et à l'acier (figure 1.2 (a)), composants et pièces industriels qu'ils soient en alliages métalliques (aubes de turbines d'alternateurs ou de moteurs d'avion, figure 1.2 (b)), polymères (pièces moulées ou injectées de la vie courante), ou céramiques (fours, filtres...). Ces structures sont omniprésentes dans le transport, l'énergie, etc., et posent les problèmes de leur construction, fabrication, élaboration ou mise en forme, mais aussi de leur tenue en service (vibrations, charges limites, fatigue...). En particulier, on

s'intéresse à l'équilibre de ces structures pour connaître les charges qu'elles supportent. [2]



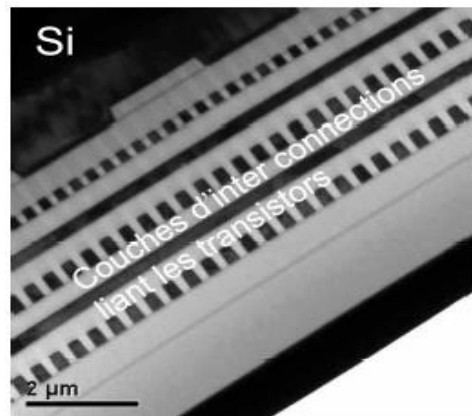
(a) Structures du génie civil



(b) Structures industrielles

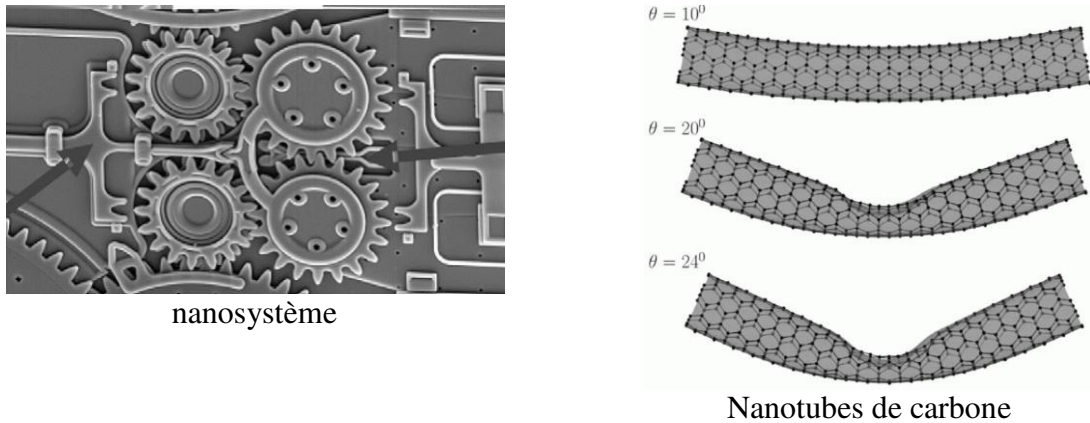
**Figures 1.2 (a) et (b) structures [2].**

Les **MEMS** (micro-electro-mechanical Systems) représentent depuis une dizaine d'années un domaine d'investigation affiché de la mécanique des milieux continus. Il s'agit d'assurer une élaboration de précision (contraintes résiduelles...) et de prévoir la tenue en service de composants de l'électronique par exemple, qui sont soumises à des sollicitations de fatigue thermomécanique sévères. Dans une large mesure, estimer la durée de vie d'un microprocesseur relève de la même science mécanique que le dimensionnement d'un joint de culasse automobile ! On rencontre en particulier des circuits d'interconnexion en cuivre (figure 1.3).



**Figure 1.3. MEMS [2]**

Les **nanosstructures** apparaissent comme l'aboutissement de la miniaturisation de nombreux systèmes mécaniques (figure 1.4 (a)). Certaines molécules géantes, comme les nanotubes de carbone (figure 1.4 (b)) dont le panel d'applications possibles ne cessent de s'élargir, peuvent être traitées pour prévoir leurs modes de déformation.



**Figure 1.4** Nanostructures [2].

Les questions de fiabilité des structures sont aujourd’hui au cœur des démarches de normalisation avec pour objectif des composants plus sûr dans les transports, l’énergie...

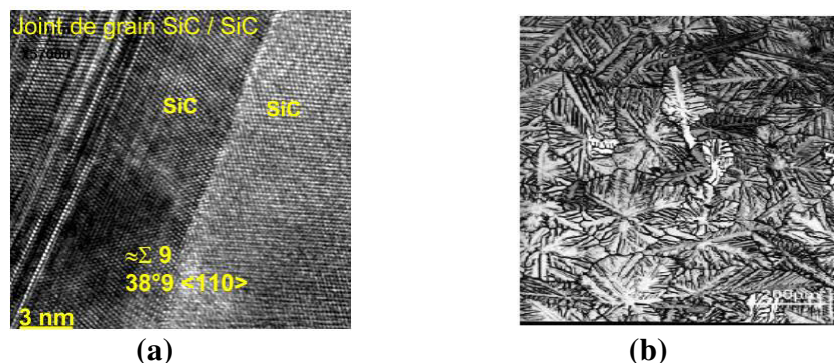
- Microstructures cristallines, granulaires, cellulaires

Le caractère discret de la matière se manifeste sous la forme d’hétérogénéités présentes à toutes les échelles :

**Structure cristalline :**

Les atomes constituent l’échelle d’hétérogénéité indiscutable commune à tous les matériaux. Ils sont arrangés de manière ordonnée dans de nombreux matériaux métalliques et céramiques, ou désordonnée dans les verres, la plupart des polymères, les liquides et les gaz.

La structure cristalline joue un rôle fondamental sur la déformation de ces solides. La figure 1.5(a) montre des rangées d’atomes observées au microscope électronique à transmission, qui définissent des orientations privilégiées du cristal. Lorsque cet ordre s’étend à l’ensemble du solide, il s’agit d’un monocristal. On retrouve alors au travers des propriétés physiques macroscopiques (optiques, thermiques, électriques, mécaniques...) des symétries issues de la structure de la matière.



**Figure 1.5** joint de grains dans un carbure de silicium [2].

### Structure granulaire.

En général les matériaux cristallins sont plutôt des assemblages de cristaux appelés grains, chaque grain possédant une orientation cristalline privilégiée. Il s'agit de poly cristaux. Les grains sont séparés par des joints qui, en l'absence d'endommagement, garantissent la continuité du mouvement de la matière et la transmission d'efforts.

La taille des grains varie en général entre  $1\mu\text{m}$  et quelques mm voire centimètres. On en voit d'ailleurs souvent les reflets sur certaines pièces métalliques revêtues d'un dépôt de zinc par galvanisation (figure 1.5(b)). On cherche aujourd'hui à produire et utiliser des alliages à grains ultrafins, voir nanométriques, en raison de leur extrême dureté et résistance à l'usure.

### • Structure cellulaire.

Les grains ne représentent pas la seule façon de paver l'espace tridimensionnel. On y parvient aussi à l'aide de l'assemblage de cellules (polyèdres) comme dans les mousses liquides ou solides. Les matériaux obtenus sont très légers mais considérablement plus souples. Cela permet de concevoir des structures légères comme les structures en nid d'abeilles (en aluminium sur la figure 1.6), très utilisées dans l'aéronautique, dont la microstructure est strictement périodique et offre une forte rigidité selon l'axe des cellules.

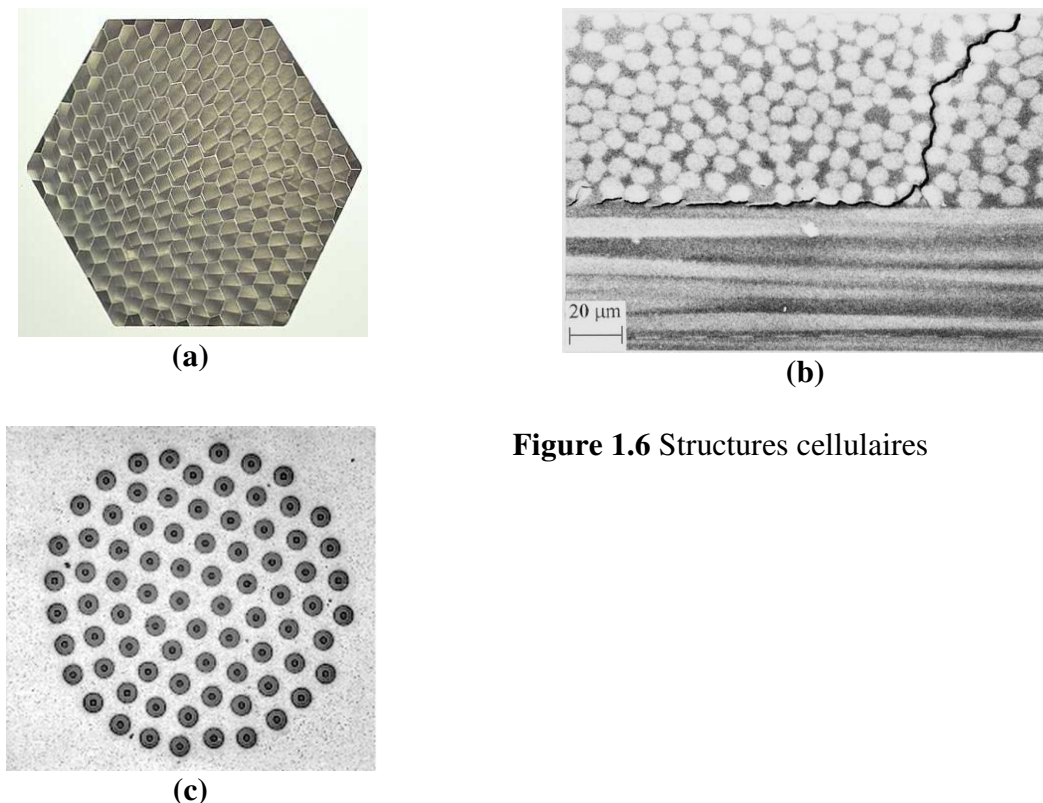


Figure 1.6 Structures cellulaires

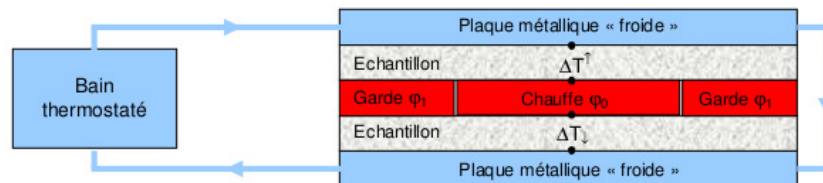
Les niveaux d'hétérogénéités imbriqués atomique et granulaire jouent chacun à sa façon un rôle décisif sur le comportement mécanique résultant. Par exemple, les cristaux individuels ont des propriétés anisotropes, c'est-à-dire dépendantes de la direction selon laquelle on les sollicite. Le poly cristal, quant à lui, s'il contient de très nombreux grains avec des orientations très variées, pourra avoir des propriétés isotropes, i.e. indépendantes de la direction de sollicitation.

Les symétries des propriétés physiques et mécaniques sont étroitement liées aux symétries géométriques que peut présenter la microstructure du matériau.

## 1.2 Revue bibliographique

Dans cette partie, on va résumer quelques travaux concernant le comportement de certains types de matériaux composites présentant une anisotropie caractérisée par leurs propriétés thermo physiques. Des travaux où le profile de température, pendant le phénomène de la conduction de chaleur, est déterminé pour prédire les déformations thermiques et/ou thermomécaniques.

[Niezgoda 2012] et all, avaient décrit et validé deux modélisations permettant de répondre aux deux objectifs fixés : déterminer la diffusivité thermique (celle de la loi de Fourier) de matériaux poreux pour permettre de faire un tri parmi les matériaux en fonction du besoin, puis parmi les matériaux retenus, reproduire le comportement thermique d'un matériau poreux à partir de sa microstructure numérique . Ils se sont limités à l'expérience stationnaire de la plaque chaude gardée.



**Figure 1.7** L'expérience de plaque chaude gardée symétrique [3].

La plaque inférieure est maintenue à une température constante dite froide  $T_f$  et la plaque supérieure à température dite chaude  $T_c$ . Le matériau à étudier est placé entre ces deux plaques et isolé sur ces parois latérales. Le transfert de chaleur est alors unidirectionnel et on mesure le flux établi entre les deux plaques. La conductivité thermique équivalente  $\lambda_{eq}$  du matériau d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$  est alors simplement déduite par la formule suivante :

$$\lambda_{eq} = \frac{e \varphi}{S \Delta T}$$

Les matériaux qui sont utilisés peuvent être soumis à différentes sollicitations thermiques dans leur environnement d'utilisation. Le code devra donc être capable de restituer ou de prédire le comportement de ces matériaux sous ces différents types de sollicitation. Le

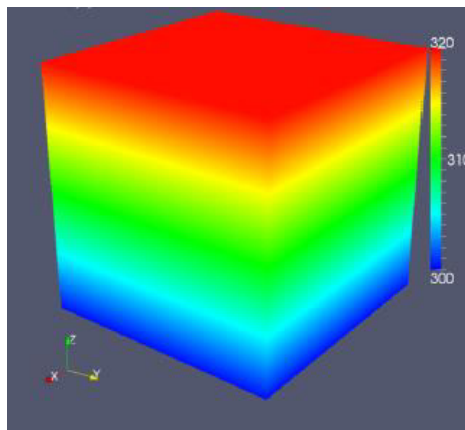
second but de ce travail ici présenté est de développer le modèle qui permettrait de reproduire le comportement thermique d'un matériau poreux hétérogène à partir de sa microstructure numérique. Ils se sont limités dans cette étude au régime stationnaire.

La plaque chaude est située au centre et délivre un flux constant et uniforme qui traverse les échantillons dont on veut mesurer la conductivité thermique jusqu'aux plaques froides. Les plaques froides sont constituées d'un matériau très conducteur (du cuivre ou de l'aluminium). Les écarts de température dans les deux échantillons symétriques sont mesurés par des thermocouples placés sur les deux faces des échantillons.

La validation concerne dans un premier temps un milieu homogène puis, dans un second temps, un milieu Hétérogène.

Les tailles caractéristiques étudiées sont comprises entre 1  $\mu\text{m}$  et 1 m. L'association des constituants qui les composent donne à ces matériaux des propriétés exceptionnelles du point de vue chimique, mécanique et thermique (c'est ce dernier aspect qui nous intéresse plus particulièrement). C'est pourquoi ils servent dans des applications de plus en plus nombreuses : l'isolation dans l'habitat ou l'aéronautique (jusqu'à des très hautes températures), les réacteurs ou combustibles du domaine du nucléaire, dans le domaine de l'énergie en particulier les piles à combustibles, les tuyères dans l'aéronautique ou les corps de rentrée dans l'aérospatial ou encore les freins dans l'automobile. Ils servent aussi à la fabrication d'échangeurs de chaleur, de panneaux ultra lumineux, d'absorbeurs d'énergie ou de sons, d'électrodes de batterie électrique, de déflecteurs ultrasons, de milieux dissipant la chaleur et de bien d'autres applications multifonctions [3].

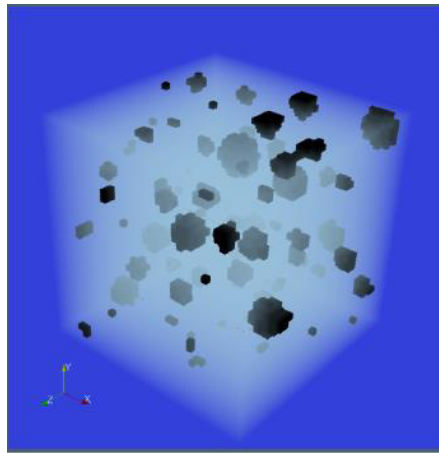
Cas d'un milieu homogène



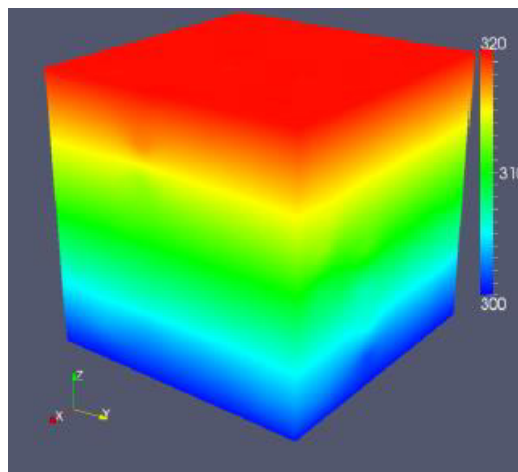
**Figure.1.8** Champs de température d'un milieu homogène en conduction pure [3].

Cas d'un matériau hétérogène

Reprenons le cas précédent cette fois-ci appliqué à un matériau hétérogène. La figure 1.9 montre la microstructure que nous avons choisie pour cette première validation. Cette microstructure du matériau hétérogène possède deux constituants : l'air (les porosités sombres) et la matrice solide (en clair).



**Figure 1.9** Microstructure hétérogène choisie pour la validation du code 3D en conduction pure [3].



**Figure 1.10** Champs de température d'un milieu hétérogène en conduction pure [3].

Les laines minérales étant des matériaux anisotropes par leur procédé de fabrication. Une démarche expérimentale permettant de solliciter et identifier cette anisotropie a été mise en place, elle nécessite l'utilisation de mesures de champs et des techniques d'identification associées. [4]

Pour identifier les propriétés régissant le transfert thermique dans les laines minérales, une méthode de recalage par éléments finis tridimensionnelle prenant en compte l'influence de l'anisotropie a été développée, et mise en œuvre dans le cadre d'un essai plan-chaud en utilisant des mesures de champs de température par thermographie IR sur les faces libres de l'échantillon. Le matériau est considéré comme isotrope transverse (trigonal).

L'essai plan chaud consiste à positionner une résistance chauffante surfacique circulaire entre deux cylindres du matériau à identifier. Le principe est de mesurer les températures des thermocouples placés aux centres des échantillons. Pour ce faire le plan chaud est conçu en imposant la source de chaleur via une plaque chauffante carrée régulée en température sur laquelle un échantillon de laine est posé. Toutes les autres faces étant à l'air

libre. Les températures sont mesurées sur les faces libres par thermographie infrarouge lorsque l'état stationnaire est atteint.

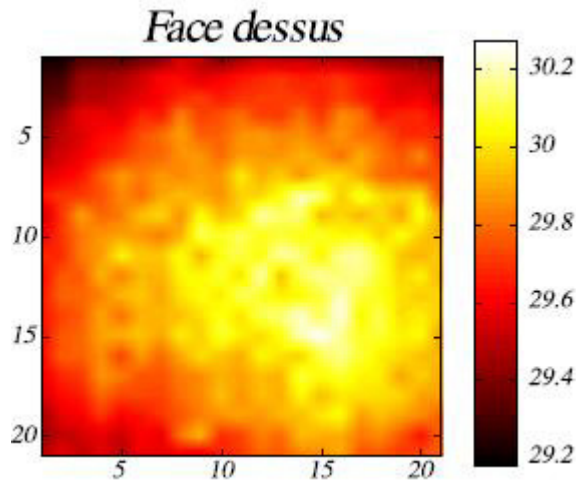


Figure 1.11 Champs de températures mesurées sur la face de dessus [4].

Hamid Belghazi [5] a établi une modélisation analytique du transfert de chaleur par conduction dans un matériau bicouche (orthorhombique) en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement. L'élaboration des solutions analytiques est basée principalement sur la méthode de séparation des variables. Les résultats de cette étude sont appliqués aux transferts de chaleur dans les matériaux bicouches.

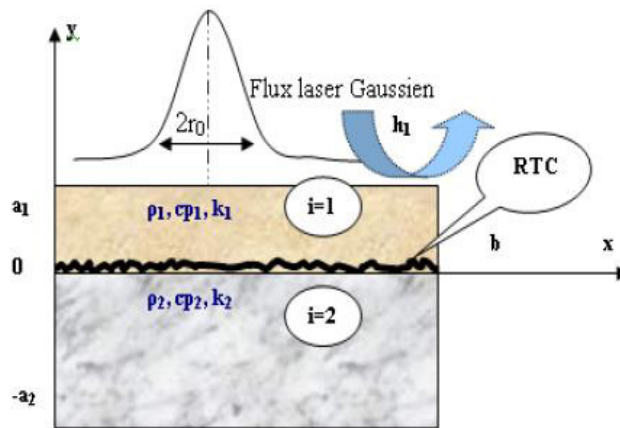
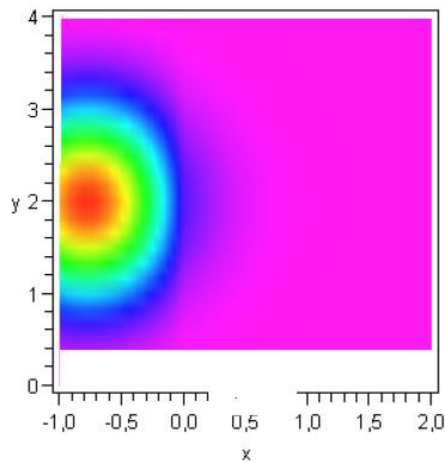
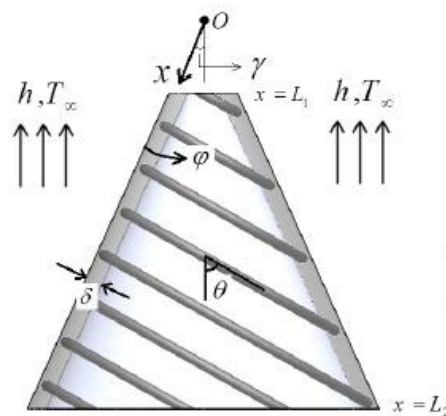


Figure 1.12 Représentation schématique du problème [5].

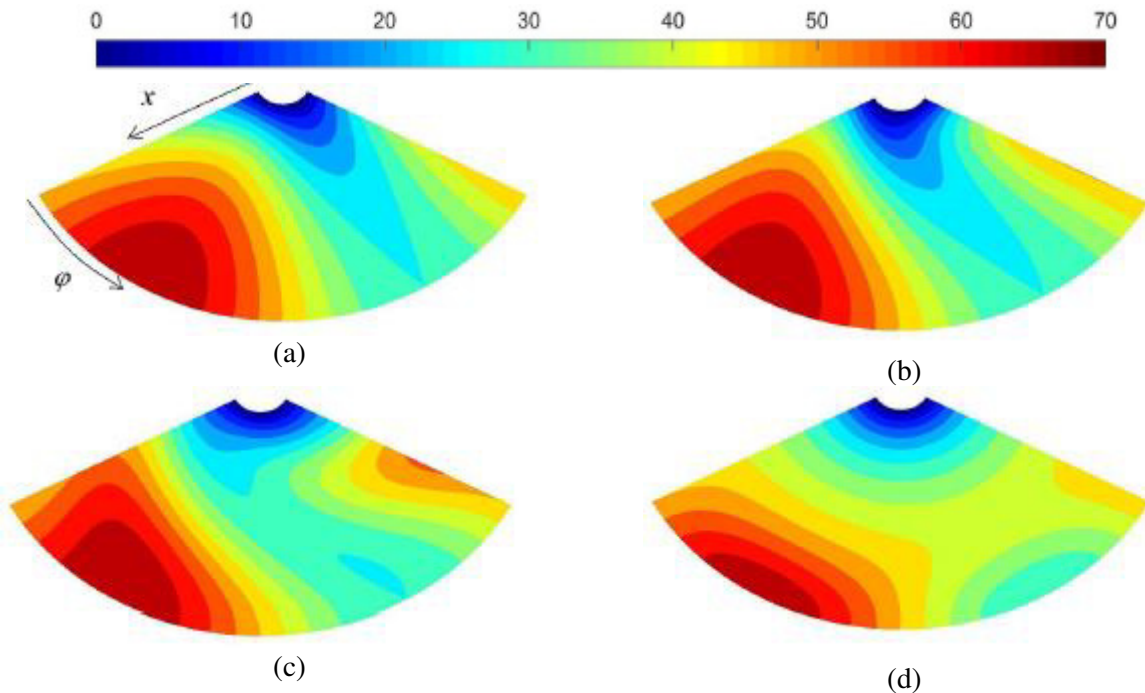


**Figure 1.13** Représentation imagée de la distribution de température dimensionnelle dans le bicouche soumis à un flux de chaleur [5].

Le travail suivant présente pour la première fois une solution analytique exacte pour la conduction de chaleur anisotrope transitoire dans une calandre conique composite tronquée. Les fibres de la calandre conique composite sont enroulées autour du corps dans n'importe quelle direction arbitraire [6].



**Figure 1.14** Géométrie et conditions limites du cône tronqué composite; direction des fibres et système de coordonnées.



**Figure 1. 15** Contour de la température (K) : (a) fibres à 0 degrés; (b) fibres à 30 degrés; (c) fibres à 60 degrés; (d) fibres à 90 degrés

La convection thermique entre le flux de fluide ambiant et la calandre conique composite est modélisée et la solution exacte de l'équation de conduction thermique est obtenue en combinant deux méthodes analytiques populaires. La présente solution est applicable dans certains cas industriels tels que les ailettes de refroidissement et les instruments aéronautiques.

Un autre cas concerne le problème de plancher chauffant en béton. Une dalle de béton de 0.2m d'épaisseur est située entre deux pièces dans lesquelles règne des températures différentes. Elle est traversée de tuyaux de 0.04m de diamètres distants de 0.4m dans lesquels circule de l'eau chaude. La simulation éléments finis est réalisée avec des éléments triangulaires à trois nœuds linéaires en température [7].

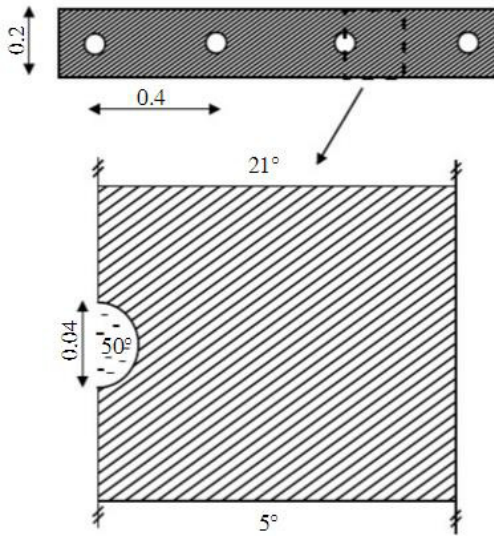


Fig.1. 16 Plancher chauffant

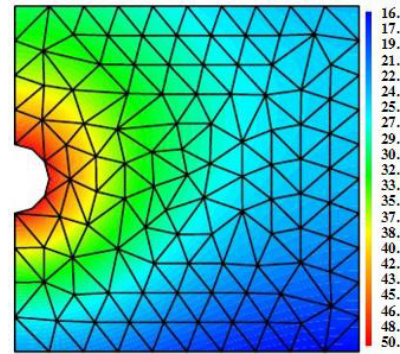


Figure 1. 17 Champ de température EF [7]

Cet article présente une méthode d'identification thermique et mécanique des matériaux hétérogènes comme les laines minérales crêpées qui présentent une texture localement très anisotrope. S'appuyant sur cette texture, un modèle linéaire orthotrope transverse ( ), tant en thermique qu'en mécanique, est proposé par mesure de champs (thermique en thermographie Infra-Rouge et cinématique par corrélation d'images numériques). [8]

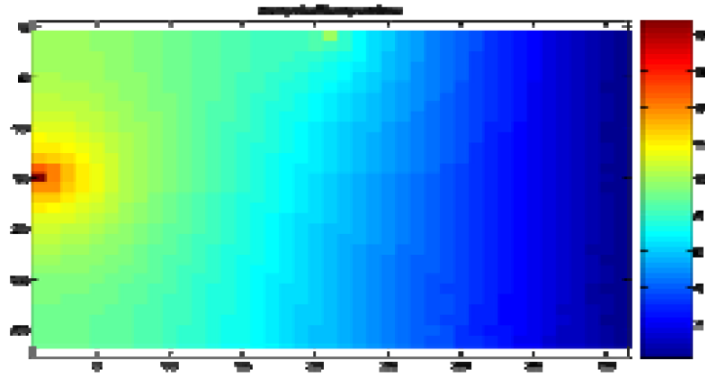


Figure 1. 18 Température identifiée [8].

Une modélisation bi-dimensionnelle est choisie, un matériau idéal de référence orthotrope transverse a été introduit, caractérisé par deux conductivités propres  $k_n$  et  $k_t$  à partir duquel un matériau crêpé avec sa microstructure vraie a été présenté. La méthodologie a été validée sur un cas artificiel avec comme conditions aux limites, une température nulle sur le bord droit,  $19^\circ\text{C}$  au milieu du bord gauche et un flux nul ailleurs. Ce cas est représentatif de l'essai fil-chaud. Le rapport des conductivités initiales  $k_n/k_t$  était de 2.5.

Une autre illustration de la distribution de la température dans un solide anisotrope, il s'agit d'un cube d'acier de côté 1 mm soumis à un gradient constant de température de 100°C :  $T = 0^\circ\text{C}$  sur la face  $x_1 = 0$  et  $T = 100^\circ\text{C}$  sur la face  $x_1 = 1$ . Le coefficient de dilatation est  $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Les déplacements sont amplifiés d'un facteur 2000 pour l'illustration. Les faces du cube sont libres d'effort [2].

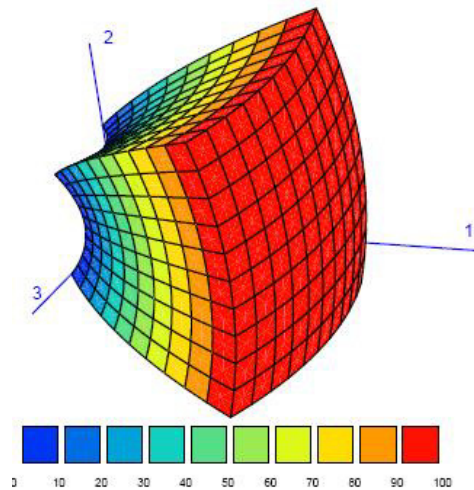
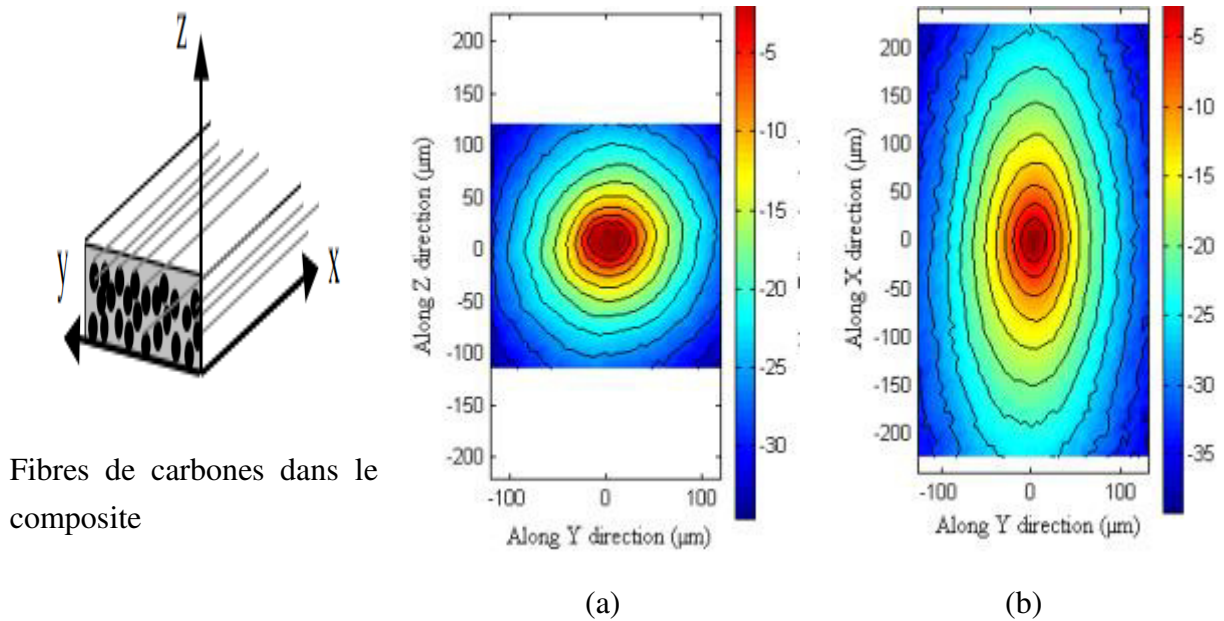


Figure 1. 19 Le champ de température [2].

Une Caractérisation et modélisation thermique de matériaux hétérogènes est abordée par Denis ROCHAIS [9], Composite carbone-résine UD AIRBUS



Fibres de carbonnes dans le composite

Figure 1. 20 Caractère de la diffusion thermique (a) isotrope (b) anisotrope [9]

### 1.3 Bibliographie

N°	Auteurs	Titre	journal	Année
[1]	J. Colombani, L. Joly.	Science des matériaux.	Université Claude Bernard Lyon1	
[2]	D. Ducret	Elasticité anisotrope et endommagement des matériaux composites : caractérisation ultrasonore et modélisation micromécanique.	L'institut national des sciences appliquées de Lyon. Ingénieur INSA de Lyon	2000
[3]	S. Forest, M.Amestoy, G. Amamme, S. Kruch, V. Maurel, M.Mazière.	Mécanique des milieux continus	Ecole des mines de Paris	2009–2010
[4]	J.F.Witza , S. Rouxa , F. Hilda , J.B. Rieunie	Identification de la conductivité anisotrope de laines minérales	19 ème Congrès Français de Mécanique Marseille	2009
[5]	H. Belghazi	Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement.	Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Limoges	2008
[6]	M. Norouzi, H. Rahmani	An exact analysis for transient anisotropic heat conduction in truncated composite conical shells,	Applied Thermal Engineering	2017
[7]	L. Champaney	Méthode des Eléments Finis en Thermique et en Thermo-mécanique		
[8]	J.F. Witz, S. Roux & F. Hild LMT	Prévision du comportement thermomécanique de laines minérales avec des mesures de champs	18ème Congrès Français de Mécanique Grenoble	2007
[9]	D. Rochais	Caractérisation et modélisation thermique multi-échelle de matériaux hétérogènes	CEA / Le Ripault Journée SFT Benchmark	2005
[10]	S. Bouzid, A.C. Boumaza, M. AFRID	Etude et calcul du champ de température dans un solide anisotrope par la méthode des éléments finis- Cas bidimensionnel	Revue des Energies Renouvelables CISM'08 CDER	2008



## CHAPITRE 2 : MATERIAUX COMPOSITES

### 2.1 Définitions

Un matériau composite peut être défini comme l'assemblage de plusieurs matériaux de nature différente à l'échelle microstructurale. Les composites sont le plus souvent constitués d'une matrice dans laquelle on a dispersé de façon contrôlée des renforts. [1]

La nature du matériau constituant la matrice permet de répertorier trois grandes classes de composites, considérées ici par ordre croissant de tenue en température : les composites à matrice polymère (C.M.P.), les composites à matrice métallique (C.M.M.) et les composites à matrice céramique (C.M.C.).

Selon l'application envisagée, l'assemblage de ces fibres longues peut être unidimensionnel (plis unidirectionnels), bidimensionnel (plis tissés, mats à fibres coupées de quelques centimètres ou à fibres continues) ou tridimensionnel (tissus multidimensionnels). [2]

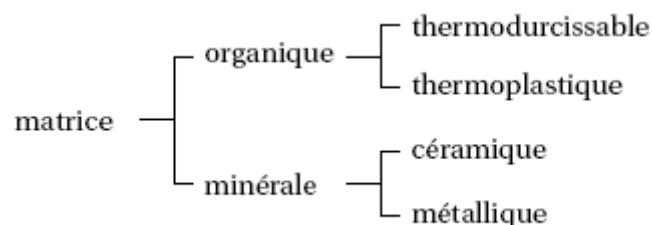
Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. [3]

Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques.

L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés de la structure. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée.

Nous présentons les différents types de matrices et renforts classiquement employés dans l'industrie.

#### 2.1.1 Matrices



- Résines thermdurcissables

Les résines thermdurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois.

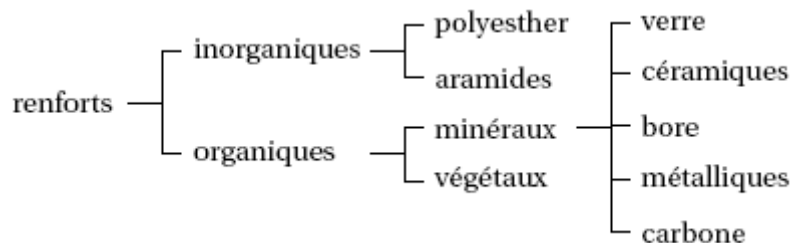
- Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température.

### 2.1.2 Renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus).

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée par le schéma suivant :



Le choix d'une association entre un renfort et une matrice est très délicat et ce travail reste du ressort des chimistes. En effet, l'interface résultant de l'association intime de deux constituants différents doit avoir de bonnes performances mécaniques.

Les exemples d'association entre renfort et résine couramment rencontrés dans l'industrie aéronautique et spatiale sont les suivants :

- composites à fibre de carbone et matrice époxy thermodurcissable : carbone/époxy : T300/5208, T300/914, IM6/914, GY/70M55J/M18, AS4/ 3501-6
- composites à fibre de carbone et matrice époxy thermoplastique : carbone/polyamide IM7/K3B, cellion C6000/PMR-15, AS4/PEEK (APC-2)
- composite à fibre et matrice carbone : 3D C/C, 3D EVO, 4D C/C
- composite à fibre et matrice céramique : SiC/SiC, Sic/Mas-L

## 2.2 Différentes structures des composites : représentées sur les figures 2.1 et 2.2

### 2.2.1 Structures composites stratifiées

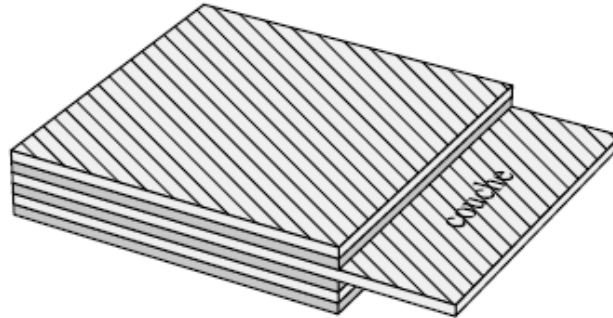


Figure 2.1 Stratifié constitué de couches parfaitement liées [3]

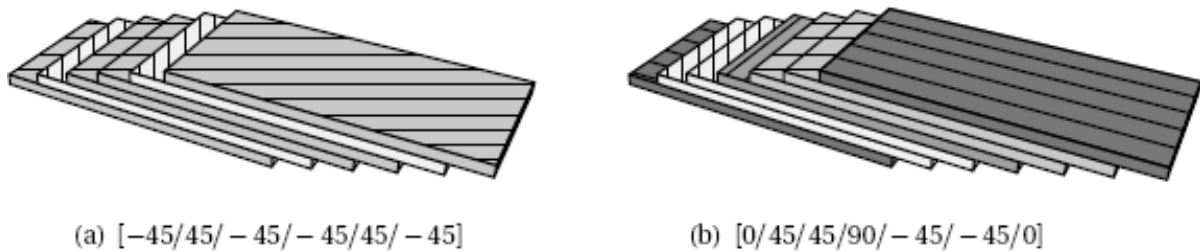


Figure 2.2 Désignations du stratifié [3]

### 2.2.2 Structures sandwichs

Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles (figure 2.3), âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées.

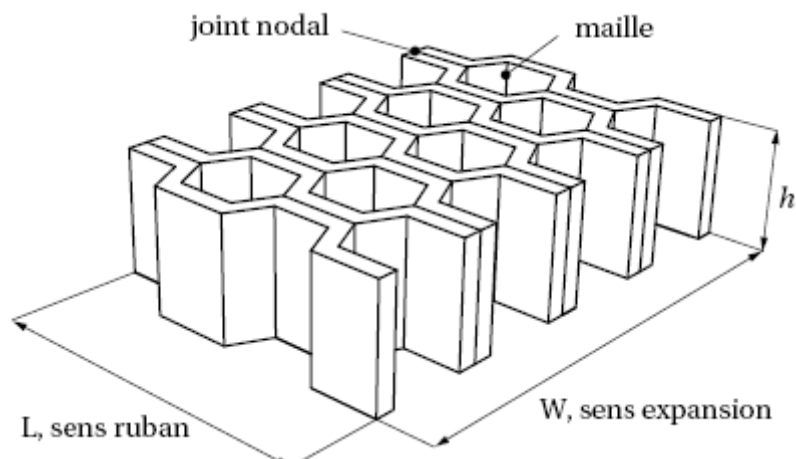


Figure 2.3 Désignations d'une âme nid d'abeilles

### 2.2.3 Structures composites tissées multidirectionnelles

Il est possible de créer des pièces en matériaux composites de type tridimensionnelles massives ou des formes de révolution. Des tissages volumiques de type 2D (deux directions de renfort) (figure 2.4), 3D-Evolutif (deux directions de renfort et un piquage dans la troisième direction), 3D (trois directions de renfort) (figure 2.5), 4D (quatre directions de renfort), ou plus sont élaborés dans l'industrie aérospatiale (figure 2.6). Il est également possible de tisser des cylindres ou des cônes afin de réaliser des réservoirs ou des tuyères.

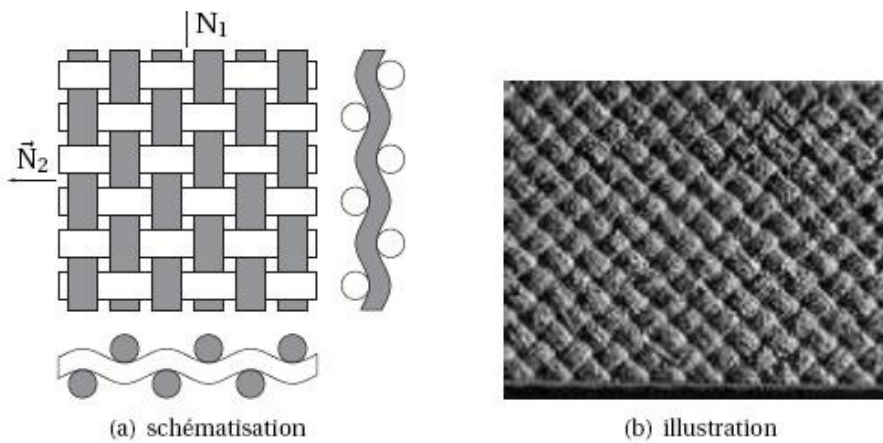


Figure 2.4 2D Sic-Sic matériau avec deux directions de renfort

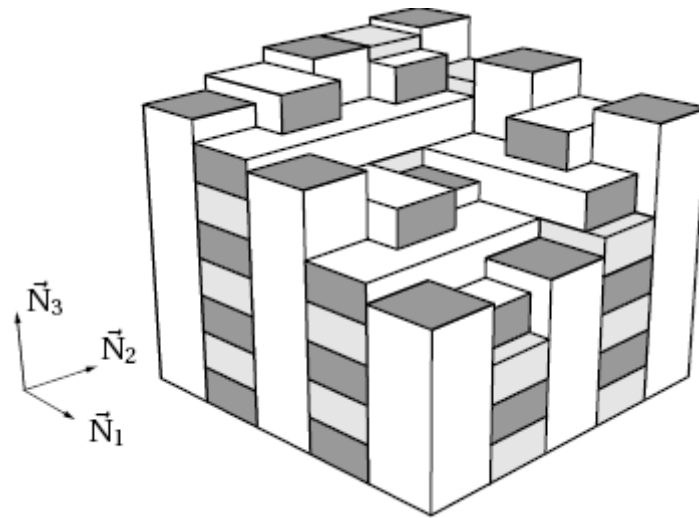


Figure 2.5 Géométrie tri-orthogonale de l'Aerolor 32 C/C

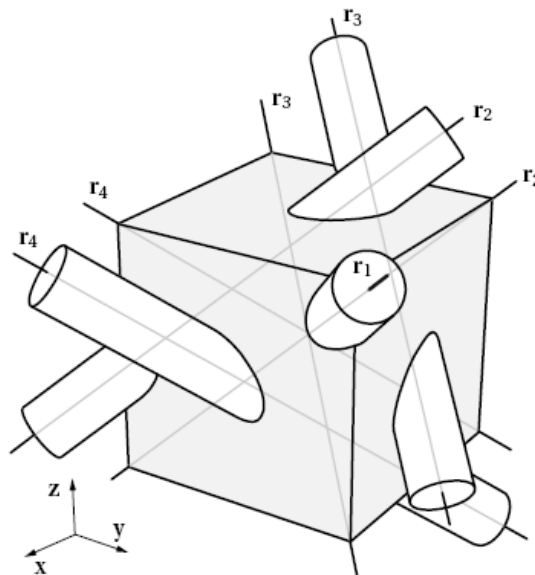
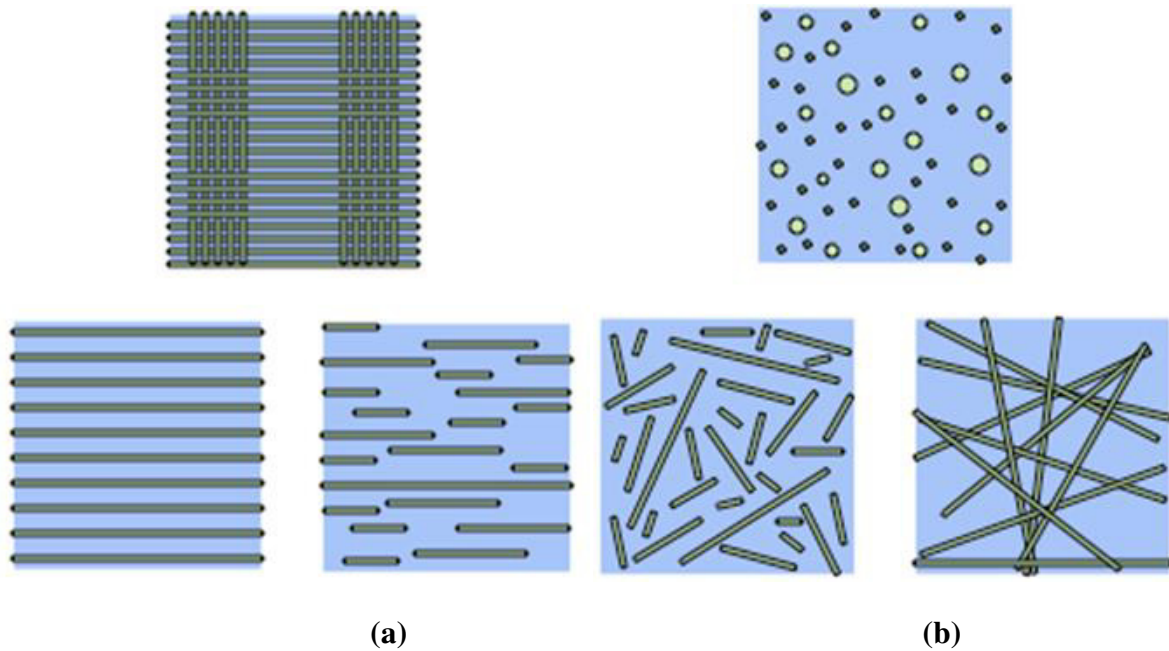


Figure 2.6 Sepcarb(r) 4D C/C renfort carbone/matrice carbone : tissage suivant quatre directions de l'espace [3]

### 2.3 Relation composite/anisotropie

De nombreux composites ont un comportement mécanique anisotrope.

- Lorsque l'orientation est aléatoire (figure 2.7.a), le comportement est à peu près isotrope ;
- Lorsque l'orientation suit une ou plusieurs directions préférentielles (figure 2.7.b), le comportement est anisotrope.



**Figure 2.7** Quelques exemples de microstructures de composites :  
**(a)** ayant un comportement isotrope ou quasi-isotrope, **(b)** ayant un comportement fortement anisotrope. [4]

### 2.3.1 Classes de symétrie des solides anisotropes

Les huit classes de symétrie des tenseurs d'élasticité [1]

Système	Côtés de la maille	Angles	$C_{ij}$
Triclinique	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	21
Monoclinique	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$	13
Orthorhombique	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	9
Rhomboédrique	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	7 - 6
Tétraгонаle	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	7 - 6
Hexagonale	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	5
Cubique	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	3
Isotrope			2

**TAB 2.1** Systèmes cristallins

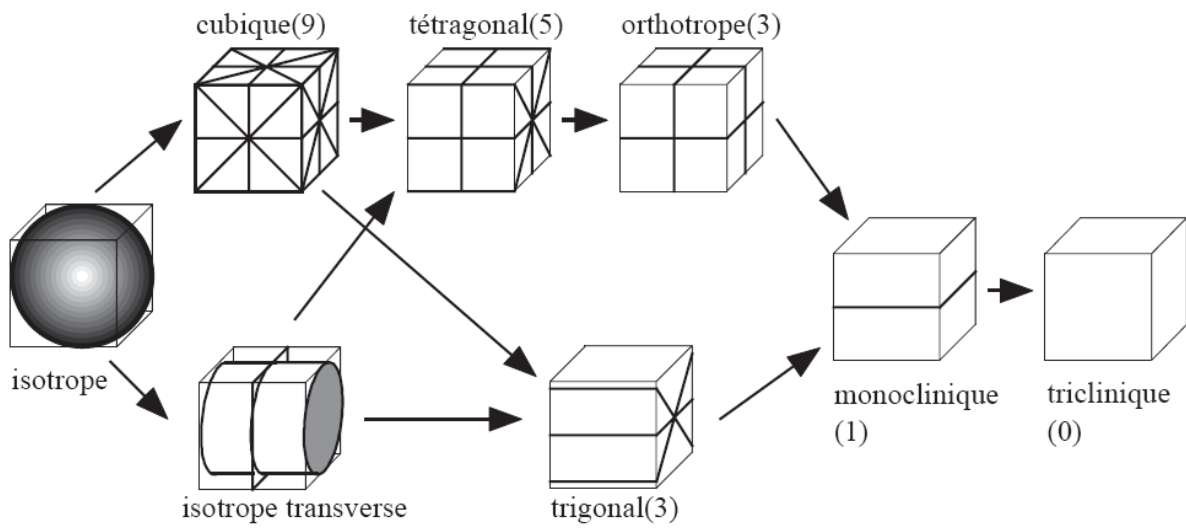


Figure 2.8 Arbre des symétries des tenseurs d'élasticité [5]

Les figures représentent les traces des plans de symétrie et leur nombre.

## 2.4 Bibliographie

N°	Auteurs	Titre	journal	Année
[1]	Damien Ducret.	Elasticité anisotrope et endommagement des matériaux composites : caractérisation ultrasonore et modélisation micromécanique.	L'institut national des sciences appliquées de Lyon. Ingénieur INSA de Lyon	2000
[2]	GAY, D	Matériaux composites. 3 <sup>e</sup> édition. Paris	Hermès	1991
[3]	Laurent Gornet	Généralités sur les matériaux composites	Ecole d'ingénieur cel-00470296v1	2008
[4]	Federica DAGHIA – Lionel GENDRE	Modélisation du comportement des composites : l'élasticité anisotrope,	Université Paris Saclay	2011
[5]	<i>Marc François.</i>	Élasticité anisotrope		2004



## CHAPITRE III : NOTIONS SUR LE TRANSFERT THERMIQUE

### Introduction

La première loi de la thermodynamique, connue par le principe de conservation de l'énergie, stipule que l'énergie ne peut être ni créée ni perdue au cours d'un processus; elle ne peut que changer de forme [5]. La variation nette (augmentation ou diminution) de l'énergie totale du système au cours d'un processus est égale à la différence entre l'énergie totale qui entre et l'énergie totale qui quitte le système pendant ce processus.

$$\left( \begin{array}{c} \text{Energie totale} \\ \text{entrant dans} \\ \text{le système} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Energie totale} \\ \text{quittant le} \\ \text{système} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Variation de} \\ \text{l'énergie totale} \\ \text{du système} \end{array} \right)$$

Le bilan énergétique de tout système subissant un processus peut s'exprimer par :

$$E_e - E_s = \Delta_{\text{sys}} \quad (3.1)$$

L'énergie fournie par les particules constituantes telles que les atomes, molécules ou électrons libres des régions les plus chaudes d'un corps à celles des régions plus froides est appelée chaleur. [1]

### 3.1 Définition

Le transfert de chaleur entre deux Corps est défini comme étant le transfert d'énergie qui résulte d'une différence de température entre les deux corps.

### 3.2 Différents modes de transfert de la chaleur

On distingue habituellement trois différent modes de transmission : par conduction, par convection et par rayonnement, les trois modes sont régis à la fois, bien que la conduction et le rayonnement sont des modes fondamentaux de transmission de la chaleur : la convection tout en étant très importante ne fait que combiner la conduction avec un transfert de matière [2]. Ces trois modes sont régis par des lois bien spécifiques. Dans la pratique, il est rare qu'une

situation particulière ne concerne qu'un seul mode ; le plus souvent, deux sinon trois modes entrent en jeu. [3]

### 3.2.1 Transfert de chaleur par conduction

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne) provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux. La conduction est le seul mécanisme intervenant dans le transfert de chaleur dans un solide homogène, opaque et compact. Cette conduction peut être mise en évidence par la loi de Fourier. [1,4]

Le-flux-de-chaleur ne peut pas être mesuré directement, mais le concept a une signification physique car il est lié à la quantité scalaire mesurable appelée température. Par conséquent, une fois que la distribution de température  $T(x, t)$  dans un corps est déterminée en fonction de la position et du temps, alors le flux thermique dans le corps est facilement calculé à partir des lois reliant le flux thermique au gradient de température  $T$  [1]

#### 3.2.1.1 La loi de Fourier (1822)

Fourier apparente la conduction de la chaleur à l'écoulement d'un fluide qui a lieu des régions chaudes vers les régions froides, dont les seules manifestations dans la matière se traduisent par des variations de température. Selon la loi de Fourier, la densité de flux de chaleur est proportionnelle :

- Au gradient de température suivant la normale aux surfaces isothermes.
- A un coefficient  $\lambda$ , appelé conductivité thermique, caractéristique du matériau.

$$\varphi = -\lambda \overrightarrow{\text{grad } T} \quad (3.2)$$

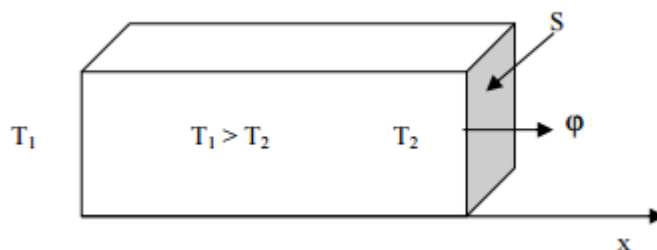


Figure 3.1 Transfert de chaleur par conduction dans un solide [6].

Avec :

$\lambda$  : la conductivité thermique [w/m°C] ou [w/m°k]

$\phi$ : densité de flux thermique [w/m<sup>2</sup>]

T : température [°c] ou [°k]

### 3.2.1.2 Le champs de température

Le champ de température est défini mathématiquement par l'équation :

$$T = f(x, y, z, t) \quad (3.3)$$

On distinguera des champs instationnaires (ou variables) d'une part, et des champs stationnaires (ou permanents) d'autre part selon que la température dépende ou non du temps t.

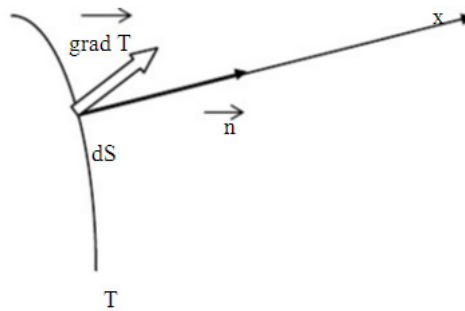


Fig 3.2 Vecteur unitaire à la surface isotherme [6].

Cette distribution est en principe arbitraire et peut même être discontinue. Un cas particulier important est celui où  $f(x, y, z)$  est une constante (température uniforme à l'instant zéro).

#### c/ Le flux de chaleur

On appelle flux de chaleur à travers la surface S d'un solide la quantité de chaleur qui entre par unité de temps dans un volume par la surface S, il me semble qu'il manque dS dans ta formule (dSdt ???). a verifier !!!

$$\phi = \frac{dQ}{dt} \quad (3.4)$$

Q : quantité de chaleur transmise à travers la surface [J]

### 3.2.1.4 Conditions aux limites en conduction thermique

La solution d'un problème de conduction (en régime permanent ou transitoire) s'exprime par une certaine fonction  $T(x, y, z, t)$  (représentant la température en fonction de l'espace et du temps) qui devra satisfaire l'équation différentielle propre au problème. Cette équation différentielle ne fait qu'exprimer comment les variations de température se font dans l'espace et dans le temps.

Mais pour que le phénomène soit décrit complètement (et d'une façon unique), il faut que la solution trouvée satisfasse aussi aux conditions aux limites (spatiales et temporelles).

On distingue deux types de conditions aux limites :

- **Les conditions initiales (temporelles)**

Elles expriment, dans les problèmes en régime non permanent, la distribution spatiale des températures à un instant donné, le plus souvent pris comme origine des temps :

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \text{ à } t = 0, [\text{°K}] \quad (3.5)$$

- **Les conditions aux limites (spatiales)**

Elles expriment comment, à partir de l'instant zéro, varie sur les frontières du corps étudié, la température ou son gradient.

➤ **Condition de Dirichlet**

La distribution de la température  $T_s$  à la surface frontière considérée est donnée en fonction du temps et pour tous les points de la surface :

$$T_s = f(x, y, z, t) \quad (3.6)$$

Souvent, on aura affaire à l'un des cas particuliers où la température sur la surface ne dépend que de la position du point :

$$T_s = f(x, y, z) \quad (3.7)$$

Les conditions de type Dirichlet sont les plus faciles à traiter mathématiquement mais elles sont souvent plus difficiles à réaliser ce qui veut dire imposer une température sur la frontière du dispositif à étudier  $T=T_s$ .

➤ **Condition de De Neumann :**

- \* La valeur de la densité de flux est imposée sur tous les points de la surface et en fonction du temps :

$$q = \rho \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s = f(x,y,z) \quad (3.8)$$

Ce qui revient à imposer une valeur au gradient de la température par rapport à la normale à la surface. Par contre, on ne connaît généralement pas la température elle-même.

- \* Sur une surface adiabatique, pour un corps thermiquement isolé on a :

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s = 0 \text{ [W/m}^2\text{]} \quad (3.9)$$

\* Le flux thermique imposé est en fonction du milieu extérieur vers lequel se fait le transfert. On distingue deux types déjà évoqués précédemment, le transfert se fait vers le milieu ambiant de température  $T_a$ , la condition à imposer dans ce cas est due au transfert par convection (condition de Fourier ou de Robin), elle s'exprimera par l'équation suivante :

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s = h (T_s - T_a) \quad (3.10)$$

$T_s$  est la température inconnue de la surface de la frontière et  $\partial T / \partial n$  est la dérivée suivant la normale extérieure à la surface. Mathématiquement, ce la revient à imposer sur la frontière une relation linéaire entre la fonction  $T$  et son gradient  $\partial T / \partial n$ .

- \* Transfert par rayonnement, La condition s'exprimera par:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s = \beta \zeta (T_s^4 - T_a^4) \quad (3.11)$$

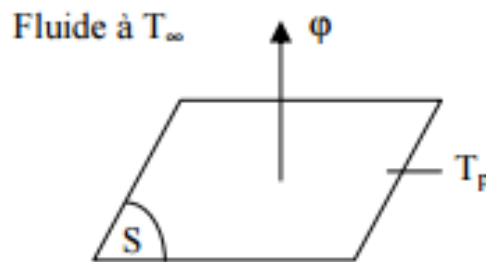
On peut noter que les conditions aux limites sur chacune des frontières peuvent très bien être de types différents.

### 3.2.2 Transfert de chaleur par convection

Ce mode de transmission qui implique le déplacement d'un fluide liquide ou gazeux se trouve dans l'échange qui a lieu entre une paroi et un fluide.

En réalité, il s'agit d'une combinaison du phénomène de conduction avec celui d'un transfert de matière. La paroi (supposée chaude, par exemple) cède par pure conduction de la chaleur au fluide adjacent qui la transmet de couche en couche dans une direction perpendiculaire à la paroi. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton [6] :

$$\Phi = h (T_s - T_a) \quad (3.12)$$



**Figure 3.3** Schéma du transfert de chaleur convectif

$\phi$  Flux de chaleur transmis par convection (W)

h Coefficient de transfert de chaleur par convection ( $W m^{-2} ^\circ C^{-1}$ )

$T_p$  Température de surface du solide ( $^\circ C$ )

$T_\infty$  Température du fluide loin de la surface du solide ( $^\circ C$ )

S Aire de la surface de contact solide/fluide ( $m^2$ )

On distingue :

- \* la convection forcée dans la quelle le mouvement du fluide est dû à l'action d'une pompe, d'un ventilateur ou d'une cheminée placée dans le circuit
- \* la convection naturelle (ou libre) dans la quelle le mouvement du fluide est crée par des différences de densité elles mêmes dues à des différences de températures existant dans le fluide.

Lorsqu'un fluide est en écoulement, une partie du transfert de chaleur dans le fluide se fait également par conduction et, dans le cas d'un fluide transparent, un transfert de chaleur par rayonnement peut accompagner les deux transferts précédents.

### 3.2.3 Transfert de chaleur par rayonnement

Le rayonnement thermique est le mode de transmission par lequel la chaleur passe d'un corps à haute température à un autre plus froid. Les deux corps ne se touchent pas, mais ils sont séparés par un milieu transparent tel l'air ou le vide, il s'agit d'un rayonnement électromagnétique, mais limité aux longueurs d'onde du rayonnement thermique dont l'absorption par certains corps à la propriété de transformer (en tout ou partie) " L'énergie radiante ou chaleur ou plus exactement en énergie calorifique. Ce mécanisme est décrit par la relation :

$$\Phi = \sigma \epsilon_p S (T_s^4 - T_a^4) \quad (3.13)$$

Avec :

$\sigma$  Constante de Stefan ( $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ )

$\epsilon_p$  Facteur d'émission de la surface

Le rayonnement thermique est émis continuellement par tout les corps dans toutes les directions et à la vitesse de la lumière (dans le vide).

L'exemple de rayonnement le plus simple est celui dont le soleil nous gratifie continuellement depuis des siècles.

### 3.3 Loi de Fourier pour un solide anisotrope

Le bilan thermique pour un élément de volume  $dV$ , pendant le temps  $dt$  est exprimé comme la chaleur ayant pénétré dans l'élément augmentée de la chaleur engendrée par les sources à l'intérieur de l'élément, est égale à la chaleur sortie de l'élément augmentée de la variation d'énergie interne.

$$\left( \begin{array}{c} \text{Taux de gain} \\ \text{d'énergie par} \\ \text{conduction} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{apport de} \\ \text{chaleur} \\ \text{volumique} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{chaleur} \\ \text{sortie} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{taux de} \\ \text{changement} \\ \text{d'énergie interne} \end{array} \right)$$

$$(q_x + q_y + q_z)dt + w(dx dy dz)dt = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})dt + c_p dT(dx dy dz) \quad (3.14)$$

Pour les corps anisotropes les projections du vecteur de flux de chaleur suivant les coordonnées spatiales sont fonction des gradients de température suivant les mêmes coordonnées.

$$\begin{cases} q_x = -k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} - k_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \\ q_y = -k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \\ q_z = -k_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} - k_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} - k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases} \quad (3.15)$$

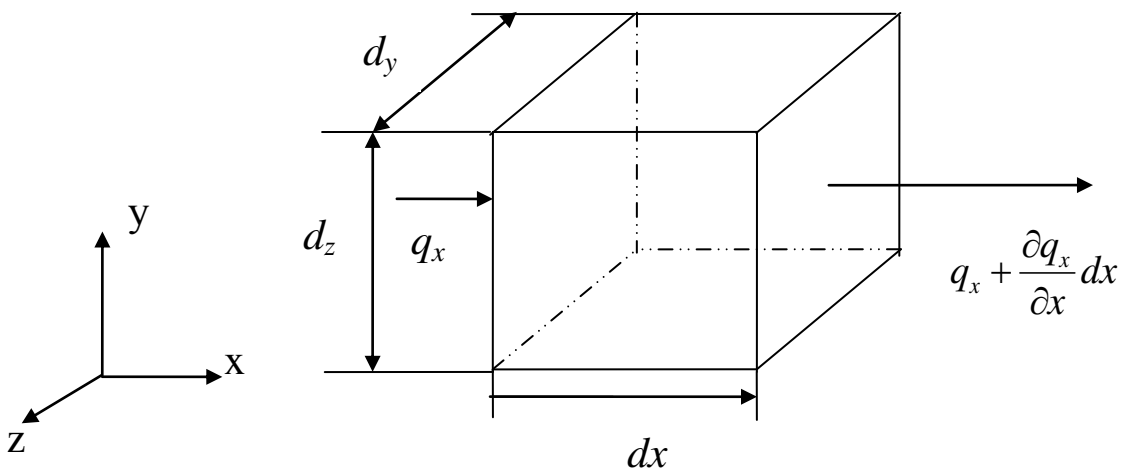


Figure 3.4 Elément de volume  $dx dy dz$

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

tenseur de conductivité thermique.

Dans le cas le plus général mais selon la loi de Fourier

$$q_x = \left[ -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right] dy dz \quad (3.17)$$

Où  $k_x$  est la conductivité selon la direction X.

Et

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \left[ \left( -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial x} \left( -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy dz \quad (3.18)$$

$$q_x - q_{x+dx} = - \frac{\partial \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} dx dy dz \quad (3.19)$$

Pareil pour les directions y et z on a des relations semblables où il a suffit de remplacer x par y et z respectivement.

Introduisant ces relations dans (3.14) on obtient.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + w = c_p \rho \frac{dT}{dt} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + w = c_p \rho \frac{dT}{dt} \quad (3.21)$$

L'équation générale de la conduction s'écrit alors:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right] + w = c_p \rho \frac{dT}{dt} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sous forme condensée cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + w = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.23)$$

### 3.4 Quelques tenseurs de conductivité thermique $[K_{ij}]$ [6]

Les tenseurs de conductivité thermique pour les sept systèmes cristallins sont :

Tenseurs de conductivité selon chaque système

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

Système triclinique.

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

Système monoclinique.

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

Système orthorhombique.

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} \end{bmatrix}$$

Système cubique.

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ -k_{12} & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

Système trigonale,  
tetragonal, hexagonale.

### 3.5 Bibliographie

N°	Auteurs	Titre	journal	Année
[1]	D.W. Hahn, M.N. Özisik.	Heat Conduction	3rd Eds, John Wiley & Sons	2012
[2]	R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K. Seetkaramu	Fundamentals of Finite Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow	Eds, John Wiley & Sons	2008
[3]	A.M. Bianchi, Y. Fauterelle, J. Etay.	Transferts Thermiques	1 <sup>st</sup> Eds, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes	2004
[4]	B. André, D. Vriendt	Transmission de la Chaleur, la conduction	3rd Eds, G. Morin	1989
[5]	Yunus A. Çengel	Heat and mass transfer A practical	Third edition University Nevada, Reno McGraw-Hill	2007
[6]	Y. Jannot, C. Moyne.	Transfets thermique	Ecole des Mines Nancy	2012

## CHAPITRE 4 : MODELE NUMERIQUE

### 4.1. NOTIONS SUR LES METHODES NUMERIQUES

Il existe plusieurs types de méthodes pour trouver des solutions approchées aux problèmes définissant l'équilibre global d'une structure. Ces méthodes sont brièvement décrites plus loin, particulièrement celles auxquelles la méthode des éléments finis s'apparente fortement.

L'idée de base de ces méthodes est de représenter la solution par une combinaison linéaire finie de fonctions connues. Les coefficients multiplicateurs étant déterminés pour que la solution soit le meilleur possible. Le fait que le nombre des fonctions soit fini montre bien que la solution n'est qu'approchée. Les coefficients sont ajustés de manière à minimiser l'écart entre la solution vraie et la solution approchée.

Le processus converge si cet écart tend vers zéro quand le nombre de termes représentant la solution approchée augmente.

### 4.2 Différentes méthodes numériques

Les méthodes numériques les plus connues, utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles, sont :

- les méthodes intégrales.
- la méthode des différences finis.
- la méthode des volumes finis.
- la méthode des éléments finis.

#### 4.2.1 Méthode des différences finis

C'est la méthode la plus simple et la plus directe pour résoudre une équation ou un système d'équations aux dérivées partielles, le principe de cette technique consiste à remplacer les dérivées partielles par les différences finies obtenues à partir d'un développement en série de *Taylor* limité.

La résolution d'un problème aux dérivées partielles nécessite la donnée:

- d'un domaine D.
- d'une équation aux dérivées partielles (E.D.P).
- de conditions aux limites.
- de conditions initiales (pour le problème d'évaluation).

La méthode des différences finies est fondée sur les étapes suivantes:

- Discrétisation du domaine.
- Approximation des différences finies.
- Approximation des conditions initiales et aux limites.
- La solution.

#### 4.2.2 Méthode des volumes finis

Le problème continu est formulé en termes d'équation de bilan (lois de conservation) sous forme intégrale s'appliquant à des sous domaines quelconques de  $D$ , le domaine  $D$  est discrétisé par des volumes élémentaires (cellules, ou volumes finis) pouvant se recouvrir partiellement et le plus souvent définis par des maillages comme les méthodes de différences finies. Les inconnus  $\rho$  peuvent être des valeurs  $\varphi$  dans chaque cellule, ou plus généralement des valeurs de  $\varphi$  en certains points de chaque cellule. Les équations discrètes résultent de l'application à  $\varphi$  des équations de bilan dans chaque cellule.

#### 4.2.3 Méthode des éléments finis

##### 4.2.3.1 Principe de la méthode

La méthode des éléments finis est une approche de calcul numérique, permettant de déterminer l'équilibre élastique des structures continues à deux ou trois dimensions, structure planes, solides élastiques, plaques minces, etc.

##### 4.2.3.2 Fondements de la méthode des éléments finis

Le domaine  $D$  est discrétisé en sous domaines  $D_e$ , de dimensions finies, ou éléments finis de telle manière qu'il n'y ait ni trous entre les éléments, ni recouvrements des éléments. Il est aussi souhaitable qu'il y'ait le moins d'erreurs possibles dans la représentation de la frontière de  $D$ .

Le résultat de cette discrétisation constitue le maillage, la construction de maillage bien adaptée est un élément de plus en plus important pour la précision et l'efficacité de traitement aussi bien pour la construction de maillage que pour la formulation mathématique et la méthode numérique.

Dans chaque sous domaine  $D_e$ , la fonction  $U$  qu'il faut calculer est approchée de manière nodale, cette terminologie est employée pour définir une certaine approximation, complétement caractérisée par les valeurs que prend  $U$  en un certain nombre de points ou nœuds de l'élément fini  $D_e$ , l'approximation est supposée nulle dans tout les autres éléments dont la réunion constitue  $D$ . Les approximations dans chacun des éléments sont construites de telle sorte que l'approximation globale soit partout continue.

#### 4.2.3.3 Discrétisation du domaine

Il s'agit de découper le domaine initial en un certain nombre d'éléments de taille finie (d'où le nom de la méthode). Généralement, pour un domaine donné, ces éléments ont la même forme géométrique, triangle, rectangle...etc. Ce n'est pas une obligation mais une commodité et/ou une contrainte dictée(s) par des considérations de continuité, Evidement ces éléments de type différents si le domaine à discrétiser est une ligne, une surface ou un volume.

La figure (4.1) montre les éléments les plus usuels, utilisés pour représenter des domaines de  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{R}^3$ .

Il faut suivre des règles et des considérations mécaniques. Chaque type d'élément considéré sous son seul aspect géométrique, est donc caractérisé par la donnée d'un certain nombre de nœuds sommets ou nœuds intermédiaires des cotés ou des faces. Ces nœuds sont numérotés de telle manière qu'ils puissent être identifiés par un ordinateur.

#### 4.2.3.4 Approximation nodale

A l'intérieur de chaque élément, la fonction  $U$  recherchée est approximée nodalement. Pour construire cette approximation nodale dont la définition suit, il faut choisir des fonctions de base. Dans la méthode des éléments finis ce sont des polynômes ainsi, dans chaque élément sont adopté des développements de type :

- dans  $\mathbf{R}$

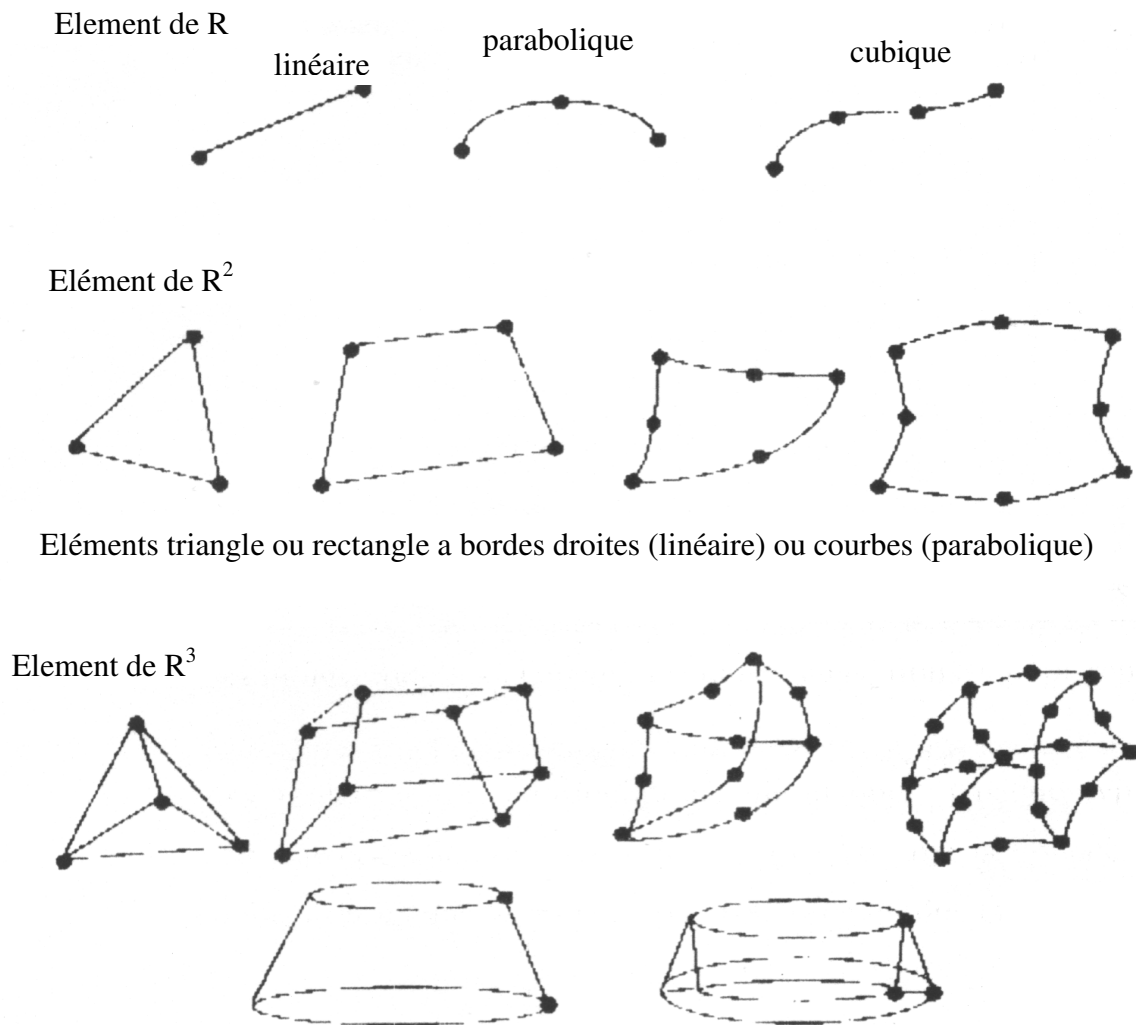
$$U = a_1 + a_2x \quad \text{ou} \quad U = a_1 + a_2x + a_3x^2 \quad (4.1)$$

- dans  $\mathbf{R}^2$

$$U = a_1 + a_2x + a_3y \quad \text{ou} \quad U = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (4.2)$$

- dans  $\mathbf{R}^3$

$$U = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (4.3)$$



**Figure 4.1** Types d'éléments finis

Si  $U$  est une fonction vectorielle, chacune de ses composantes est alors développée, pratiquement toujours avec un polynôme du même degré. Pour obtenir la forme nodale de ces approximations polynomiales, il faut exprimer les coefficients  $a_i$  en fonction des valeurs de  $U$ .

#### 4.2.3.5 Assemblage

Les règles d'assemblage peuvent différer selon les problèmes traités, mais le plus souvent il s'agit de superposer la contribution de chaque élément. Bien entendu, toutes les

quantités assemblées de chaque élément doivent être exprimées dans le même système d'axes.

Les grandes étapes de la Méthode des éléments finis sont résumées ci-dessous :

- **Discrétisation** : Cette étape s'appelle le **maillage**, le nombre, le type et la forme des éléments finis choisis dépendent du type de problème à résoudre et de savoir faire. Les nœuds géométriques définissant les éléments doivent être numérotés de la même manière que les éléments. On doit aussi connaître la séquence de numéros des nœuds appartenant à un élément et leurs coordonnées.
  
- **Formulation variationnelle** : les équations aux dérivées partielles ou les équations différentielles à résoudre doivent être mises sous forme variationnelle. Dans cette formulation, des intégrations par parties peuvent être nécessaires pour équilibrer, sous le signe somme l'ordre des dérivations de la fonction et de sa variation.
  
- **Approximation nodale** : dans chaque élément, la fonction recherchée est remplacée par son approximation nodale. Les inconnues du problème deviennent alors les valeurs nodales d'approximation. Les calculs sont menés séparément pour chaque élément.
  
- **Assemblage** : La sommation des variations ou une forme bilinéaire symétrique des inconnus et de leur variation.
  
- **La solution**: les équations algébriques déduites de l'étape précédente ne sont résolues qu'après avoir tenu compte des conditions limites du problème. La solution est un ensemble de valeurs nodales. L'interpolation dans chaque élément permet de connaître la solution partout.

Le principal avantage de la méthode des éléments finis est sa flexibilité, on peut l'appliquer de façon quasi-automatique à tous problèmes mis sous formes variationnelle, on peut aussi varier le type d'élément choisis et on a intérêt à utiliser dans chaque problème un type d'élément adapté, on a surtout une très grande souplesse dans le découpage en élément que l'on pourra faire beaucoup plus serré dans certaines parties du domaine si la solution y présente des irrégularités.

## 4.2 Méthodes variationnelles

Parmi toutes les méthodes fondés sur cette démarche il faut distinguer plus particulièrement : La méthode de résidus pondérés, de Galerkin et la méthode de minimisation de l'énergie potentielle.

### 4.2.1 Méthode des résidus pondérés

Il est supposé que :

- L'équation d'état du problème, sous sa forme non variationnelle, puisse s'écrire dans  $V$  ( $V$  domaine déformé) comme suit :

$$\mathcal{L}U = f \quad (4.4)$$

Avec  $U$  opérateur différentiel,

- Les conditions aux limites aient, la forme :

$$B_l U = g_l \quad (4.5)$$

- La méthode des résidus pondérés consiste à supposer que la solution approchée  $U_a$  s'écrit:

$$U_a = \sum_{j=1}^n C_j \phi_j \quad (4.6)$$

- Les  $C_j$  sont calculés de telle manière qu'ils minimisent le résidu défini par :

$$R_n = \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^n C_i \phi_i \right) - f \quad (4.7)$$

- Cette minimisation est réalisée en écrivant l'orthogonalité entre  $R_n$  et un nombre  $n$  de fonction  $\psi_k$  ce qui s'exprime par :

$$\int_V (\psi_k)(R_n) dv = 0 \quad k=1, n \quad (4.8)$$

Les  $\phi_j$  ( $j=1, n$ ) doivent vérifier les conditions aux limites. Les  $n$  équations résultant des  $n$  conditions d'orthogonalité permettent de calculer les  $C_j$ .

### 4.2.2 La méthode de GALERKIN

C'est une variante de la méthode des résidus pondérés, elle consiste à prendre pour fonction  $\psi_k$  les fonctions d'interpolation  $\phi_j$ . Si  $\mathcal{L}$  est linéaire (4-8) prend la forme suivante :

$$\int_v (\phi_k) \left[ L \left( \sum_{j=1}^n C_j \phi_j \right) - f \right] dv = 0 \quad k=1, \dots, n \quad (4.9)$$

Et donne un système linéaire à résoudre dont la k<sup>ème</sup> ligne s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n A_{kj} C_j = h_k \quad (4.10)$$

### 4.2.3 Méthode de minimisation de l'énergie potentielle

Considérons un corps élastique, déformé sous l'action des forces de volume et de surface, l'énergie potentielle de ce corps est définie comme étant la différence entre l'énergie de déformation et le travail effectué par les forces extérieures sur ce corps le Théorème de l'énergie potentielle minimale est énoncé comme suit :

$$\Pi(u_i) = U_p(u_i) - V_p(u_i) \quad (4.11)$$

$$\delta \Pi(u_i) = \delta [U_p(u_i) - V_p(u_i)] \quad (4.12)$$

$$\delta \Pi(u_i) = \delta U_p(u_i) - \delta V_p(u_i) = 0 \quad (4.13)$$

On définit l'énergie de déformation d'un corps élastique comme suit :

$$U_p(u, v) = \frac{1}{2} \int_v [\varepsilon] \{\sigma\} dV \quad (4.14)$$

$[\varepsilon] = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}]$  : rang de déformation.

$\{\sigma\}$  : vecteur contrainte.

$V$  : volume du corps.

Le travail effectué par les forces extérieures est donné par :

$$V_p(u_i) = \int_a [F] \{\delta\} dv + \int_s [T] \{\delta\} dA \quad (4.15)$$

Où :

$[F] = [F_x, F_y, F_z]$  : le rang du vecteur des forces volumiques.

$[T] = [T_x, T_y, T_z]$  : le rang du vecteur des forces surfaciques agissant sur la limite du domaine.

$\{\delta\}$  : le vecteur du champ de déplacement.

### 4.3 Application de la MEF pour le calcul des températures

#### 4.3.1 Description du problème

Il s'agit de calculer le champ de température dans un solide de forme cubique, de 1m de coté ayant une source de chaleur interne d'intensité  $w$  (figure 4.2)

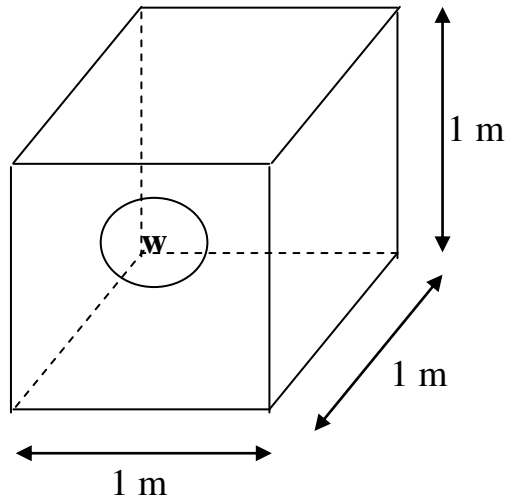


Figure 4.2 Domaine d'étude (D)

Pour discrétiser ce domaine nous avons utilisé au départ des éléments de base (e) de forme cubique 8 nœuds chacun (Figure 4.3 (a)). Pendant le développement des calculs pour l'obtention des matrices élémentaires décrivant le phénomène de transfert dans ce cas, nous avons affronté un problème dans la discrétisation des équations et nous sommes arrivés à une formulation dont la solution n'est pas évidente. Alors nous avons décidé de discrétiser l'élément de base (e) lui-même en 5 autres sous éléments (ee) (Figure 4.3.(b)) de forme prismatique (tétraèdre).

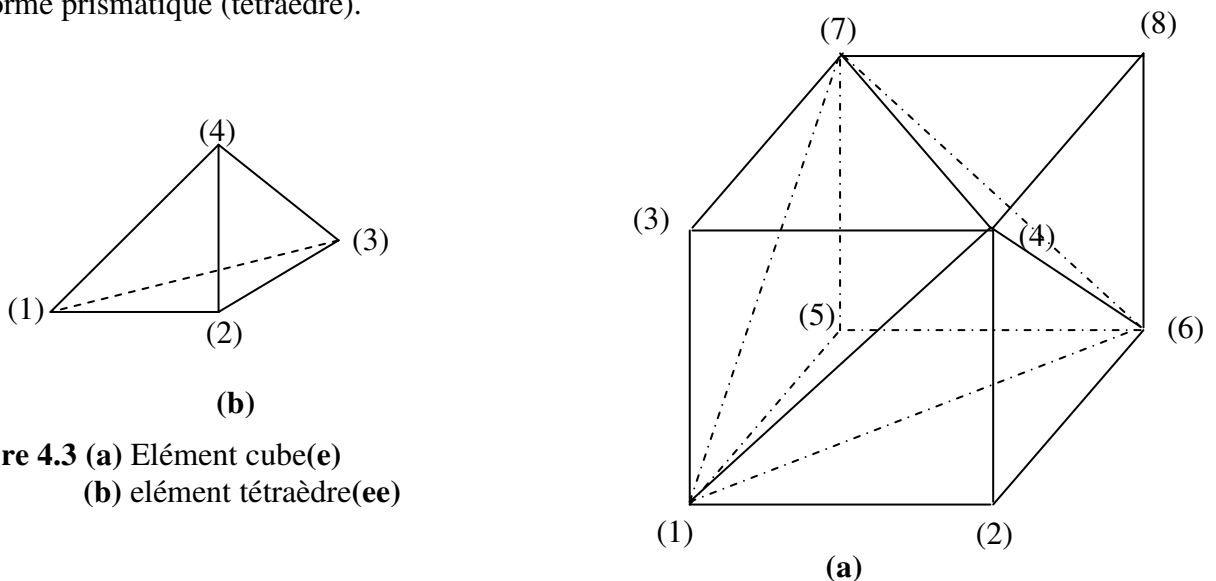


Figure 4.3 (a) Elément cube(e)  
(b) élément tétraèdre(ee)

### 4.3.2 Discrétisation du domaine

Etant donné le domaine d'étude de forme cube, les éléments choisis sont des prismes, ce domaine sera divisé en éléments et nœuds, les nœuds  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8$  situés aux huit extrémités sont dits nœuds directeurs (Figure 4.4), on a commencé par une première division de segments en cinq divisions égales. La génération automatique du maillage consiste alors à :

- ✓ Spécifier les coordonnées des nœuds directeurs :

Nœuds	x	y	z
$N_1=1$	0	0	0
$N_2=6$	1	0	0
$N_3=31$	0	0	1
$N_4=36$	1	0	1
$N_5=181$	0	1	0
$N_6=186$	1	1	0
$N_7=211$	0	1	1
$N_8=216$	1	1	1

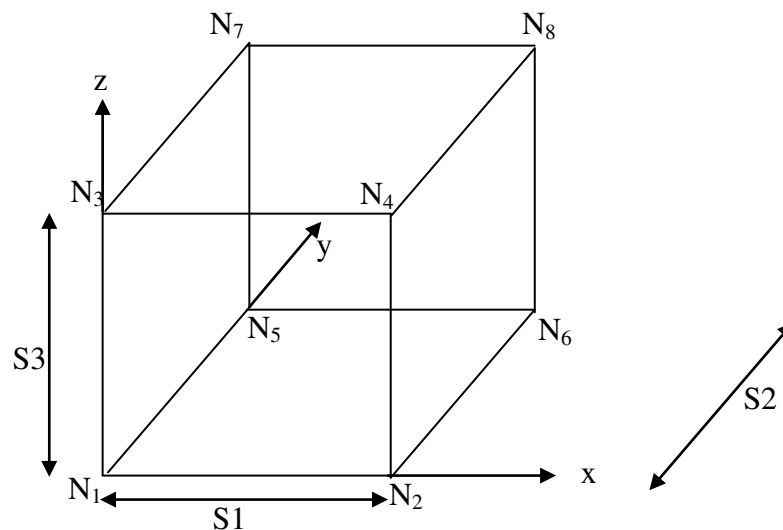


Figure 4.4 Nœuds directeurs

➤ **générer les nœuds situés sur le premier segment horizontal  $n_1$   $n_2$  :**

$$x(1) = 0 \quad y(1) = 0 \quad z(1) = 0$$

$$i = 1 + n_4 * (ik - 1), n_2 + (ik - 1) * n_4$$

$$id = j * n_2 + i$$

$$x(id) = x(i)$$

$$y(id) = (ik - 1) * sp_2$$

$$z(id) = j * sp_3$$

➤ **générer les nœuds situés sur les segments parallèles à  $n_1$   $n_2$  :**

$$i = 1, n_2$$

$$in = j * n_2 + i$$

$$x(in) = x(i)$$

$$y(in) = y(i)$$

$$z(in) = j * sp_3$$

➤ **génération des faces :**

$$j = 1, (n_2 - n_1)$$

$$ik = 1, n_2$$

$$in = 1 + n_4 * (ik - 1)$$

$$x(in) = 0$$

$$y(in) = (ik - 1) * sp_2$$

$$z(in) = 0$$

$$ir = 2 + n_4 * (ik - 1), n_2 + (ik - 1) * n_4$$

$$x(ir) = x(ir - 1) + sp_1$$

$$y(ir) = (ik - 1) * sp_2$$

$$z(ir) = 0$$

➤ **générer les éléments :**

En subdivisant le domaine suivant oy (figure 4.5 a, b, c), puis par des segments verticaux suivant oz (figure 4.6) et par des segments horizontaux suivant ox (figure 4.7), on obtient 125 cubes à huit (8) nœuds chacun ; enfin on divise chaque nouveau cube en cinq prismes, on utilise deux compteurs l'un à gauche et l'autre à droite, on adaptera ainsi la numérotation nodale et élémentaire suivante :

Initialement:

$$e = 0$$

$$ir = n_1, (n_2-1)$$

$$ib = n_1, (n_2-1)$$

$$id = n_1, (n_2-1)$$

$$e = e+1$$

$$iie = (ir-1) \times n_4 + (ib-1) \times n_2 + id$$

$$je = iie + 1$$

$$ke = je + n_2 - 1$$

$$le = ke + 1$$

$$me = (ir-1) \times n_4 + (ib-1) \times n_2 + id + n_4$$

$$re = me + 1$$

$$pe = me + n_2$$

$$qe = pe + 1$$

### **Exemple**

Maillage : 6x6x6

Nombre des nœuds total  $n_n$  :  $6*6*6=216$  noeuds

$$N_1=1$$

$$N_1=1$$

$$N_2=6$$

$$N_2=6$$

$$N_3=2(N_4-N_2)+1$$

$$N_3=31$$

$$N_4=N_2^2$$

$$N_4=36$$

$$N_5=N_4*(N_2-1)+1$$

$$N_5=181$$

$$N_6=N_5+(N_2-1)$$

$$N_6=186$$

$$N_7=N_8-(N_2-1)$$

$$N_7=211$$

$$N_8=N_2^3$$

$$N_8=216$$

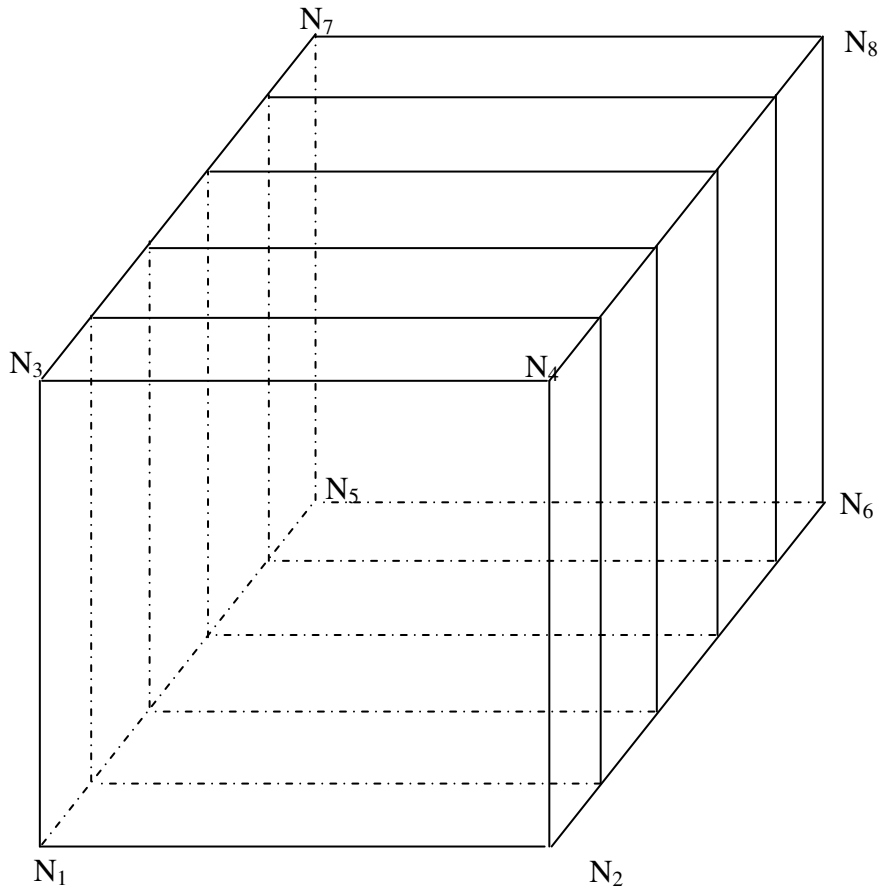


Figure 4.5 (a)

➤ **Discrétisation du solide en des volumes (5 sous volumes) suivant l'axe (y) :**

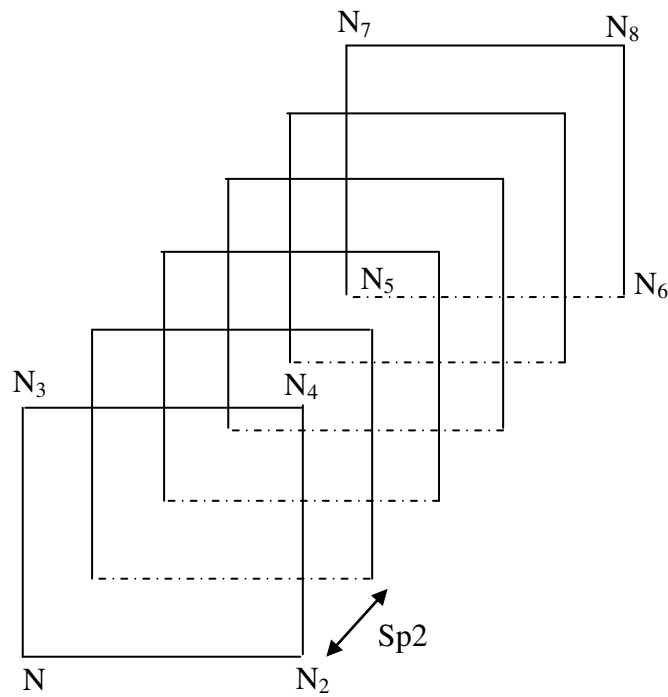
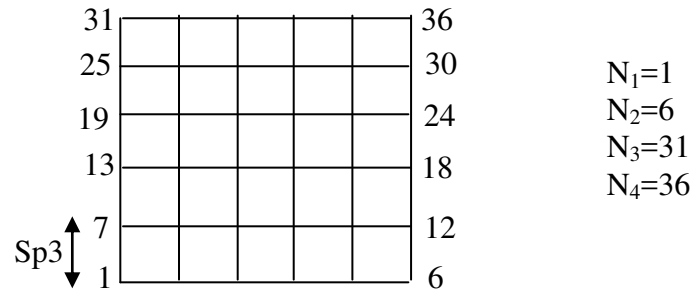
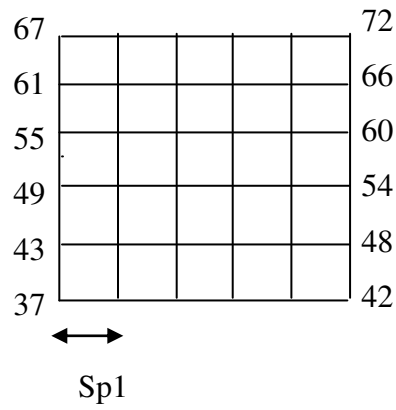


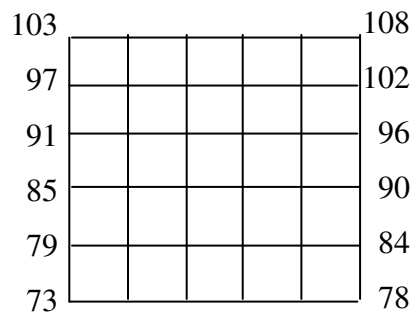
Figure 4.5 (b) Discrétisation suivant l'axe (oy) 6 plans ( faces )



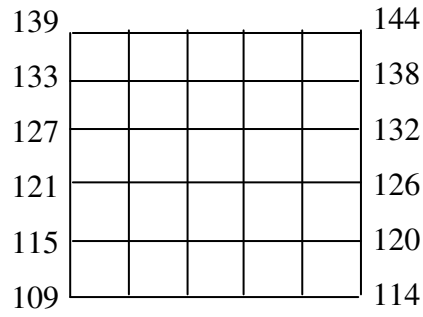
Face 1



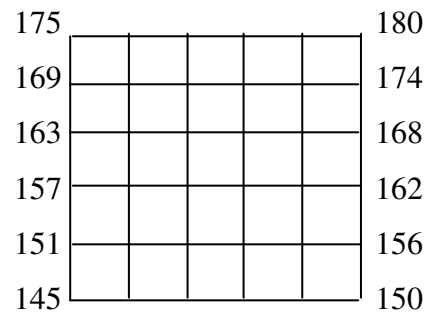
Face 2



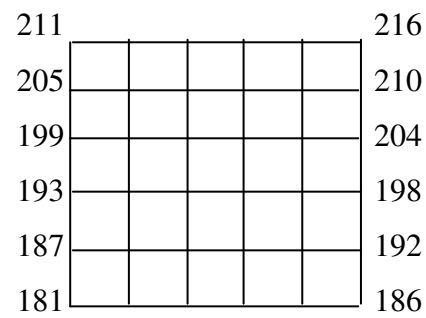
Face 3



Face 4



Face 5



Face 6

$N_5=181$   
 $N_6=186$   
 $N_7=211$   
 $N_8=216$

Figure 4.5 (c) Numérotation des nœuds des faces

- **Discrétisation des volumes en des barres** (5 barres dans chaque sous volume) suivant l'axe (z) :

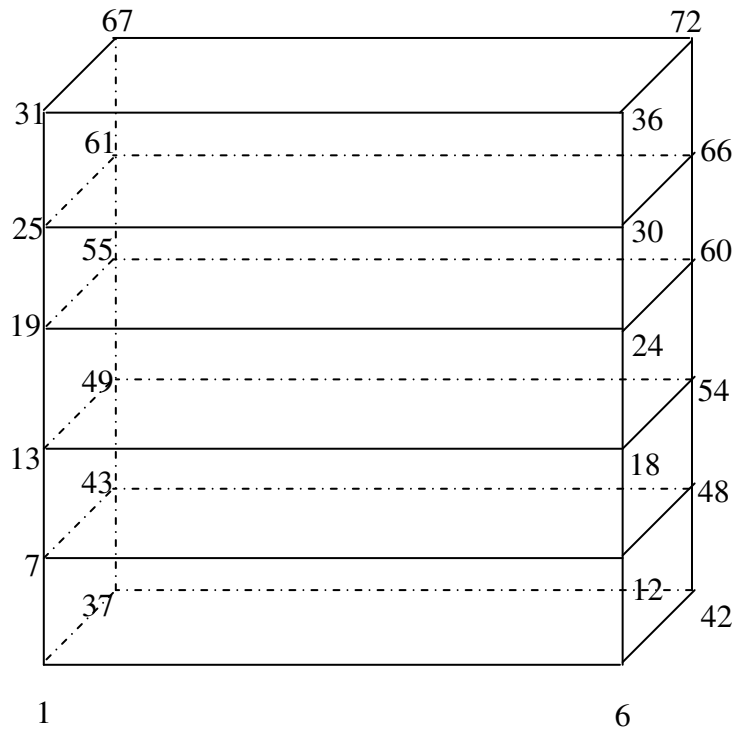


Figure 4.6 Discrétisation suivant l'axe (oz)

- **Discrétisation des barres en des cubes** (5 cubes par barre) suivant l'axe (x) :

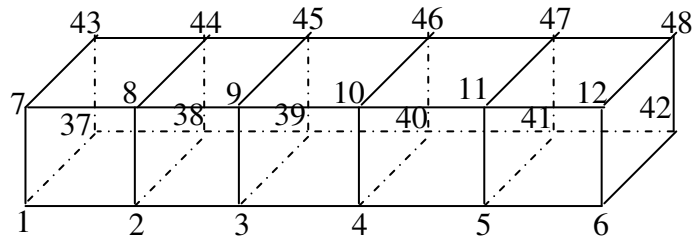


Figure 4.7 Discrétisation suivant l'axe (ox)

Résultat de la première discrétisation en cubes  $5 \times 5 \times 5 = 125$  éléments (e) cubiques.

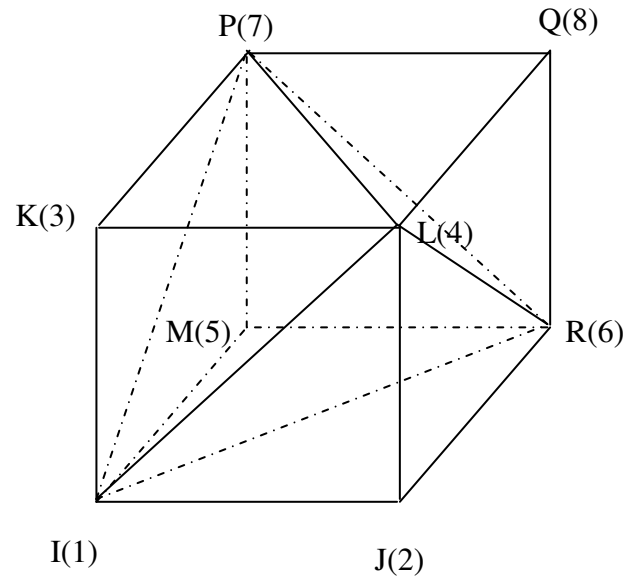
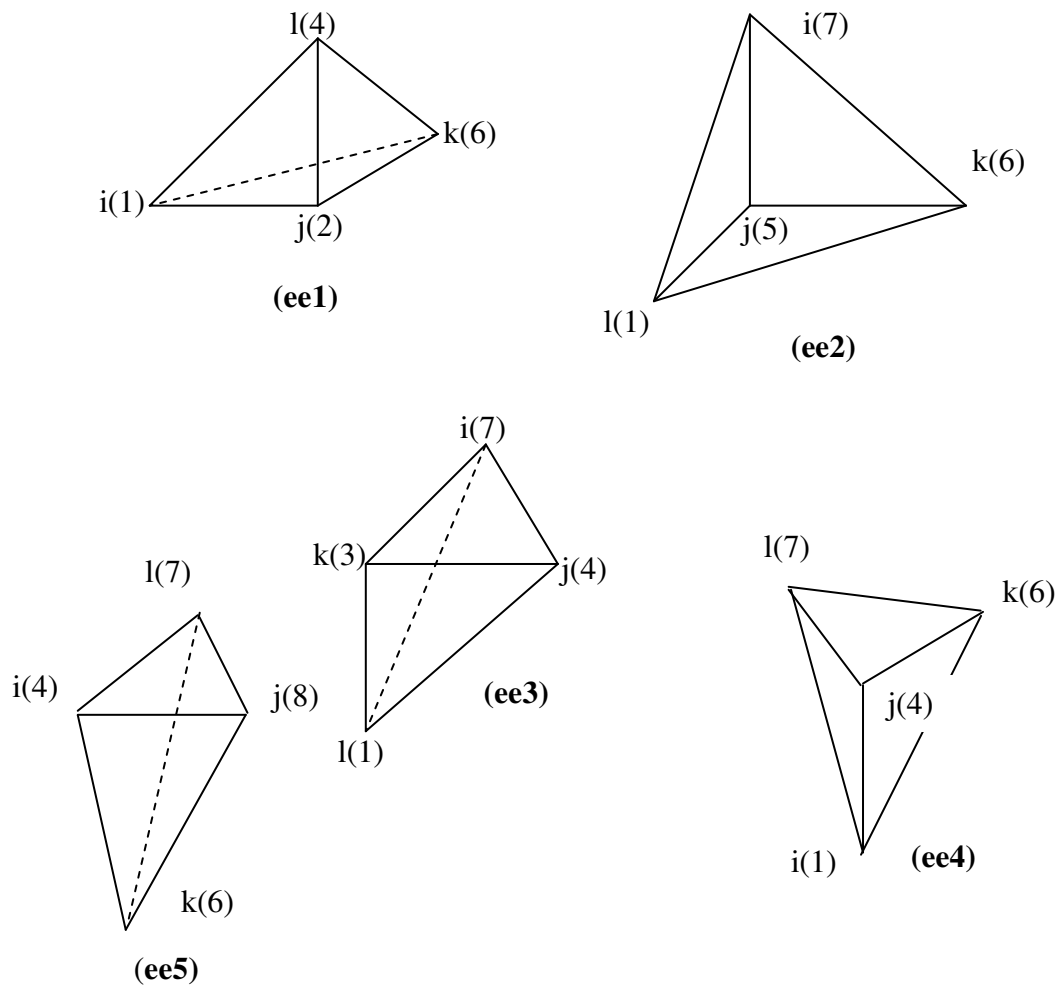


Figure 4.8 élément de base (e)

➤ **Discrétisation des cubes en des prismes :**

Maintenant chaque élément (e) est divisé sur la diagonale inférieure dans un sens et sur la diagonale supérieure dans le sens opposé, en reliant chaque diagonale aux deux sommets opposés de la deuxième diagonale par des plans triangles on obtient quatre tétraèdres de volumes égaux et opposés deux à deux, le cinquième tétraèdre a une forme et un volume différents des autres tétraèdres (Figure 4.9).



**Figure 4.9** Discretisation de l'élément (e) en sous éléments (ee)

Résultat de la deuxième discrétisation en prismes  $125 \times 5 = 625$  éléments (ee) tétraédriques.

### 4.3.3 Discretisation de l'équation de chaleur

On reprend l'équation de la conduction de chaleur dans le solide anisotrope :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + w = \rho C_p \frac{dT}{dt} \quad (4.16)$$

Pour le cas tridimensionnel et un régime stationnaire cette équation condensée par les indices  $i, j$  s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial x_x} \left[ k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x_x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial x_y} + k_{xz} \frac{\partial T}{\partial x_z} \right] + \frac{\partial}{\partial x_y} \left[ k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x_x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial x_y} + k_{yz} \frac{\partial T}{\partial x_z} \right] + \frac{\partial}{\partial x_z} \left[ k_{zx} \frac{\partial T}{\partial x_x} + k_{zy} \frac{\partial T}{\partial x_y} + k_{zz} \frac{\partial T}{\partial x_z} \right] + w = 0 \quad (4.17)$$

$$x_x = x, \quad x_y = y, \quad x_z = z$$

$$\Theta = T - T_0 \quad (4.18)$$

$T_0$  : température de milieu ambiant

$w$  : source de chaleur dans le solide

#### 4.3.3.1 Choix de la fonction d'interpolation

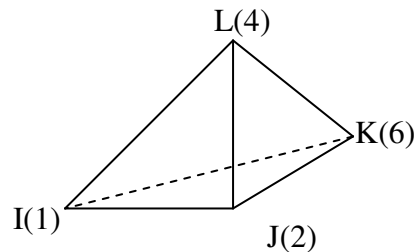
On a choisit la fonction d'interpolation suivante :

$$\phi (x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (4.19)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  : Constantes à déterminer.

$\phi (x,y,z)$  : représente le champ de température à calculer.

Et on choisit un élément type (ee) de nœuds **i, j, k, l** (figure 4.10):



**Figure 4.10** Élément type (ee)

La fonction  $\Phi$  en chaque nœud de l'élément s'écrit :

$$\begin{cases} \Phi_i(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z \\ \Phi_j(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 z_j \\ \Phi_k(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k + \alpha_4 z \\ \Phi_l(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x_l + \alpha_3 y_l + \alpha_4 z_l \end{cases} \quad (4.20)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{vmatrix} \quad (4.21)$$

On résout ce système pour obtenir les coefficients  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$

$$\begin{aligned} \Delta = & x_j [(y_k z_l - z_k y_l) - (y_l z_1 - z_l y_1) + (y_i z_k - z_i y_k)] \\ & + x_i [(y_j z_l - z_j y_l) - (y_k z_l - z_k y_l) - (y_j z_k - z_j y_k)] \\ & + x_k [(y_i z_l - z_i y_l) - (y_j z_l - z_j y_l) - (y_i z_j - z_i y_j)] \\ & + x_l [(y_j z_k - z_j y_k) - (y_i z_k - z_i y_k) + (y_i z_j - z_i y_j)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$\Delta$  : déterminant du système (4.21)

Où  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, \Phi_l$  les températures aux nœuds i, j, k, l

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \alpha_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} \quad (4.23)$$

Avec

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \begin{vmatrix} \Phi_i & x_i & y_i & z_i \\ \Phi_j & x_j & y_j & z_j \\ \Phi_k & x_k & y_k & z_k \\ \Phi_l & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} & \Delta_2 = & \begin{vmatrix} 1 & \Phi_i & y_i & z_i \\ 1 & \Phi_j & y_j & z_j \\ 1 & \Phi_k & y_k & z_k \\ 1 & \Phi_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \\ \Delta_3 = & \begin{vmatrix} 1 & x_i & \Phi_i & z_i \\ 1 & x_j & \Phi_j & z_j \\ 1 & x_k & \Phi_k & z_k \\ 1 & x_l & \Phi_l & z_l \end{vmatrix} & \Delta_4 = & \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & \Phi_i \\ 1 & x_j & y_j & \Phi_j \\ 1 & x_k & y_k & \Phi_k \\ 1 & x_l & y_l & \Phi_l \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

On remplaçant  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  dans l'équation (4.19) et en rassemblant les termes en  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, \Phi_l$  on obtient :

$$\begin{aligned}
 \Phi^e(x, y, z) &= \left[ \frac{(x_j y_k z_l - x_l y_k z_j) + (y_j z_k - y_l z_k)x + (x_l z_j - x_j z_l)y + (x_k y_l - x_k y_j)z}{\Delta} \right] \Phi_i \\
 &+ \left[ \frac{(x_k y_l z_i - x_i y_l z_k) + (y_k z_l - y_i z_l)x + (x_i z_k - x_k z_i)y + (x_l y_i - x_l y_k)z}{\Delta} \right] \Phi_j \\
 &+ \left[ \frac{(x_l y_i z_j - x_j y_i z_l) + (y_l z_i - y_j z_i)x + (x_j z_l - x_l z_j)y + (x_i y_j - x_i y_l)z}{\Delta} \right] \Phi_k \\
 &+ \left[ \frac{(x_i y_j z_k - x_k y_j z_i) + (y_i z_j - y_k z_j)x + (x_k z_i - x_i z_k)y + (x_j y_k - x_j y_i)z}{\Delta} \right] \Phi_l
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$\Delta = 6V$ ,  $V$  volume de l'élément (ee)

Sous une autre forme  $\Phi^e(x, y, z)$  s'écrit aussi :

$$\Phi^e(x, y, z) = N_i(x, y, z)\Phi_i + N_j(x, y, z)\Phi_j + N_k(x, y, z)\Phi_k + N_l(x, y, z)\Phi_l \tag{4.26}$$

Où

$$\begin{aligned}
 N_i(x, y, z) &= \frac{1}{6V}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z) & N_j(x, y, z) &= \frac{1}{6V}(a_j + b_j x + c_j y + d_j z) \\
 N_k(x, y, z) &= \frac{1}{6V}(a_k + b_k x + c_k y + d_k z) & N_l(x, y, z) &= \frac{1}{6V}(a_l + b_l x + c_l y + d_l z)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Et

$$\begin{cases} a_i = x_j (y_k z_l - z_k y_l) - x_k (y_j z_l - z_j y_l) + x_l (y_j z_k - z_j y_k) \\ a_j = x_i (z_l y_k - z_k y_l) - x_k (y_i z_l - z_i y_l) + x_l (y_i z_k - z_i y_k) \\ a_k = x_i (y_j z_l - z_j y_l) - x_j (y_i z_l - z_i y_l) + x_l (y_i z_j - z_i y_j) \\ a_l = x_i (z_k y_j - z_j y_k) - x_j (y_i z_k - z_i y_k) - x_k (y_i z_j - z_i y_j) \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} b_i = -((y_k z_l - z_k y_l) - (y_j z_l - z_j y_l) + (y_j z_k - z_j y_k)) \\ b_j = -((y_k z_l - y_l z_k) - (y_i z_l - y_l z_i) + (y_i z_k - y_k z_i)) \\ b_k = -((y_j z_l - z_l y_j) - (y_i z_l - z_l y_i) + (y_i z_k - z_i y_k)) \\ b_l = -((y_j z_k - y_k z_j) - (y_i z_k - z_i y_k) + (y_i z_j - z_i y_j)) \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\begin{cases} c_i = -(x_j (z_l - z_k) - x_k (z_l - z_j) + x_l (z_k - z_j)) \\ c_j = -(x_i (z_l - z_k) - x_k (z_l - z_i) + x_l (z_k - z_i)) \\ c_k = -(x_i (z_l - z_j) - x_j (z_l - z_i) + x_l (z_j - z_i)) \\ c_l = -(x_i (z_k - z_j) - x_j (z_k - z_i) + x_k (z_j - z_i)) \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} d_i = -(x_j (y_k - y_l) - x_k (y_j - y_l) + x_l (y_j - y_k)) \\ d_j = -(x_i (y_k - y_l) - x_k (y_i - y_l) + x_l (y_i - y_k)) \\ d_k = -(x_i (y_j - y_l) - x_j (y_i - y_l) + x_l (y_i - y_j)) \\ d_l = -(x_i (y_i - y_k) - x_j (y_i - y_k) + x_k (y_i - y_j)) \end{cases} \quad (4.31)$$

#### 4.3.3.2 Application de la méthode de Galerkin

- **Calcul de la matrice de rigidité élémentaire  $[k]^{ee}$**

Pour calculer le champ de température  $T$  on applique la méthode de Galerkin à

l'équation (4.17), C'est-à-dire :

$$\int_{D^e} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) \delta T$$

$$N_i \, dD^e + \int_{D^e} W N_i \, dD^e = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Le sous élément (ee) choisit est un tétraèdre à 4 nœuds donc  $[K_e]^e$  est une matrice carrée de dimension 4x4 de la forme suivante

$$[ke]^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Où

$$k_{11} = \frac{1}{36v} (k_{11}b_1^2 + k_{12}c_1b_1 + k_{13}d_1b_1 + k_{21}b_1c_1 + k_{22}c_1^2 + k_{23}d_1c_1 + k_{31}b_1d_1 + k_{32}c_1d_1 + k_{33}d_1^2)$$

$$k_{12} = \frac{1}{36v} (k_{11}b_2b_1 + k_{12}c_2b_1 + k_{13}d_2b_1 + k_{21}b_2c_1 + k_{22}c_2c_1 + k_{23}d_2c_1 + k_{31}b_2d_1 + k_{32}c_2d_1 + k_{33}d_2d_1)$$

$$k_{13} = \frac{1}{36v} (k_{11}b_3b_1 + k_{12}c_3b_1 + k_{13}d_3b_1 + k_{21}b_3c_1 + k_{22}c_3c_1 + k_{23}d_3c_1 + k_{31}b_3d_1 + k_{32}c_3d_1 + k_{33}d_3d_1)$$

$$k_{14} = \frac{1}{36v} (k_{11}b_4b_1 + k_{12}c_4b_1 + k_{13}d_4b_1 + k_{21}b_4c_1 + k_{22}c_4c_1 + k_{23}d_4c_1 + k_{31}b_4d_1 + k_{32}c_4d_1 + k_{33}d_4d_1)$$

$$k_{21} = \frac{1}{36v} (k_{11}b_1b_2 + k_{12}c_1b_2 + k_{13}d_1b_2 + k_{21}b_1c_2 + k_{22}c_1c_2 + k_{23}d_1c_2 + k_{31}b_1d_2 + k_{32}c_1d_2 + k_{33}d_1d_2)$$

$$k_{22} = \frac{1}{36v} (k_{11}b_2^2 + k_{12}c_2b_2 + k_{13}d_2b_2 + k_{21}b_2c_2 + k_{22}c_2^2 + k_{23}d_2c_2 + k_{31}b_2d_2 + k_{32}c_2d_2 + k_{33}d_2^2)$$

$$k_{23} = \frac{1}{36v} (k_{11}b_3b_2 + k_{12}c_3b_2 + k_{13}d_3b_2 + k_{21}b_3c_2 + k_{22}c_3c_2 + k_{23}d_3c_2 + k_{31}b_3d_2 + k_{32}c_3d_2 + k_{33}d_3d_2)$$

$$k_{24} = \frac{1}{36v} (k_{11}b_4b_2 + k_{12}c_4b_2 + k_{13}d_4b_2 + k_{21}b_4c_2 + k_{22}c_4c_2 + k_{23}d_4c_2 + k_{31}b_4d_2 + k_{32}c_4d_2 + k_{33}d_4d_2)$$

$$k_{31} = \frac{1}{36\nu} (k_{11}b_1b_3 + k_{12}c_1b_3 + k_{13}d_1b_3 + k_{21}b_1c_3 + k_{22}c_1c_3 + k_{23}d_1c_3 + k_{31}b_1d_3 + k_{32}c_1d_3 + k_{33}d_1d_3)$$

$$k_{32} = \frac{1}{36\nu} (k_{11}b_2b_3 + k_{12}c_2b_3 + k_{13}d_2b_3 + k_{21}b_2c_3 + k_{22}c_2c_3 + k_{23}d_2c_3 + k_{31}b_2d_3 + k_{32}c_2d_3 + k_{33}d_2d_3)$$

$$k_{33} = \frac{1}{36\nu} (k_{11}b_3^2 + k_{12}c_3b_3 + k_{13}d_3b_3 + k_{21}b_3c_3 + k_{22}c_3^2 + k_{23}d_3c_3 + k_{31}b_3d_3 + k_{32}c_3d_3 + k_{33}d_3^2)$$

$$k_{34} = \frac{1}{36\nu} (k_{11}b_4b_3 + k_{12}c_4b_3 + k_{13}d_4b_3 + k_{21}b_4c_3 + k_{22}c_4c_3 + k_{23}d_4c_3 + k_{31}b_4d_3 + k_{32}c_4d_3 + k_{33}d_4d_3)$$

$$k_{41} = \frac{1}{36\nu} (k_{11}b_1b_4 + k_{12}c_1b_4 + k_{13}d_1b_4 + k_{21}b_1c_4 + k_{22}c_1c_4 + k_{23}d_1c_4 + k_{31}b_1d_4 + k_{32}c_1d_4 + k_{33}d_1d_4)$$

$$k_{42} = \frac{1}{36\nu} (k_{11}b_2b_4 + k_{12}c_2b_4 + k_{13}d_2b_4 + k_{21}b_2c_4 + k_{22}c_2c_4 + k_{23}d_2c_4 + k_{31}b_2d_4 + k_{32}c_2d_4 + k_{33}d_2d_4)$$

$$k_{43} = \frac{1}{36\nu} (k_{11}b_3b_4 + k_{12}c_3b_4 + k_{13}d_3b_4 + k_{21}b_3c_4 + k_{22}c_3c_4 + k_{23}d_3c_4 + k_{31}b_3d_4 + k_{32}c_3d_4 + k_{33}d_3d_4)$$

$$k_{44} = \frac{1}{36\nu} (k_{11}b_4^2 + k_{12}c_4b_4 + k_{13}d_4b_4 + k_{21}b_4c_4 + k_{22}c_4^2 + k_{23}d_4c_4 + k_{31}b_4d_4 + k_{32}c_4d_4 + k_{33}d_4^2)$$

C'est une matrice antisymétrique puisque  $k_{ij} \neq k_{ji}$

#### 4.3.3.3 Assemblage des matrices élémentaires

Pour assembler les matrices sous élémentaires  $[k]^{e1}$ ,  $[k]^{e2}$ ,  $[k]^{e3}$ ,  $[k]^{e4}$ ,  $[k]^{e5}$  de dimensions 4x4 dans la matrice élémentaire  $[k]^e$  en des matrices de dimension NxN, on vas élargir les matrices élémentaires en des matrices de dimension NxN en ajoutant des lignes et des colonnes de zéros.

Soient des matrices sous élémentaires suivant :

$$[k]^{e_1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & k_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Elément } e_1 \text{ nœuds } 1, 2, 6, 4 \quad (4.33)$$

$$[k]^{e_2} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & k_{12} & k_{13} & 0 & k_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & 0 & 0 & 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{24} \\ k_{31} & 0 & 0 & 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & 0 & 0 & 0 & k_{42} & k_{43} & 0 & k_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Elément } e_2 \text{ nœuds } 6,8,7,4 \quad (4.34)$$

$$[k]^{e_3} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 & k_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 & k_{24} \\ k_{31} & 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & 0 & k_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & 0 & k_{42} & k_{43} & 0 & 0 & 0 & k_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Elément } e_3 \text{ nœuds } 7,3,4,1 \quad (4.35)$$

$$[k]^{e_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} & 0 & 0 & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21} & 0 & 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{31} & 0 & 0 & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{41} & 0 & 0 & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Elément } e_4 \text{ nœuds } 6,5,7,1 \quad (4.36)$$

$$[k]^{e_5} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{12} & 0 & 0 & k_{13} & 0 & k_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & 0 & k_{22} & 0 & 0 & k_{23} & 0 & k_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{32} & 0 & 0 & k_{33} & 0 & k_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & 0 & k_{42} & 0 & 0 & k_{43} & 0 & k_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Elément } e_5 \text{ nœuds } 6,7,4,1 \quad (4.37)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{e1} + k_{11}^{e3} + & k_{12}^{e1} & k_{12}^{e5} + k_{12}^{e3} + & k_{13}^{e3} & k_{12}^{e2} & k_{14}^{e1} + k_{13}^{e2} + & 0 & k_{14}^{e2} + k_{14}^{e3} + \\ k_{11}^{e2} + k_{11}^{e5} & k_{31}^{e2} & k_{31}^{e1} & k_{13}^{e3} & k_{12}^{e2} & k_{13}^{e5} & 0 & k_{14}^{e5} \\ k_{21}^{e1} & k_{22}^{e1} & k_{23}^{e1} & 0 & 0 & k_{24}^{e1} & 0 & 0 \\ k_{31}^{e1} + k_{21}^{e3} + & k_{32}^{e1} & k_{11}^{e4} + k_{33}^{e1} + & k_{23}^{e3} & 0 & k_{34}^{e1} + k_{12}^{e4} + & k_{13}^{e4} & k_{24}^{e3} + k_{14}^{e4} + \\ k_{21}^{e5} & k_{32}^{e1} & k_{22}^{e3} + k_{32}^{e5} & k_{23}^{e3} & 0 & k_{33}^{e5} & k_{13}^{e4} & k_{24}^{e5} \\ k_{31}^{e3} & 0 & k_{32}^{e3} & k_{33}^{e3} & 0 & 0 & 0 & k_{34}^{e3} \\ k_{21}^{e2} & 0 & 0 & 0 & k_{22}^{e2} & k_{33}^{e2} & 0 & k_{24}^{e2} \\ k_{41}^{e1} + k_{31}^{e2} + & k_{42}^{e1} & k_{43}^{e1} + k_{21}^{e4} + & 0 & k_{32}^{e2} & k_{44}^{e1} + k_{33}^{e2} + & k_{23}^{e4} & k_{34}^{e2} + k_{24}^{e4} + \\ k_{31}^{e5} & k_{32}^{e5} & k_{32}^{e5} & 0 & k_{32}^{e4} & k_{22}^{e4} + k_{33}^{e5} & k_{34}^{e5} & k_{34}^{e5} \\ 0 & 0 & k_{31}^{e4} & 0 & 0 & k_{32}^{e4} & k_{33}^{e4} & k_{34}^{e4} \\ k_{41}^{e3} + k_{41}^{e2} + & 0 & k_{42}^{e3} + k_{41}^{e4} + & k_{43}^{e3} & k_{42}^{e2} & k_{43}^{e2} + k_{42}^{e4} + & k_{43}^{e4} & k_{44}^{e3} + k_{44}^{e2} + \\ k_{41}^{e5} & k_{42}^{e5} & k_{42}^{e5} & k_{43}^{e5} & k_{43}^{e5} & k_{43}^{e5} & k_{43}^{e5} & k_{44}^{e4} + k_{44}^{e5} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

#### 4.3.3.4 Vecteur charge élémentaire $\{B\}^{ee}$ :

L'intégration du deuxième terme de l'équation (4.17) pour un élément (ee) nous donne le vecteur charge élémentaire  $\{B\}^{ee}$ . Pour cela on va utiliser le tableau suivant qui donne directement les valeurs des intégrales dans le cas tridimensionnels sous forme d'un rapport A/B pour :

$$I_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{V} \int_{V^{(e)}} N_1^\alpha N_2^\beta N_3^\gamma N_4^\delta dV^{(e)} = \frac{A}{B} \quad (4.39)$$

$\alpha$ $\delta$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$	B	$\gamma$	$\delta$	A	B
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	4
2	2	0	0	0	0	0	2	20
2	1	1	0	0	0	0	1	20
3	3	0	0	0	0	0	6	120
3	2	1	0	0	0	0	2	120
3	1	1	1	0	0	0	1	120
4	4	0	0	0	0	0	24	840
4	3	1	0	0	0	0	6	840
4	2	2	0	0	0	0	4	840
4	2	1	1	0	0	0	2	840
4	1	1	1	1	1	1	1	840
5	5	0	0	0	0	0	60	3,360
5	4	1	0	0	0	0	12	3,360
5	3	2	0	0	0	0	6	3,360
5	3	1	1	0	0	0	3	3,360
5	2	2	1	0	0	0	2	3,360
5	2	1	1	1	1	1	1	3,360
6	6	0	0	0	0	0	360	30,240
6	5	1	0	0	0	0	60	30,240
6	4	2	0	0	0	0	24	30,240
6	4	1	1	0	0	0	12	30,240
6	3	3	0	0	0	0	18	30,240
6	3	2	1	0	0	0	6	30,240
6	3	1	1	1	1	1	3	30,240
6	2	2	2	0	0	0	4	30,240
6	2	2	1	1	1	1	2	30,240

Tableau 4.1

D'après ce tableau on a :  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $A = 1$ ,  $B = 4$

$$\int_{D^{ee}} w N_i dD^{ee} = w \int N_i dD^{ee} \quad i=1,2,3,4 \quad (4.40)$$

Cette intégrale est équivalente au système suivant :

$$w \int N_i dD^{ee} = \frac{w}{4} \Delta \quad i=1,2,3,4$$

(4.41)

$$\{\mathbf{B}\}^{ee} = \frac{w}{4} \Delta \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

$\{\mathbf{B}\}^{ee}$  pour l'éléments typique i,j,k,m .

Les vecteurs charge des 4 autres éléments sont obtenus de la même façon et auront la même valeur et le même ordre 4 x 1.

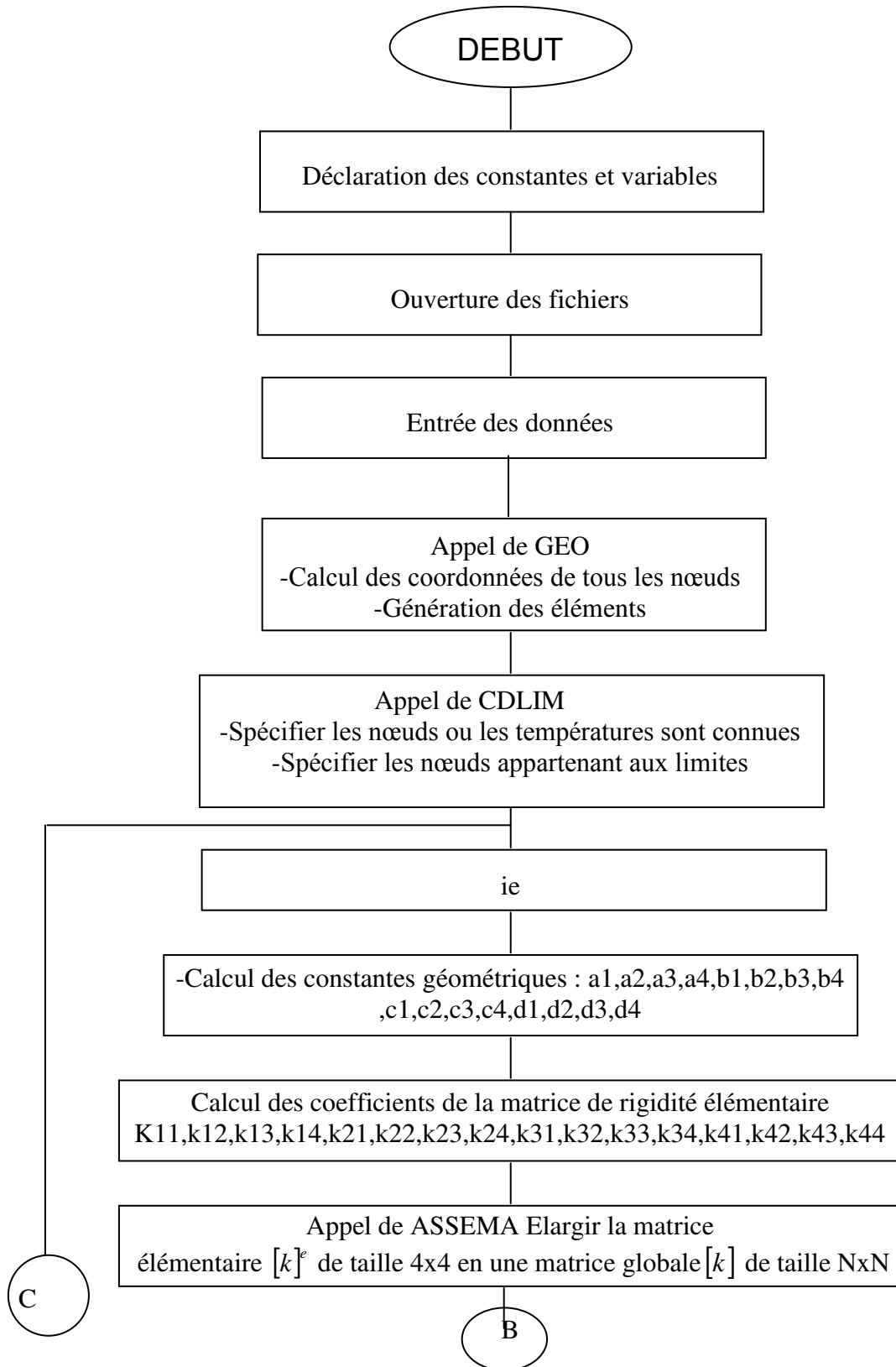
Le terme de surface est calculé en intégrant le terme suivant :

$$\int_{\Sigma^e} \left[ \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) n_x + \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) n_y + \left( k_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) n_z \right] N_i d\Sigma^e \quad (4.43)$$

Et on aura enfin :

$$\underset{N \times N}{[\mathbf{k}]}^e \underset{N \times 1}{\{\theta\}}^e = \underset{N \times 1}{\{\mathbf{B}\}}^e \quad (4.44)$$

4.3.3.5 L'organigramme



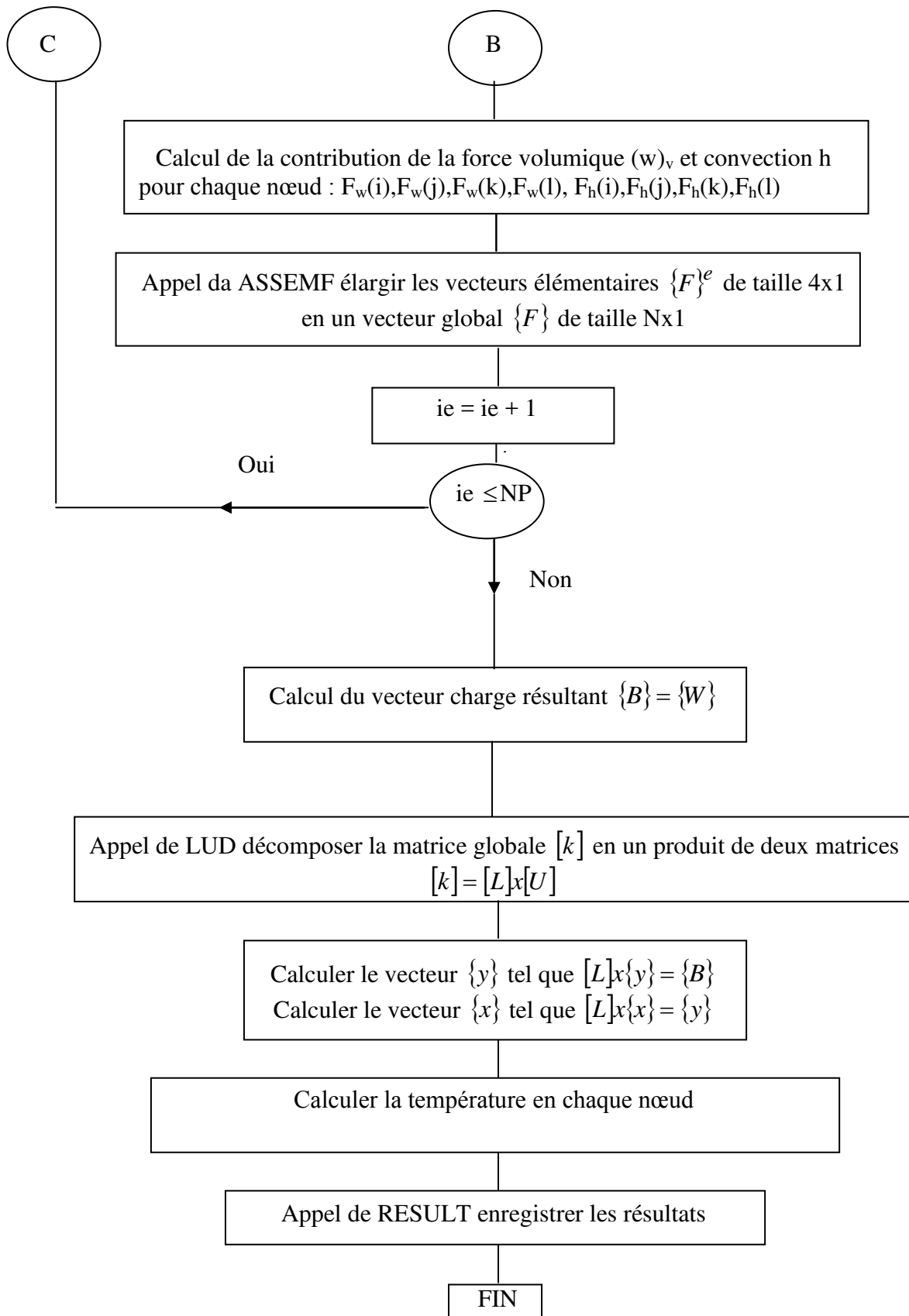


Figure 4.11 Organigramme de l’algorithme développé

**Bibliographie**

N°	Auteurs	Titre	journal	Année
1	Jean Cristophe cuillère	Introduction à la méthode des éléments finis	DUNOD	2011
2	Kenneth H.Huebner	The finit élément method for engineers	JOHN Wiley and Sons Eurl a THORNTON	1982
3	Nikishkov, Gennadiy P	Programming Finite Elements in Java	Springer-Verlag London	2010
4	S. Gockenbach.	Understanding and implementing the finite element method / Mark	the Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia,	2006
5	M. R. Eslami	Finite Elements Methods in Mechanics, 95 Solid Mechanics and Its Applications 216,	Springer International Publishing Switzerland	2014



## CHAPITRE 5 : RESULTATS ET DISCUSSION

Ce chapitre est consacré à la présentation et la discussion des résultats du calcul numérique obtenus en utilisant le programme **Heat3D**, développé en langage Fortran basé sur la méthode des éléments finis, pour résoudre l'équation de transfert de chaleur par conduction, décrite par la loi de Fourier pour un matériau anisotrope, et ce en calculant le champ de température dans le cas tridimensionnel. Le domaine d'étude est un cube de dimensions égales l'unité.

### 5.1 Effet du maillage

Dans un premier temps on a procédé à un calcul de choix du maillage. Pour cela on a choisi un solide isotrope de dimensions 1x1x1 soumis à une source de chaleur égale 1000 W/m<sup>3</sup> et échangeant avec le milieu ambiant à l'aide d'un coefficient convectif h de 20 W/°Cm<sup>2</sup> et de coefficient de conductivité thermique k de 100 W/°Cm.

On ne fait que varier la valeur du Nœud directeur (N<sub>2</sub>) de 6, 7, 8, 9, 13, Le maillage se fait automatiquement, on calcul la température dans le solide et on compare les valeurs maximales calculées, dès que la différence entre deux valeurs de températures successives devient négligeable, on opte pour le maillage correspondant, Figure (5.1.1) à Figure (5.1.5).

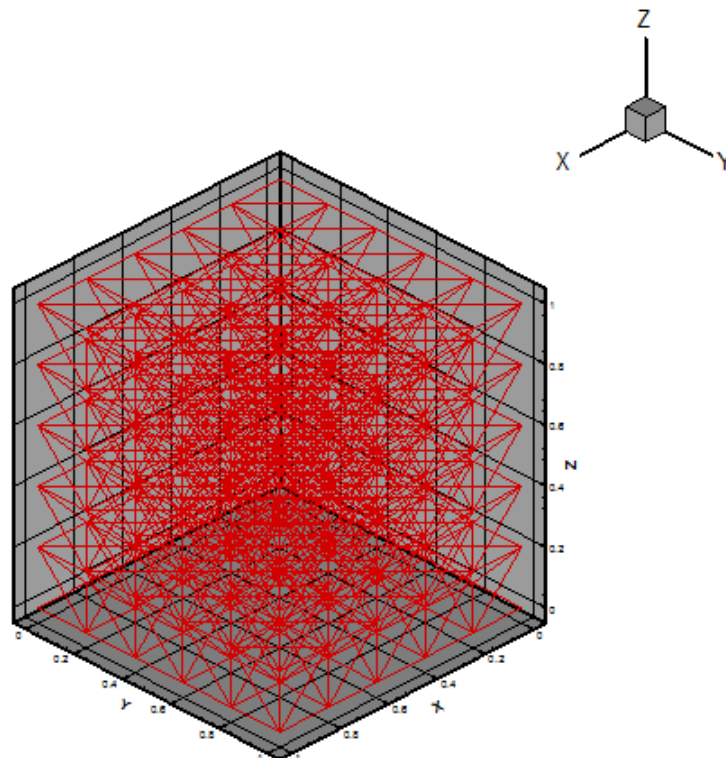


Figure 5.1.1 Maillage 6x6x6

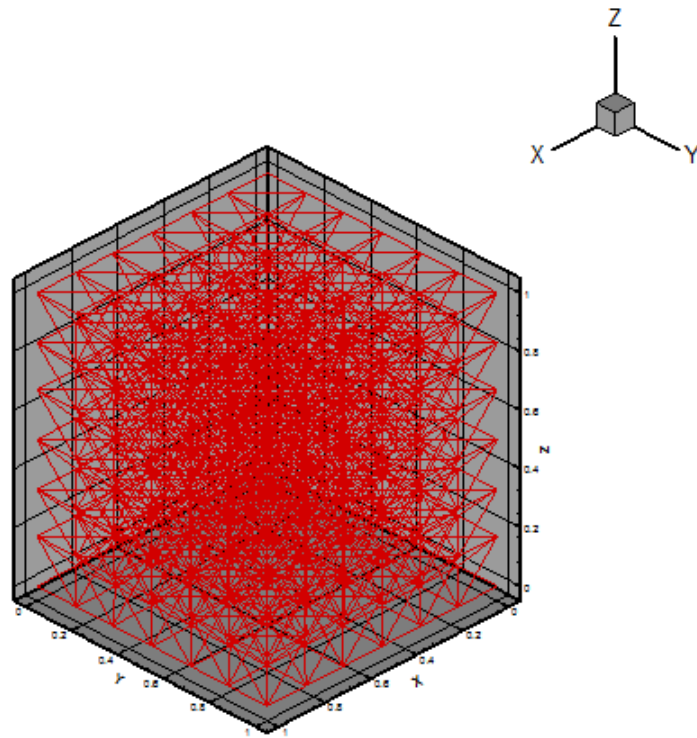


Figure 5.1.2 Maillage 7x7x7

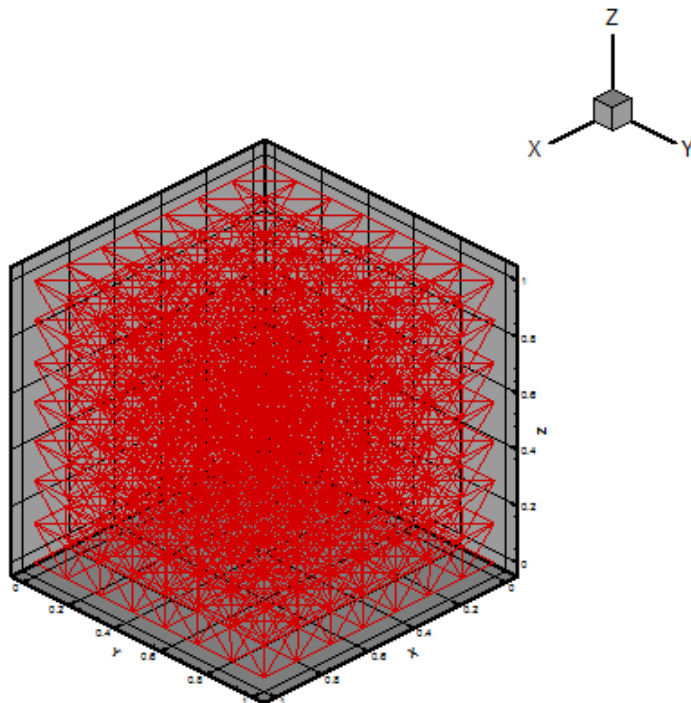


Figure 5.1.3 Maillage 8x8x8

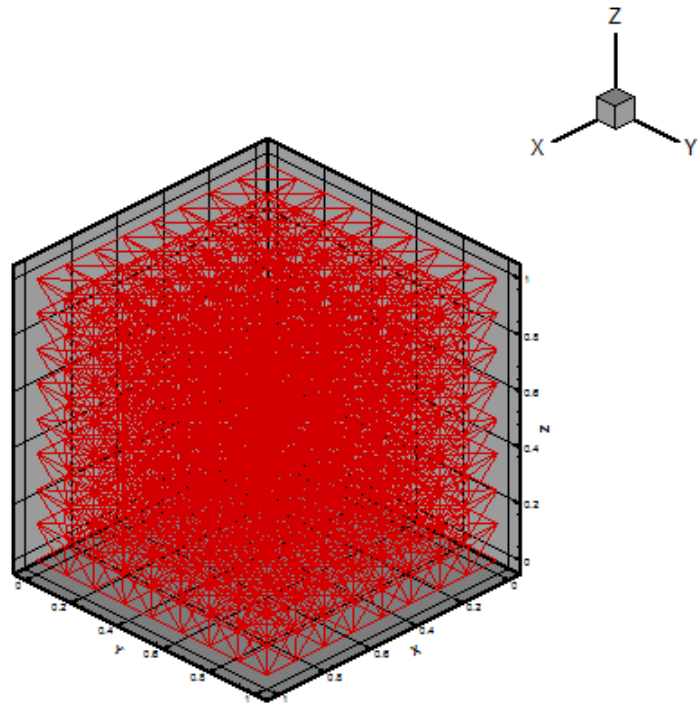


Figure 5.1.4 Maillage 9x9x9

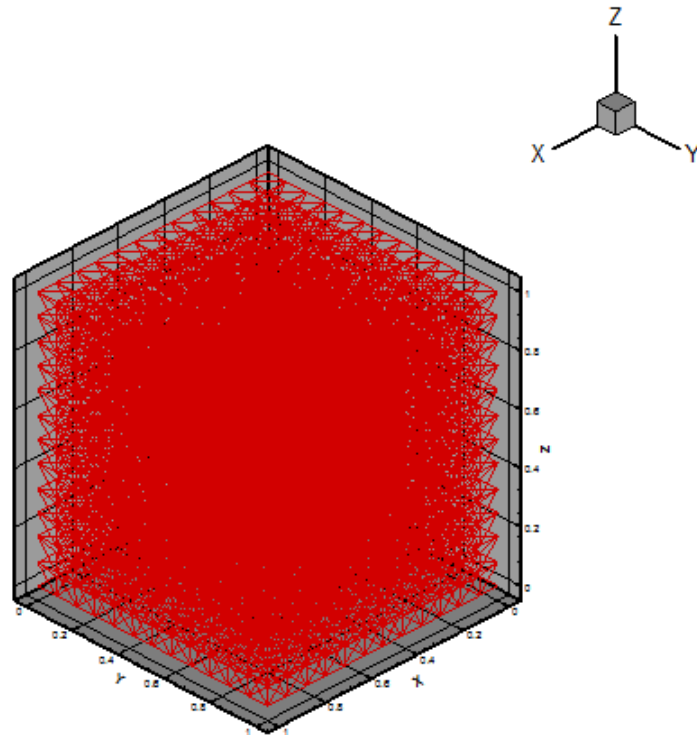


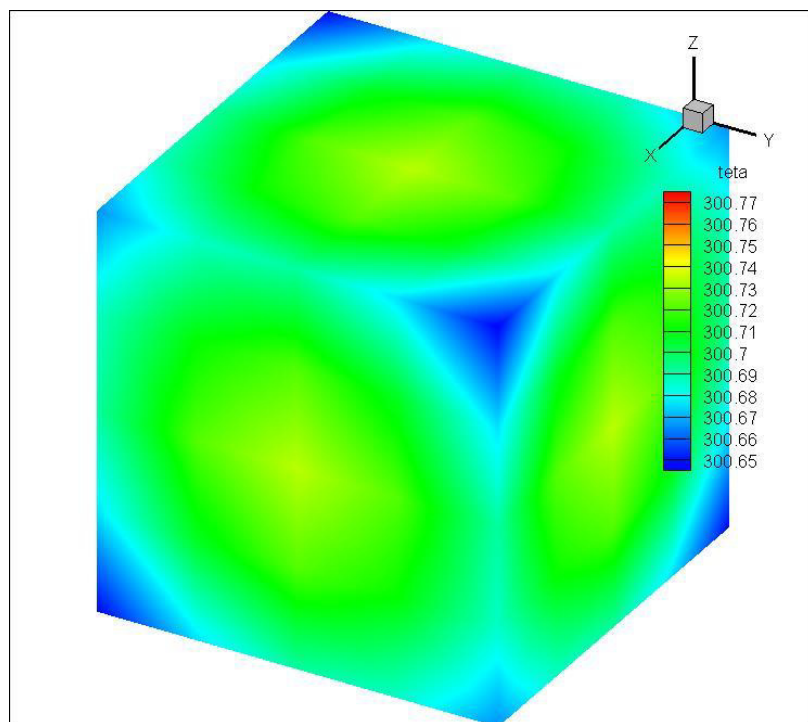
Figure 5.1.5 Maillage 13x13x13

Pour trouver le maillage convenable on a utilisé comme valeur comparative celle de la température aux nœuds directeurs n1, n2, n3, n4, n5, n6, n7 et n8. A titre d'exemple, on cite les valeurs obtenues pour le nœud n1 où la variation de température passe de  $5,3^\circ$  pour le maillage  $6 \times 6 \times 6$ , à  $3,7^\circ$  pour le maillage  $7 \times 7 \times 7$ , à  $2,7^\circ$  pour le maillage  $8 \times 8 \times 8$ , à  $2,5^\circ$  pour le maillage  $9 \times 9 \times 9$ , et  $0,95^\circ$  pour le maillage  $13 \times 13 \times 13$ .

On remarque bien l'affinement des résultats avec l'augmentation du nombre de nœuds.

## 5.2 Influence de la source de chaleur W

Sur les figures (5.2.1) à figure (5.2. 3) on a illustré l'influence de la source de chaleur volumique W sur la distribution de la température pour un tenseur de conductivité et un maillage arbitrairement choisi, en gardant les mêmes conditions aux limites, mais en faisant varier la valeur de W respectivement de 100 ; 1000 et 10000  $w/m^3$  et on remarque que les résultats sont proportionnels à la valeur de W.



**Figure 5.2.1** Champ de température pour  $W=100w/m^3$

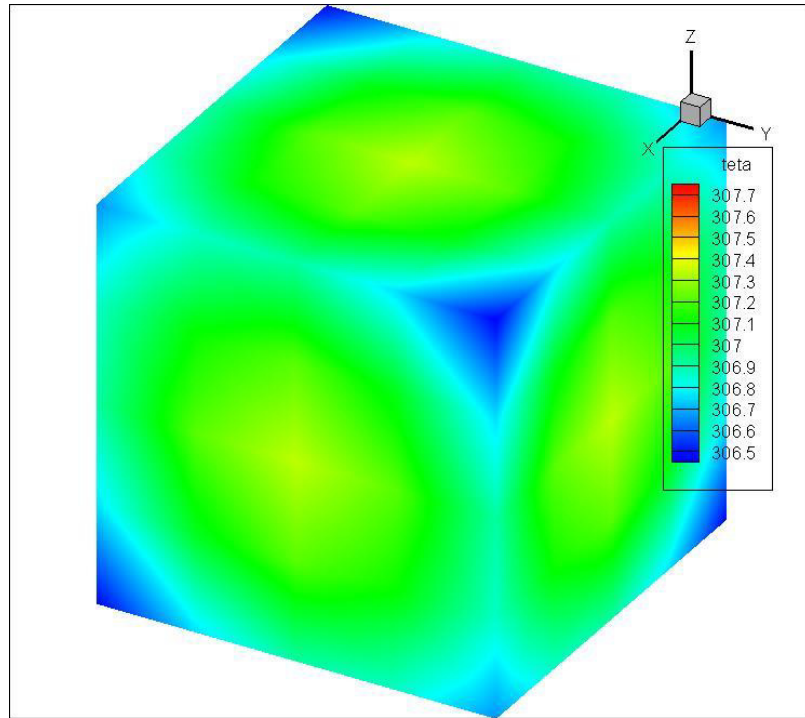


Figure 5.2.2 Champ de température pour  $W=1000\text{w/m}^3$

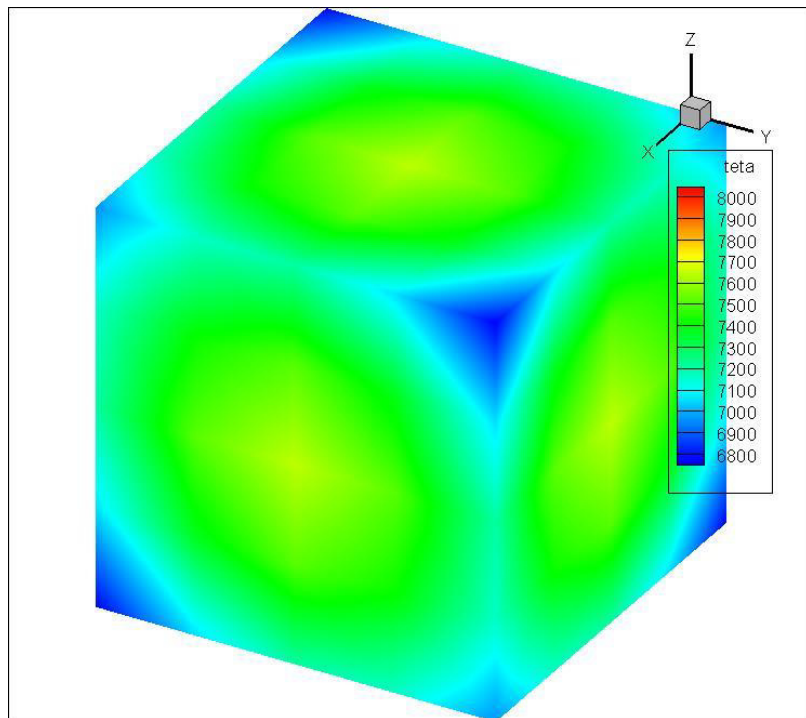


Figure 5.2.3 Champ de température pour  $W=10000\text{w/m}^3$

### 5.3 Résultats pour différents types de solide

Sur les figures 5.3.1 à figure 5.3.4 on a présenté les champs de température calculés pour chacun des systèmes cristallins pour un maillage de **721** nœuds et **2560** éléments.

#### 5.3.1 Cas du solide triclinique

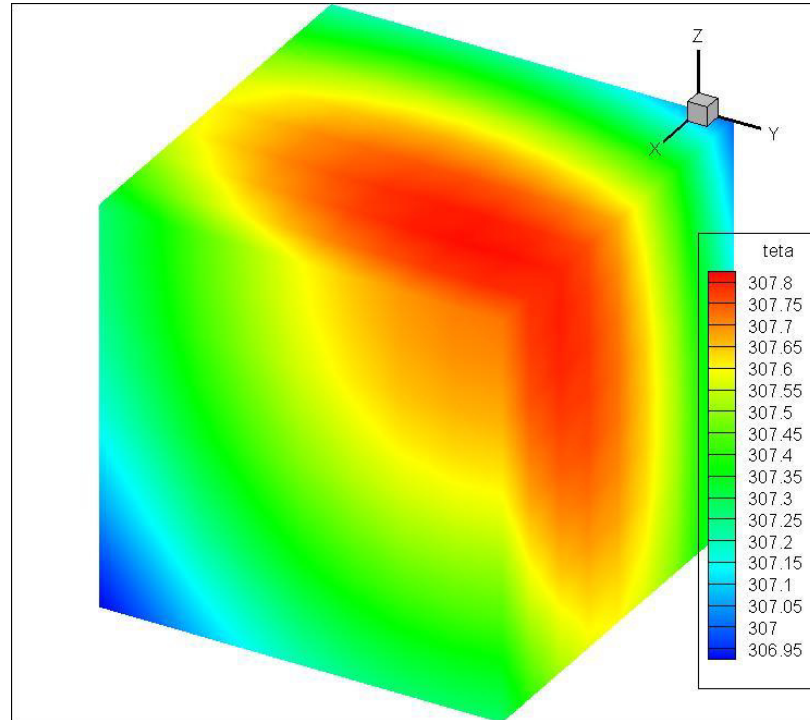


Figure 5.3.1 Champ de température pour le solide triclinique

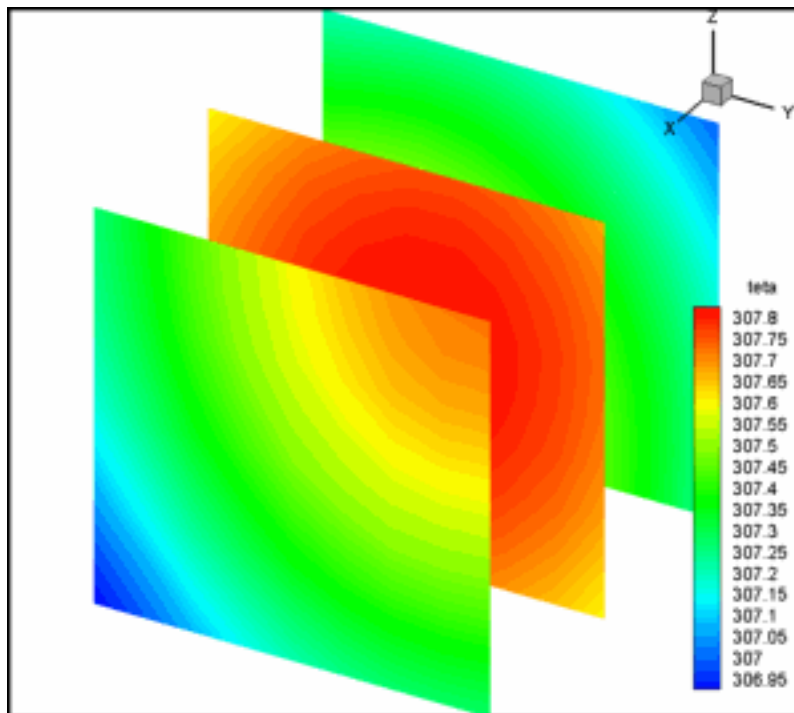


Figure 5.3.1.a Profil de température sur le plan YZ

La figure 5.3.1 est une représentation 3D du profil de température dans le solide triclinique. La température minimale dans le domaine est de  $306,95^\circ$  et celle maximale est de  $307,1^\circ$ . On remarque bien que l'allure de la variation est différente d'un plan à l'autre suivant la même direction ; pour ce la nous avons opté pour une représentation 2D de la température sur le plan YZ pour trois positions différentes ( $x=0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1$ ) figure 5.3.1.a.

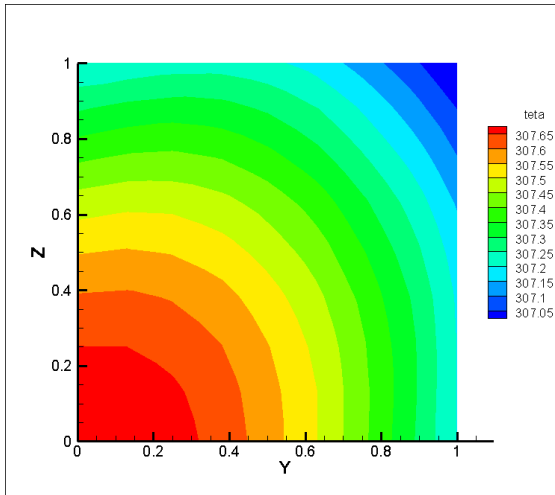


Figure 5.3.1.a1 Profil pour  $x=0$

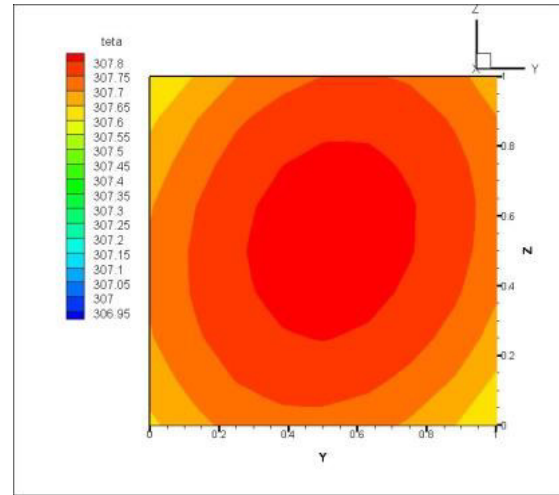


Figure 5.3.1.a2 Profil pour  $x=0.5$

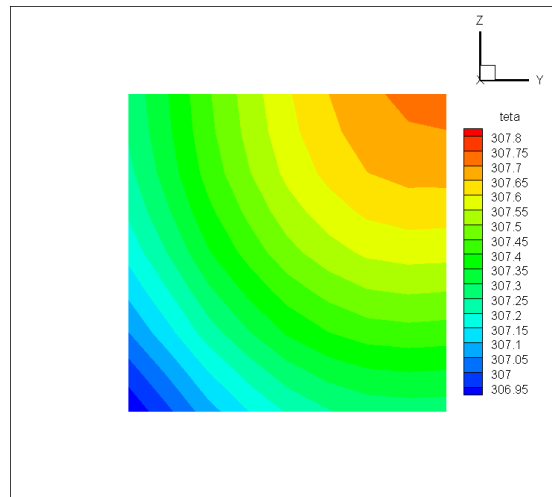


Figure 5.3.1.a3 Profil pour  $x=1$

Cette représentation est détaillée dans les figures Figure 5.3.1.a1 ; Figure 5.3.1.a2 et Figure 5.3.1.a3 respectivement. La variation des températures est nettement différentes qualitativement et quantitativement pour chacune des positions. La température est maximale au point de coordonnées ( $y=1$ ,  $z=1$ ) et minimale au point de coordonnées ( $y=0$ ,  $z=0$ ) pour  $x=0$  Figure 5.3.1.a1; elle est par contre maximale au point de coordonnées ( $y=1$ ,  $z=1$ ) et

minimale au point de coordonnées  $(y=0, z=0)$  pour  $x=1$  Figure 5.3.1.a3, enfin elle maximale au point de coordonnées  $(y=0.5, z=0.5)$  et minimale au point de coordonnées  $(y=0, z=1)$  ou  $(y=1, z=0)$  pour  $x=0.5$  Figure 5.3.1.a2. On remarque aussi que la température est symétrique par rapport à la diagonale du plan YZ.

Une deuxième représentation de la température en 2D sur le plan XZ est illustrée par la figure 5.3.1.b ci-dessous pour trois positions différentes ( $y=0, y=0.5$  et  $y=1$ ).

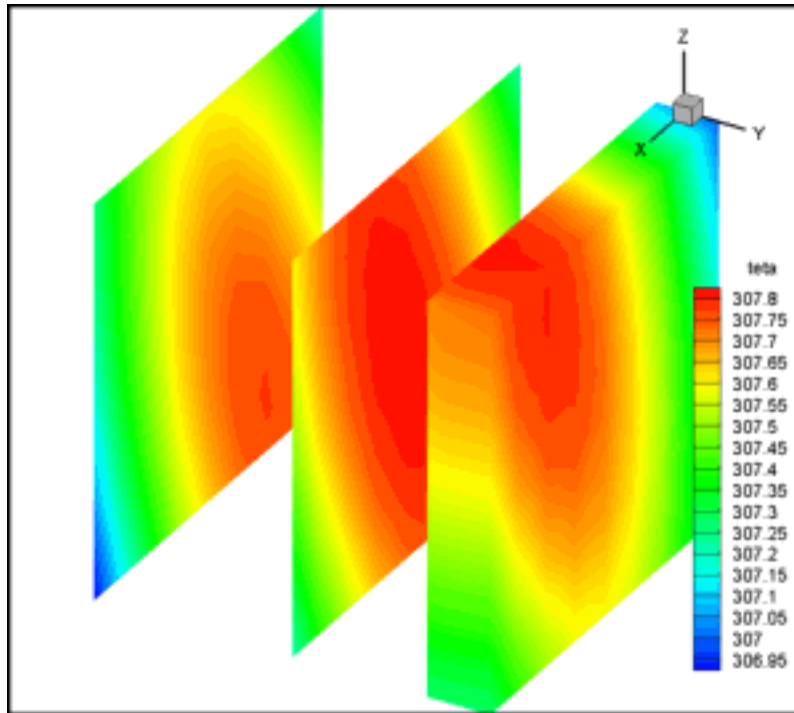


Figure 5.3.1.b Profil de température sur le plan XZ

Cette représentation est détaillée dans les figures Figure 5.3.1.b1 ; Figure 5.3.1.b2 et Figure 5.3.1.b3 respectivement.

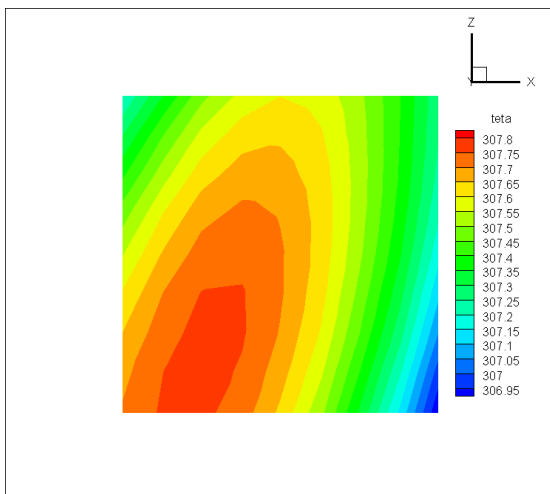


Figure 5.3.1.b1 Profil pour  $y=0$

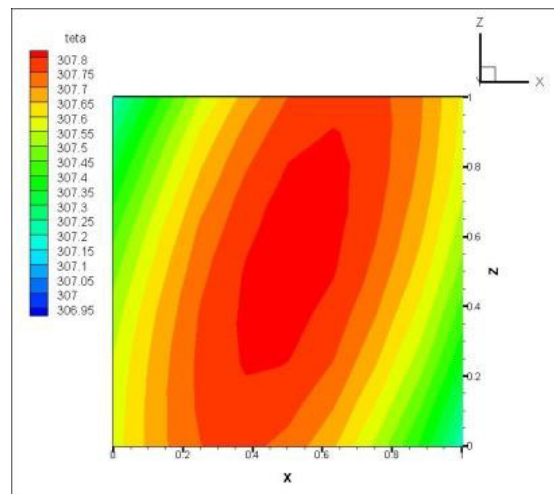
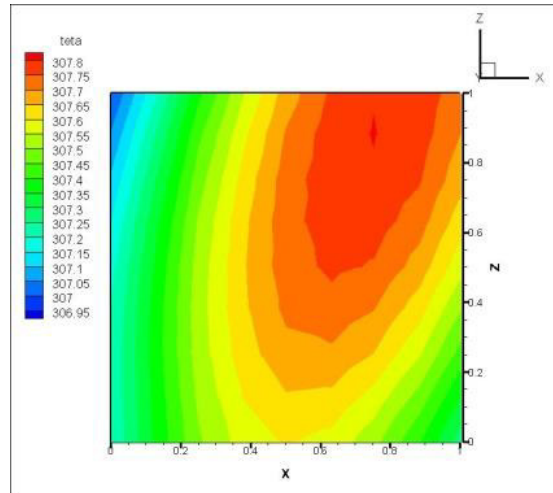
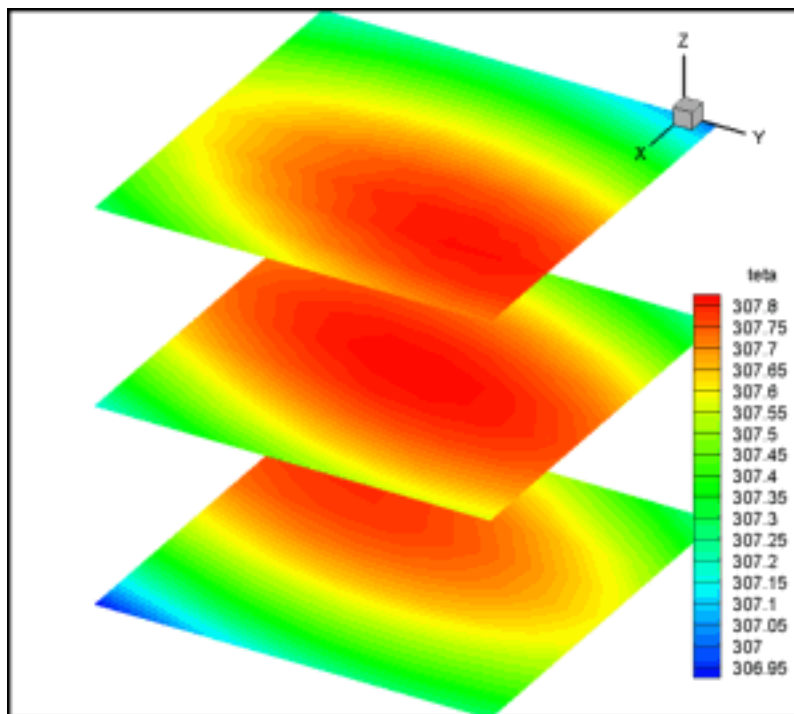


Figure 5.3.1.b2 Profil pour  $y=0.5$



**Figure 5.3.1.b3** Profil pour  $y=1$

Là aussi, on remarque la différence qualitative et quantitative des variations des températures pour chacune des positions. La température est minimale au point de coordonnées  $(x=1, z=0)$  pour  $y=0$  Figure 5.3.1.b1; elle est par contre minimale au point de coordonnées  $(x=0, z=1)$  pour  $y=1$  Figure 5.3.1.b3, elle maximale au point de coordonnées  $(x=0.5, z=0.5)$  et minimale aux points de coordonnées  $(x=0, z=1)$  ou  $(x=1, z=0)$  pour  $y=0.5$  Figure 5.3.1.b2. Dans ce cas on remarque que la symétrie est perdue pour les trois positions  $y=0$ ,  $y=0.5$  et  $y=1$ .



**Figure 5.3.1.c** Profile de température sur le plan XY

Une troisième représentation de la température en 2D sur le plan XY est illustrée par la figure 5.3.1.c ci-dessus pour trois positions différentes ( $z=0$ ,  $z=0.5$  et  $z=1$ ).

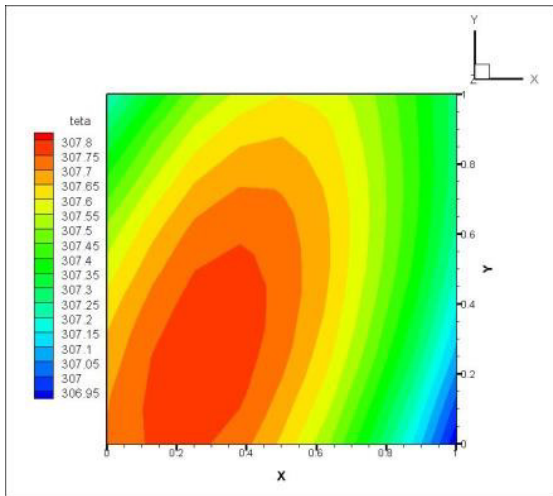


Figure 5.3.1.c1 Profil pour  $z=0$

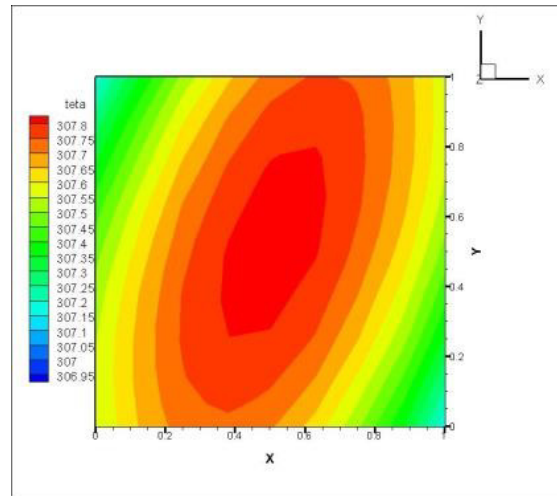


Figure 5.3.1.c2 Profil pour  $z=0.5$

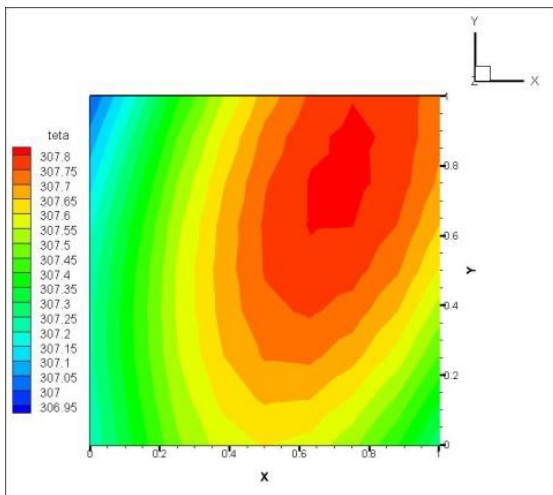


Figure 5.3.1.c3 Profil pour  $z=1$

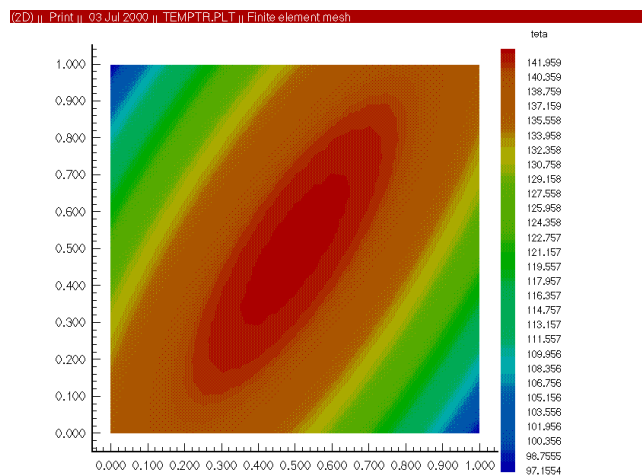


Figure 5.3.1.c4 Profil 2D [10]

Pour le plan XY, la température est minimale au point de coordonnées  $(x=1, y=0)$  pour  $z=0$  Figure 5.3.1.c1; elle est par contre minimale au point de coordonnées  $(x=0, y=1)$  pour  $z=1$  Figure 5.3.1.c3, elle maximale au point de coordonnées  $(x=0.5, y=0.5)$  et minimale aux points de coordonnées  $(x=0, y=1)$  ou  $(x=1, y=0)$  pour  $z=0.5$  Figure 5.3.1.c2. Là encore le profil ne présente aucune symétrie.

Les résultats illustrés sur la figure 5.3.1.c2 du plan XY pour la position  $z=0.5$  se concordent bien avec ceux obtenus par le modèle 2D (Annexe 2) figure 5.3.1.c4 concernant le solide triclinique.

### 5.3.2 Cas du solide monoclinique

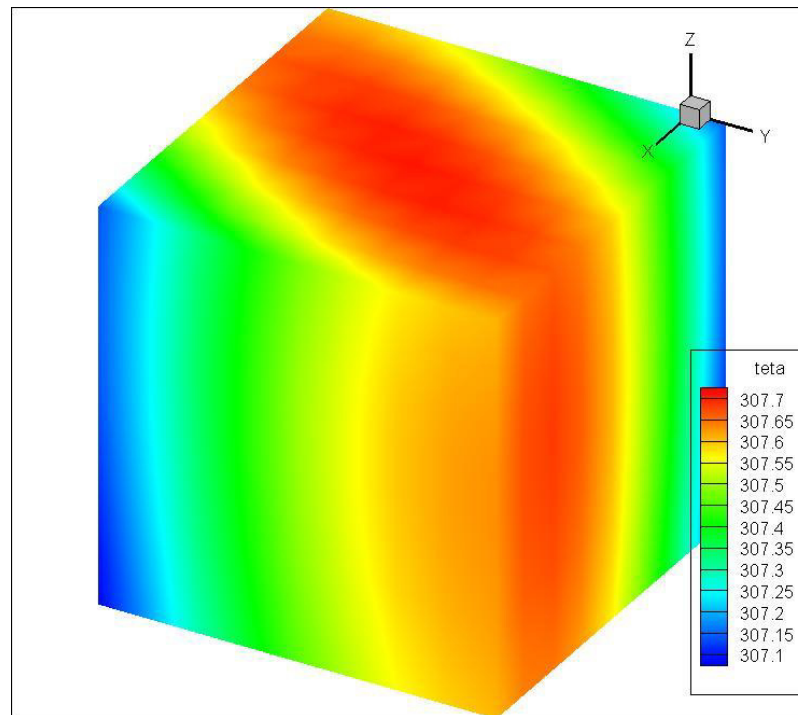


Figure 5.3.2 Champ de température pour le solide monoclinique

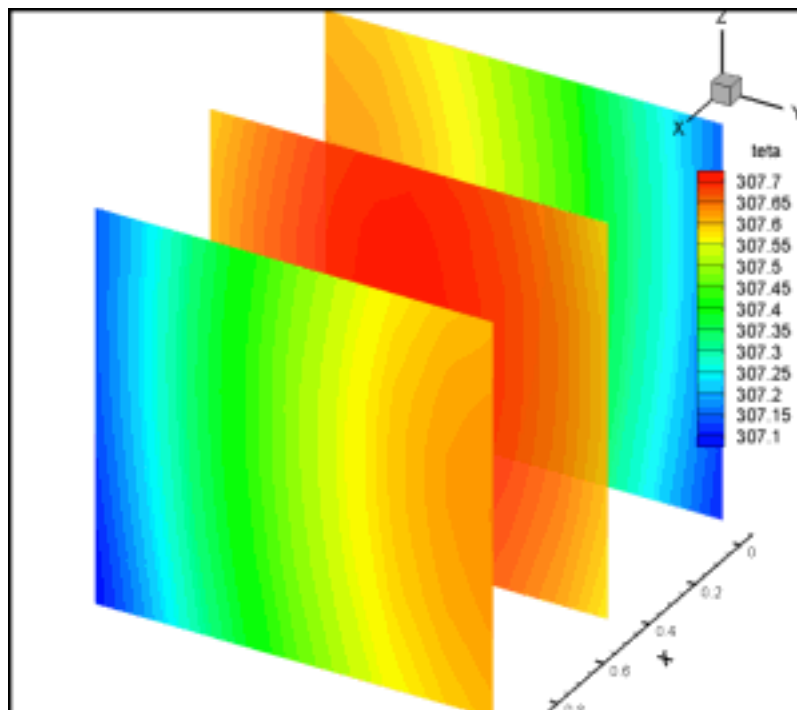


Figure 5.3.2.a Profile de température sur le plan YZ

La figure 5.3.2 est une représentation 3D du profil de température dans le solide monoclinique. La température minimale dans le domaine est de  $307,1^{\circ}$  et celle maximale est de  $307,7^{\circ}$ . On remarque bien que l'allure de la variation est différente d'un plan à l'autre suivant la même direction, en plus elle diffère de celle du solide triclinique déjà illustré ; pour ce la nous avons aussi procédé à une représentation 2D de la température sur le plan YZ pour trois positions différentes ( $x=0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1$ ) figure 5.3.2.a.

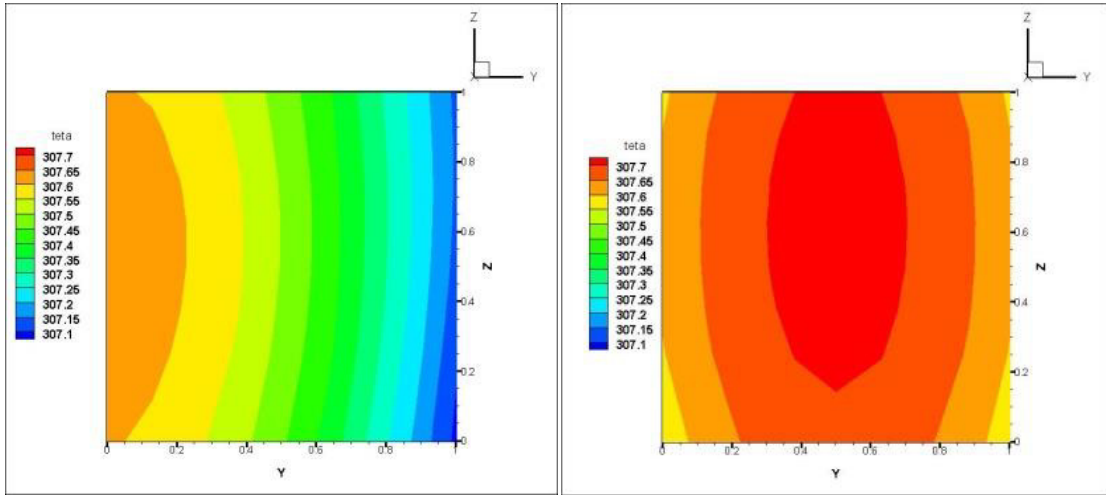


Figure 5.3.2.a1 Profil pour  $x=0$

Figure 5.3.2.a2 Profil pour  $x=0.5$

Cette représentation est détaillée dans les figures Figure 5.3.2.a1 ; Figure 5.3.2.a2 et Figure 5.3.2.a3 respectivement. La variation des températures est nettement différentes qualitativement et quantitativement pour chacune des positions. La température est maximale au voisinage des points de coordonnées ( $y=0$  à  $0,2$  ;  $z=0$  à  $1$ ) et elle est minimale au point de coordonnées ( $y=1$ ,  $z=0$  à  $1$ ) pour  $x=0$  Figure 5.3.2.a1; elle est par contre maximale au voisinage des points de coordonnées ( $y=0,8$  à  $1$  ;  $z=0$  à  $1$ ) et elle est minimale au point de coordonnées ( $y=0$  à  $0,2$  ;  $z=0$  à  $1$ ) pour  $x=1$  Figure 5.3.2.a3, enfin elle maximale au centre du domaine et elle est minimale dans la zone des points de coordonnées ( $y=0$  à  $0,075$  ;  $z=0$  à  $0,25$ ) ou ( $y=0,95$  à  $1$  ;  $z=0$  à  $0,25$ ) pour  $x=0.5$  Figure 5.3.2.a2. Dans ce cas on remarque une symétrie du champs de température par rapport à l'axe  $z=0,5$  pour les positions  $x=0$  et  $x=1$ , mais une symétrie par rapport à  $y=0,5$  pour la position  $x=0,5$ .

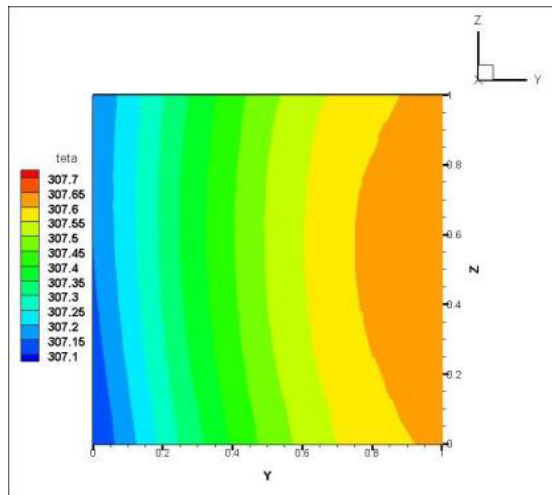


Figure 5.3.2.a3 Profil pour  $x=1$

Une deuxième représentation de la température en 2D sur le plan XZ est illustrée par la figure 5.3.2.b ci-dessous pour trois positions différentes ( $y=0$ ,  $y=0.5$  et  $y=1$ ).

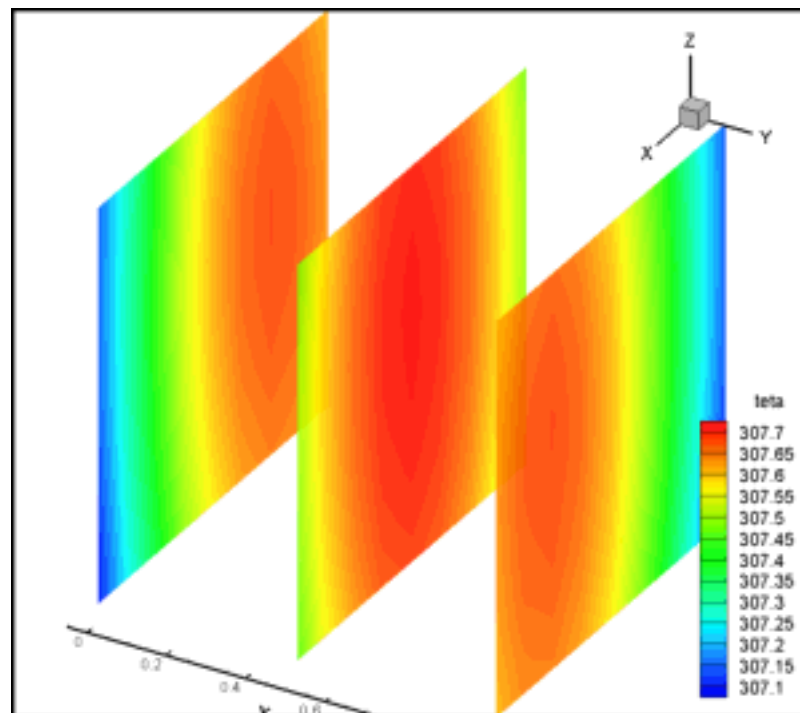


Figure 5.3.2.b Profile de température sur le plan XZ

Cette représentation est détaillée ci-dessous dans les figures : Figure 5.3.2.b1 ; Figure 5.3.2.b2 et Figure 5.3.2.b3 respectivement.

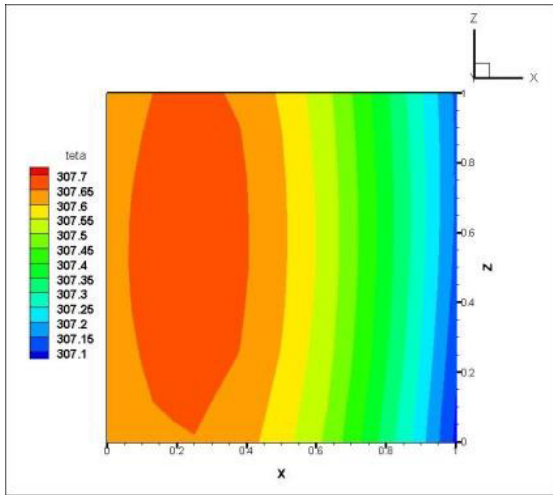


Figure 5.3.2.b1 Profil pour  $y=0$

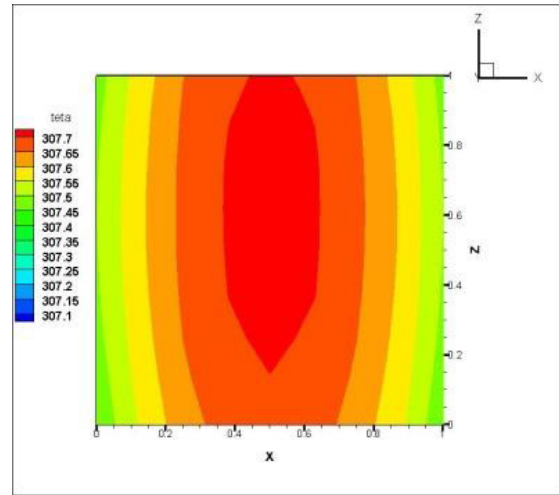


Figure 5.3.2.b2 Profil pour  $y=0.5$

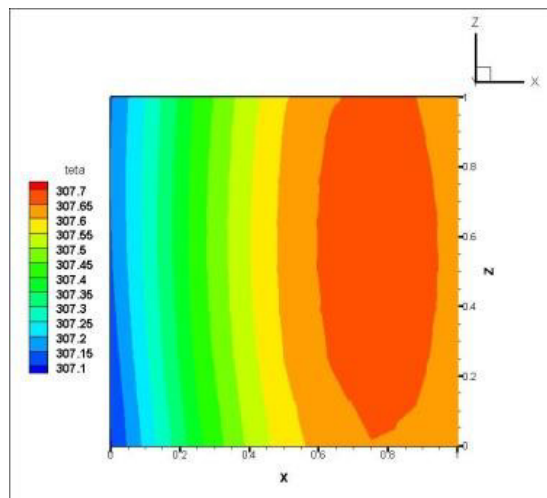


Figure 5.3.2.b3 Profil pour  $y=1$

Dans ce cas, le profil de la température pour les positions  $y$  présente une certaine ressemblance avec celui pour les positions  $x$ . Qualitativement, la température est minimale au point de coordonnées  $(x=1, z=0)$  pour  $y=0$  Figure 5.3.2.b1; elle est par contre minimale au point de coordonnées  $(x=0, z=1)$  pour  $y=1$  Figure 5.3.2.b3. Sur la figure 5.3.2.b2 la température est maximale au point de coordonnées  $(x=0.5, z=0.5)$  et elle est minimale aux points de coordonnées  $(x=0, z=0)$ ;  $(x=1, z=0)$ ;  $(x=0, z=1)$  et  $(x=1, z=1)$  pour  $y=0.5$ . Dans cette position on a une symétrie par rapport à l'axe  $x=0.5$ .

La figure 5.3.2.c est la troisième représentation du champ de température en 2D sur le plan XY illustrée pour trois positions différentes ( $z=0$ ,  $z=0.5$  et  $z=1$ ).

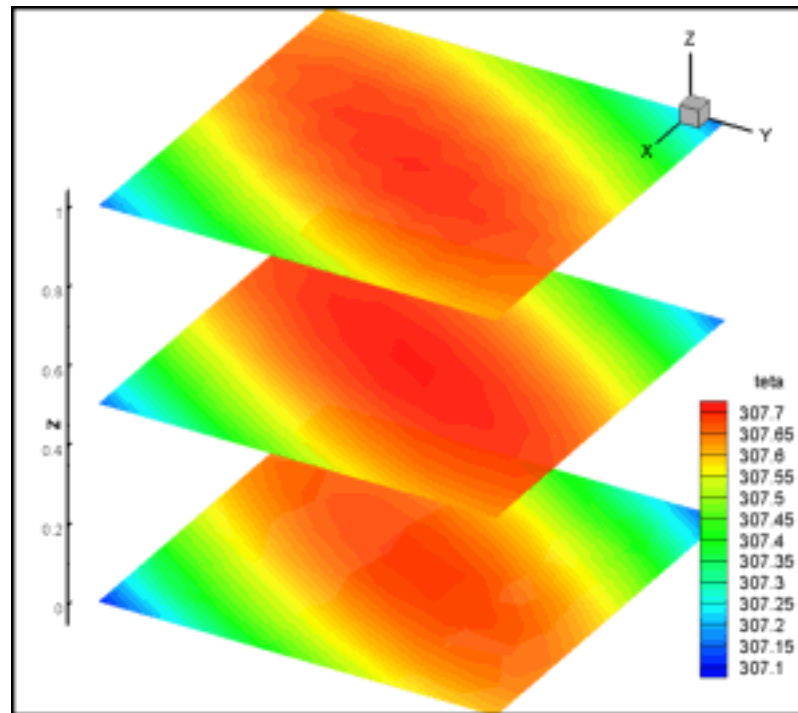


Figure 5.3.2.c Profile de température sur le plan XY

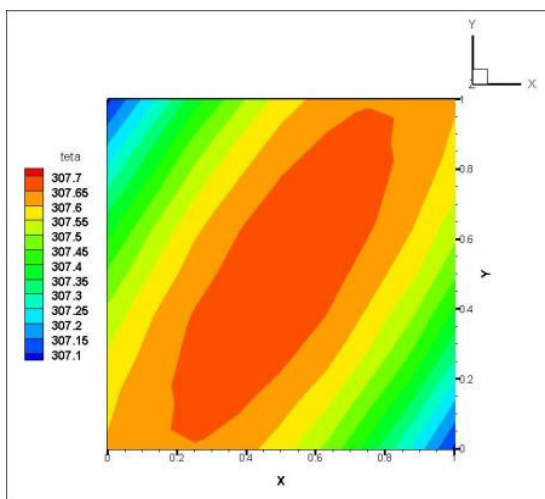


Figure 5.3.2.c1 Profil pour  $z=0$

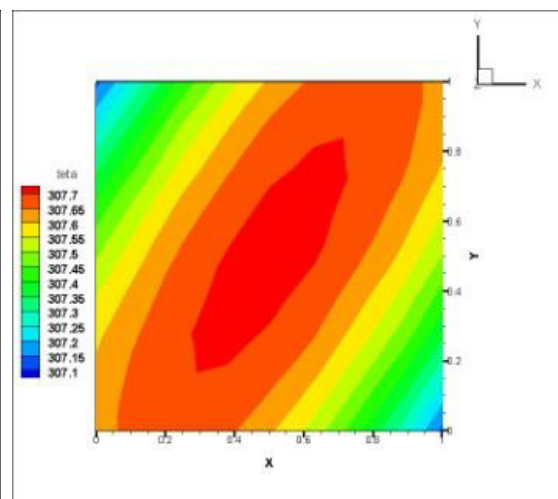


Figure 5.3.2.c2 Profil pour  $z=0.5$

Pour le plan XY, le profil de la température est nettement différent de celui pour les plans YZ et XZ illustrés dans la section précédente ; mais il est semblable pour les trois positions  $z=0$  figure 5.3.2.c1,  $z=0.5$  figure 5.3.2.c2 et  $z=1$  figure 5.3.2.c3. La température est minimale aux points de coordonnées  $(x=0, y=1)$  et  $(x=1, y=0)$  et elle est maximale au centre du domaine pour les trois positions  $z=0$ ,  $z=0.5$  et  $z=1$ . La figure 5.3.2.c2 confirme les résultats présentés sur la figure 5.3.2.c4 réalisés par le modèle 2D (Annexe 2) pour le solide monoclinique.

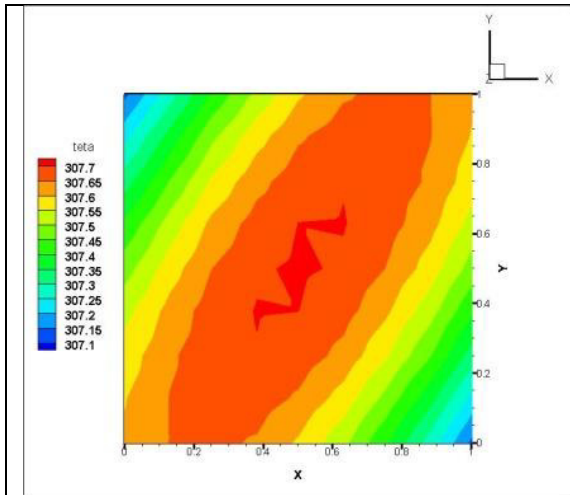


Figure 5.3.2.c3 Profil pour  $z=1$

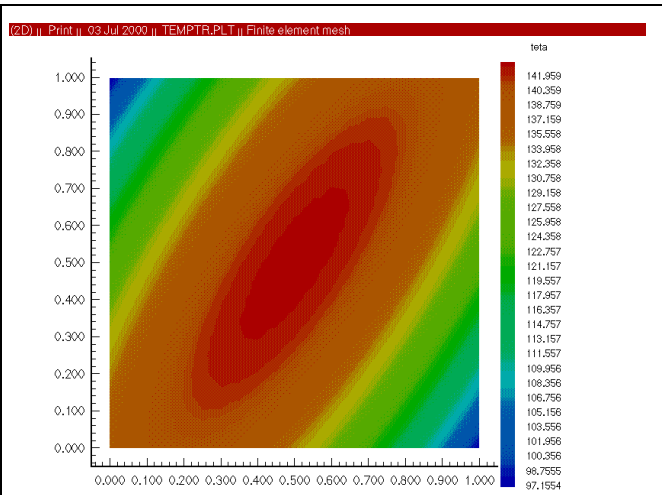


Figure 5.3.2.c4 Profil 2D[10]

### 5.3.3 Cas du solide orthorhombique

La figure 5.3.3 est une illustration du profil de température dans le solide orthorhombique. La température minimale dans le domaine est de  $307,45^\circ$  et celle maximale est de  $307,58^\circ$ . Le Profil est nettement différent des deux cas de solides exposés dans les sections précédentes.

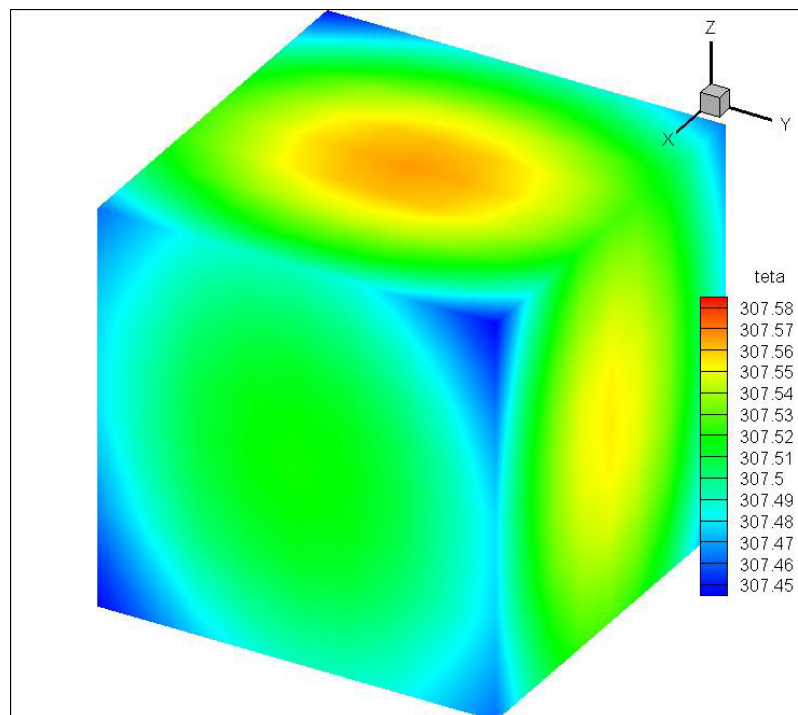


Figure 5.3.3 Champ de température pour le solide orthorhombique

Pour mettre en évidence la variation du profil suivant différentes directions nous avons utilisé une représentation 2D de la température sur le plan YZ pour trois positions différentes ( $x=0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1$ ) figure 5.3.1.a.

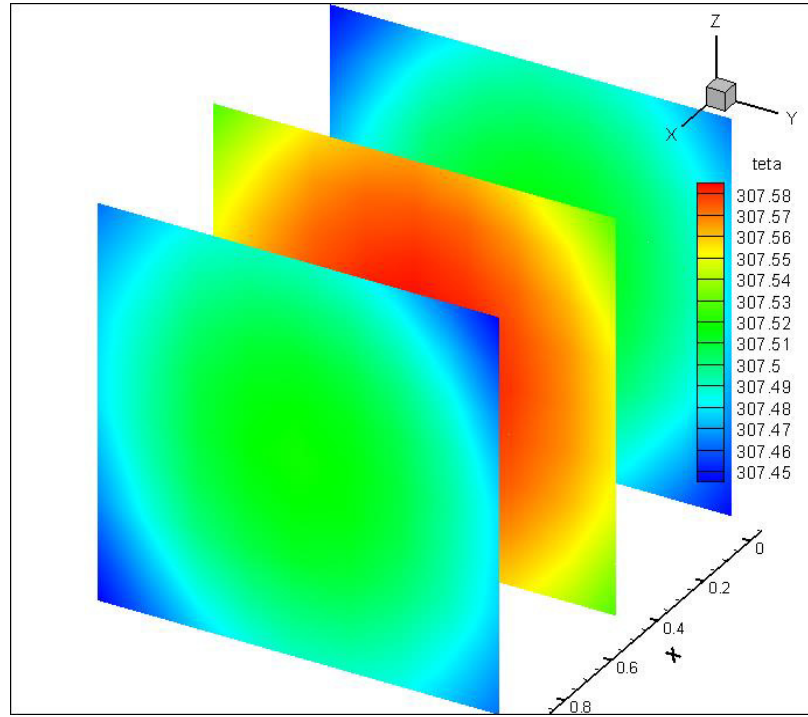


Figure 5.3.3.a Profil de température sur le plan YZ

Cette représentation est détaillée sur les figures 5.3.3.a.1, figure 5.3.3.a.2, figure 5.3.3.a.3 ci après.

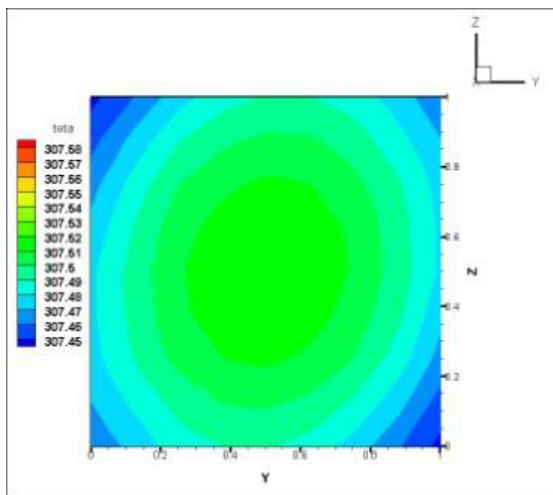


Figure 5.3.3.a1 Profil pour  $x=0$

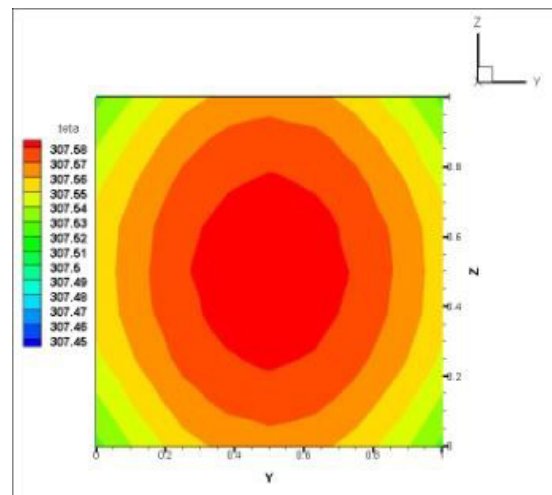


Figure 5.3.3.a2 Profil pour  $x=0.5$

Qualitativement le profil de température paraît semblable sur le plan YZ pour les trois positions  $x=0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1$  ; mais quantitativement on remarque sur la figure 5.3.3.a1 que le minimum de température se trouve aux points  $(y=1, z=0)$  et  $(y=0, z=1)$  pour  $x=0$  par contre sur la figure 5.3.3.a.3 le minimum de température se trouve aux points  $(y=0, z=0)$  et  $(y=1, z=1)$  pour  $x=1$ . Sur la figure 5.3.3.a.2 le minimum se trouve aux quatre sommets du domaine.

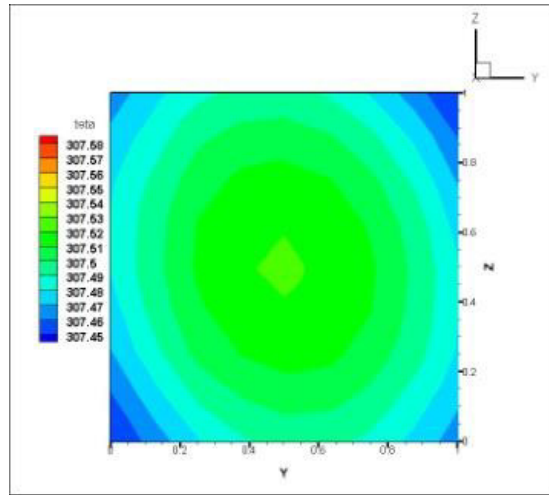


Figure 5.3.3.a3 Profil pour  $x=1$

De même, une représentation 2D est dédiée au plan XZ pour les positions  $y=0$ ,  $y=0.5$  et  $y=1$  figure 5.3.3.b.

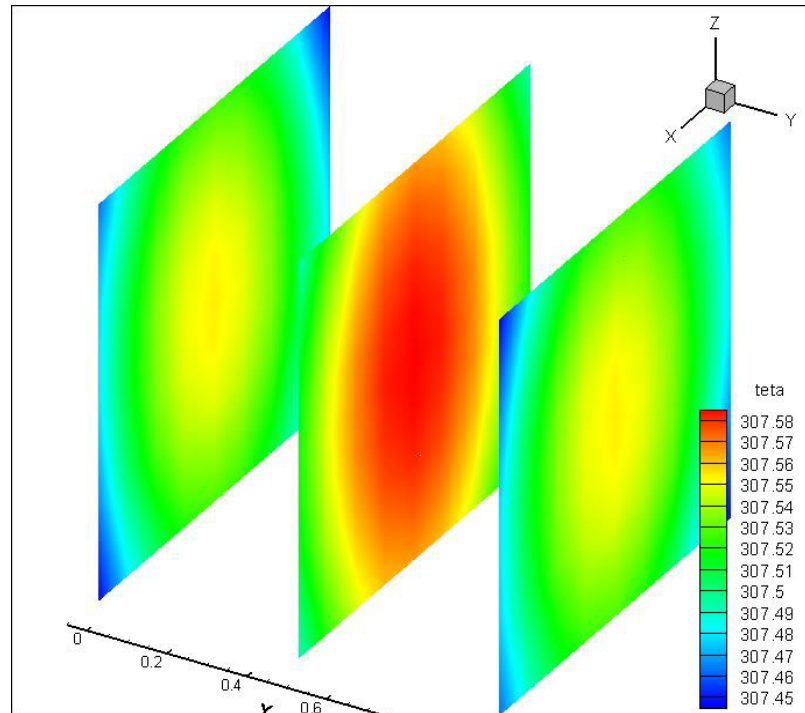


Figure 5.3.3.b Profile de température sur le plan XZ

L'allure du profil est cette fois ci différente de celle sur le plan YZ, qualitativement elle est semblable pour les trois positions  $y=0$ ,  $y=0.5$  et  $y=1$

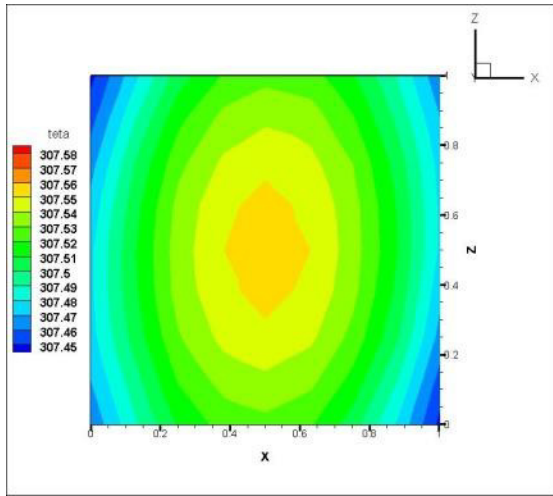


Figure 5.3.3.b1 Profil pour  $y=0$

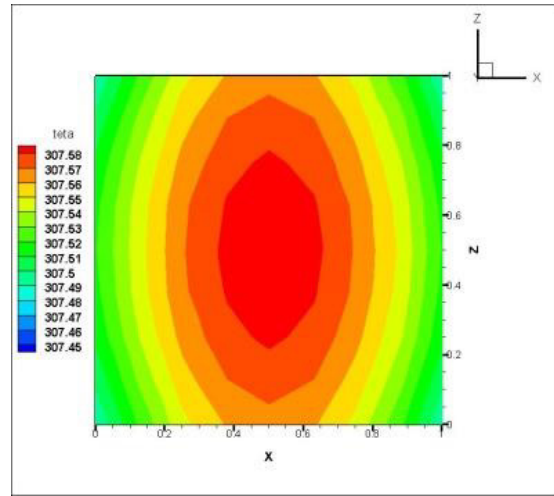


Figure 5.3.3.b2 Profil pour  $y=0.5$

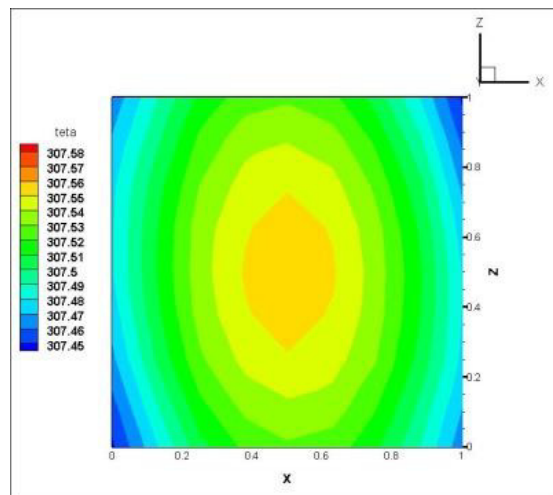


Figure 5.3.3.b3 Profil pour  $y=1$

Dans ce cas on remarque une symétrie du champ de température par rapport aux diagonales du plan XZ sur les figures 5.3.3.b1 et 5.3.3.b3 et par rapport aux plans  $x=0.5$  et  $z=0.5$  sur la figure 5.3.3.b2.

La figure 5.3.3.c illustre la variation de température sur le plan XY pour les positions  $z=0$ ,  $z=0.5$  et  $z=1$ . Cette variation représentée sur les figures 5.3.3.c1, 5.3.3.c2 et 5.3.3.c3 est qualitativement comparable avec celle du plan YZ décrite dans la section précédente.

En fin ; sur la figure 5.3.3.c2 on remarque une bonne concordance avec le résultat obtenu par le modèle 2D de la figure 5.3.3.c4 (Annexe 2) effectué pour le solide orthorhombique.

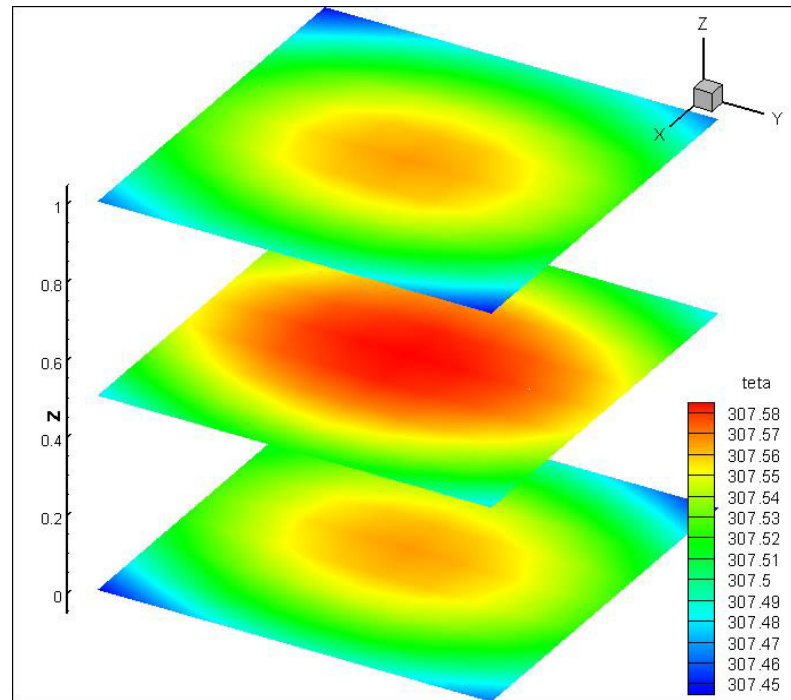


Figure 5.3.3.c Profil de température sur le plan XY

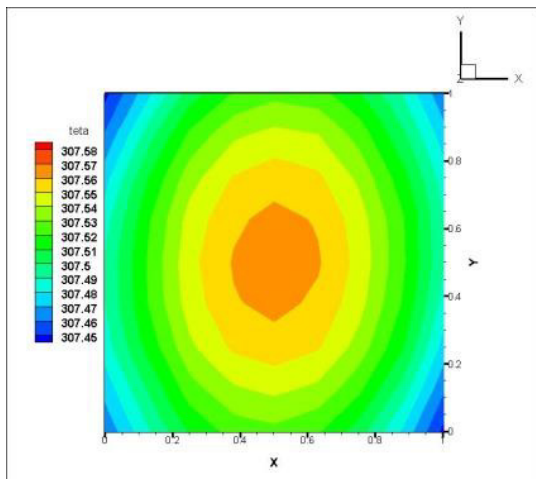


Figure 5.3.3.c1 Profil pour z=0

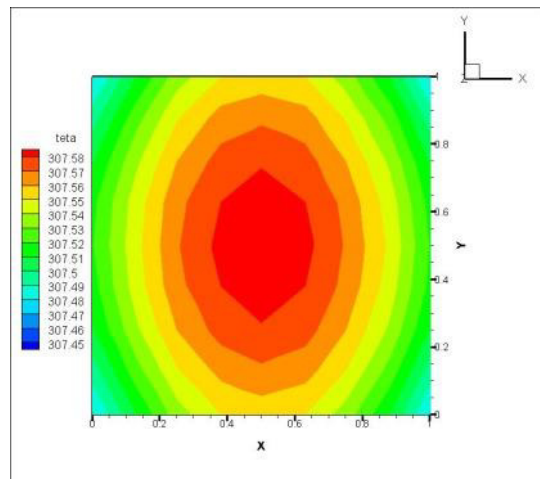


Figure 5.3.3.c2 Profil pour z=0.5

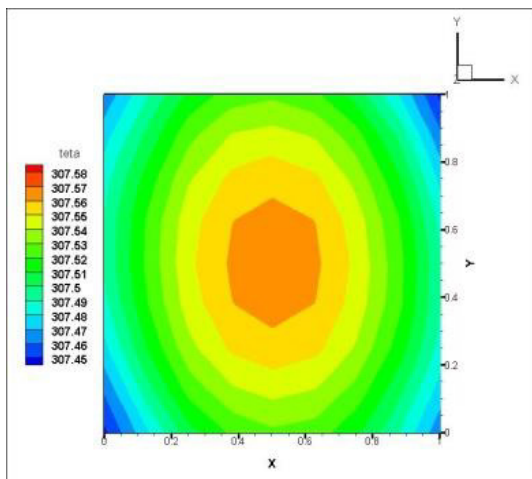


Figure 5.3.3.c3 Profil pour z=1

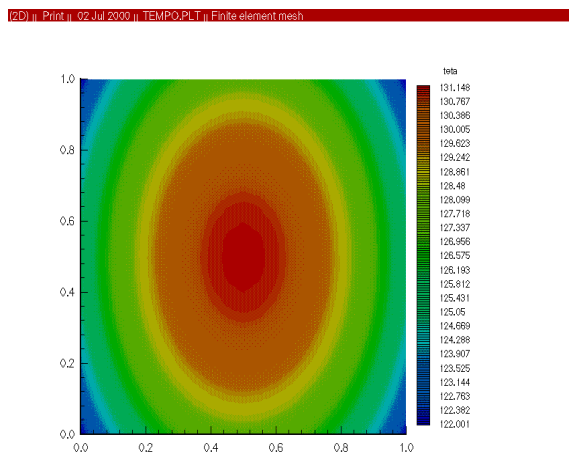


Figure 5.3.3.c4 Profil 2D [10]

### 5.3.4 Cas du solide trigonal

Finalement nous présentons sur la figure 5.3.4 les résultats de calcul effectués pour le cas du solide trigonal en 3D, dans ce cas la température varie de  $307,43^{\circ}$  à  $307,61^{\circ}$ .

Les résultats dans ce cas sont proches de ceux du cas du solide orthorhombique.

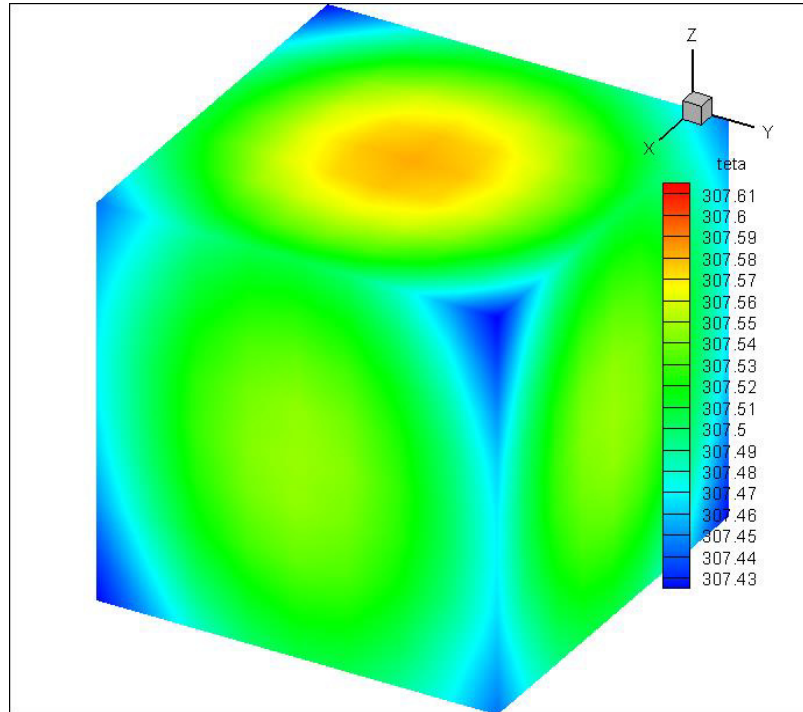


Figure 5.3.4 Champ de température pour le solide trigonal

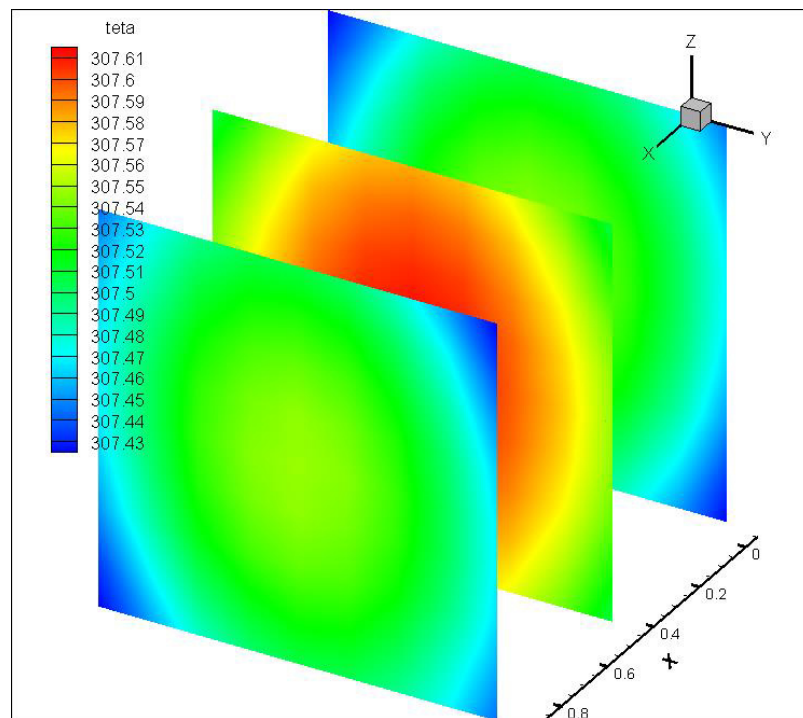


Figure 5.3.4.a Profil de température sur le plan YZ

La représentation détaillée des résultats obtenus pour le plan YZ concernant les positions  $x=0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1$  figure 5.3.4.a est illustrés sur les figures 5.3.3.a.1, figure 5.3.3.a.2, figure 5.3.3.a.3 ci après.

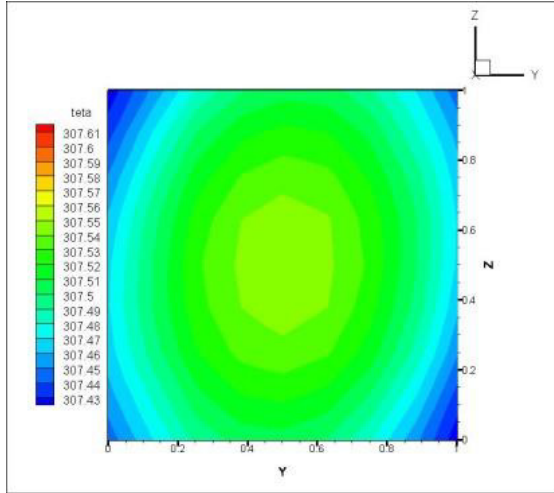


Figure 5.3.4.a1 Profil pour  $x=0$

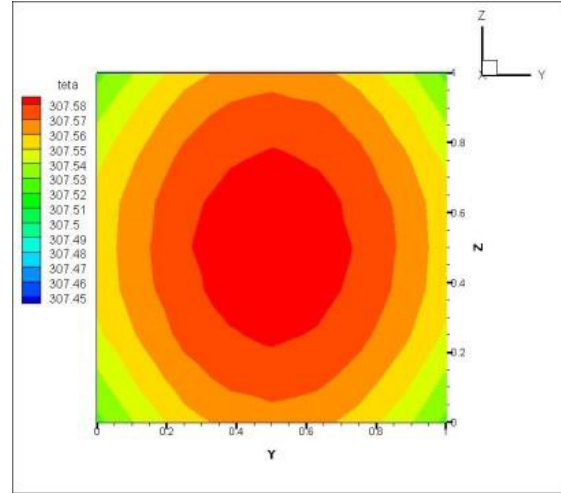


Figure 5.3.4.a2 Profil pour  $x=0.5$

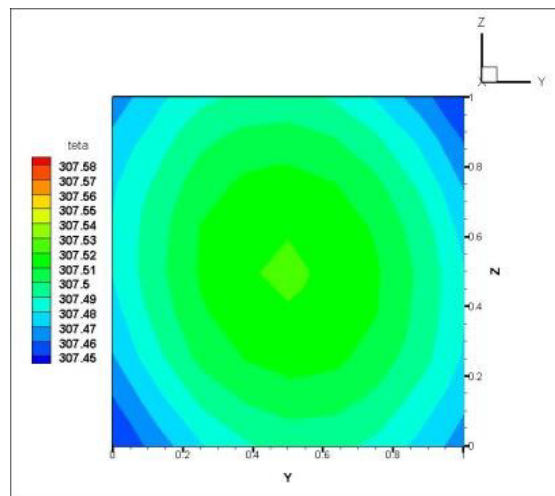


Figure 5.3.4.a3 Profil pour  $x=1$

Là aussi qualitativement le profil de température paraît semblable sur le plan YZ pour les trois positions  $x=0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1$  ; mais quantitativement on remarque sur la figure 5.3.4.a1 que le minimum de température se trouve aux points  $(y=1, z=0)$  et  $(y=0, z=1)$  pour  $x=0$  par contre sur la figure 5.3.4.a.3 le minimum de température se trouve aux points  $(y=0, z=0)$  et  $(y=1, z=1)$  pour  $x=1$ . Sur la figure 5.3.4.a.2 le minimum se trouve aux quatre sommets du domaine.

Une représentation 2D est dédiée au plan XZ pour les positions  $y=0$ ,  $y=0.5$  et  $y=1$  figure 5.3.4.b. L'allure du profil est cette fois ci différente de celle sur le plan YZ, qualitativement elle est semblable pour les trois positions  $y=0$ ,  $y=0.5$  et  $y=1$ .

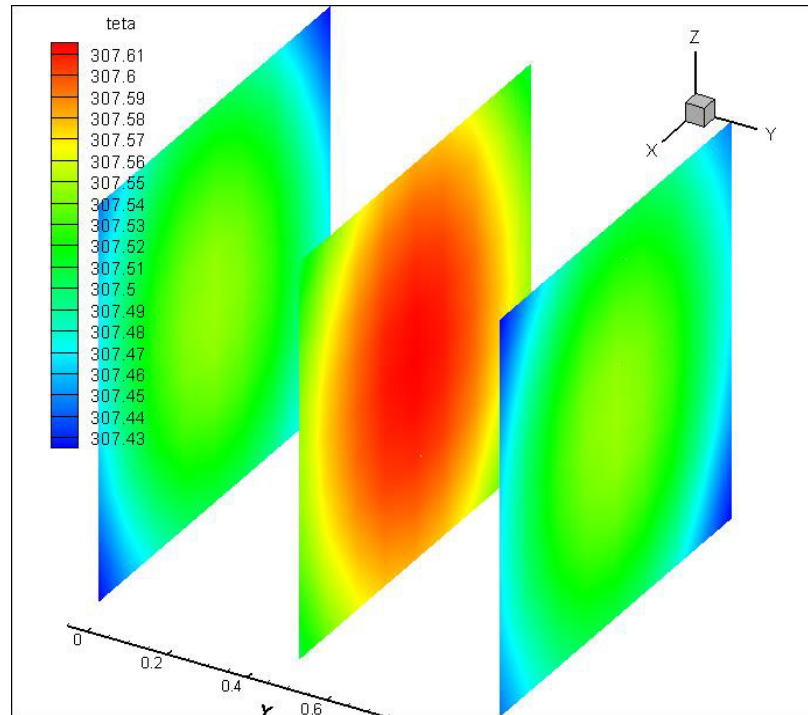


Figure 5.3.4.b Profil de température sur le plan XZ

Qualitativement le profil de température paraît semblable sur le plan XZ pour les trois positions  $y=0$ ,  $y=0.5$  et  $y=1$  ; mais quantitativement on remarque sur la figure 5.3.4.b1 que le minimum de température se trouve aux points  $(x=1, z=0)$  et  $(x=0, z=1)$  pour  $y=0$  par contre sur la figure 5.3.4.b.3 le minimum de température se trouve aux points  $(x=0, z=0)$  et  $(x=1, z=1)$  pour  $y=1$ . Sur la figure 5.3.4.b.2 le minimum se trouve aux quatre sommets du domaine.

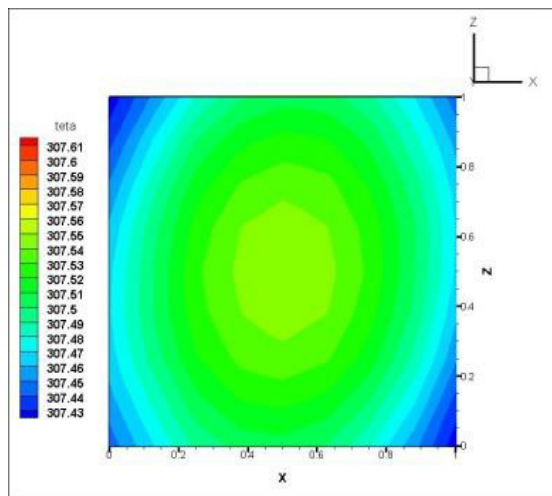


Figure 5.3.4.b1 Profil pour  $y=0$

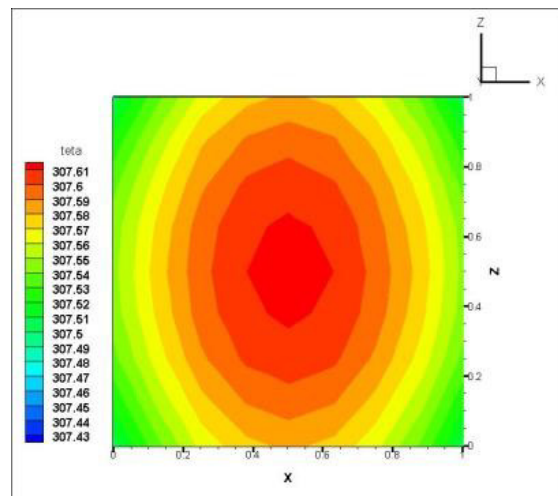


Figure 5.3.4.b2 Profil pour  $y=0.5$

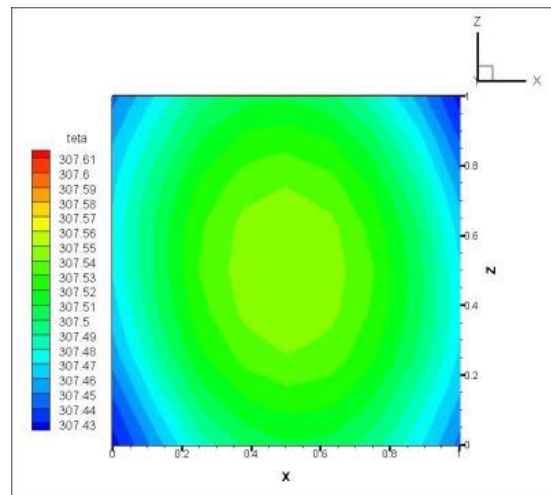


Figure 5.3.4.b3 Profil pour  $y=1$

La figure 5.3.4.c illustre la variation de température sur le plan XY pour les positions  $z=0$ ,  $z=0.5$  et  $z=1$ . Cette variation représentée sur les figures 5.3.4.c1, 5.3.4.c2 et 5.3.4.c3 est qualitativement différente de celle des deux plans YZ et XZ décrits dans les sections précédentes.

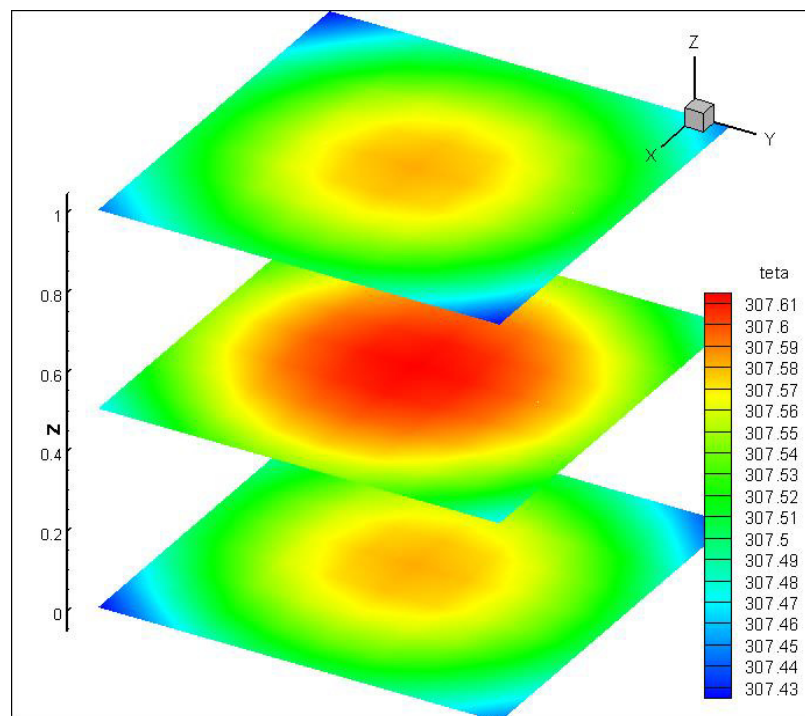


Figure 5.3.4.c Profil de température sur le plan XY

Les résultats obtenus dans ce cas sont présentés sur les figures 5.3.4.c1, figure 5.3.4.c2 et figure 5.3.4.c3 suivantes.

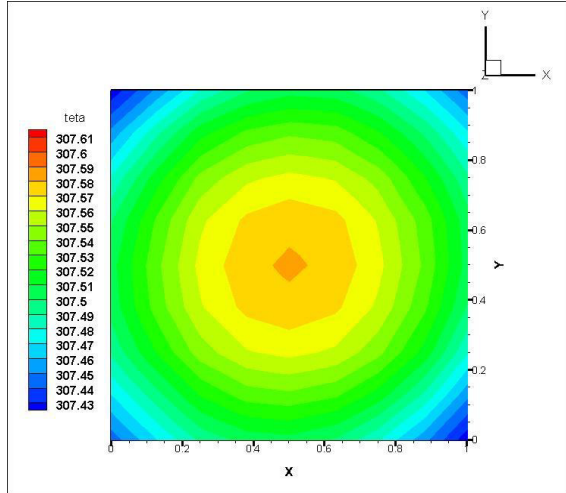


Figure 5.3.4.c1 Profil pour z=0

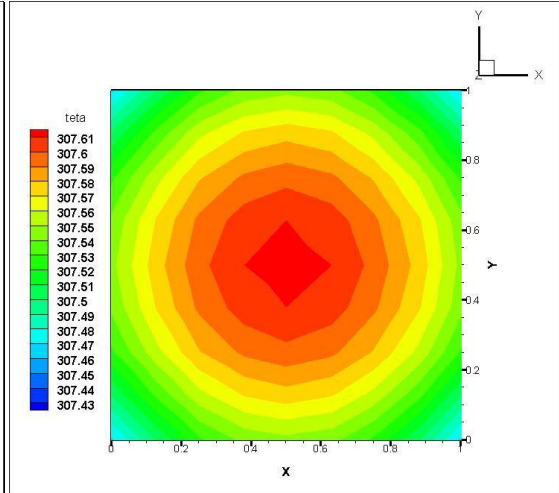


Figure 5.3.4.c2 Profil pour z=0.5

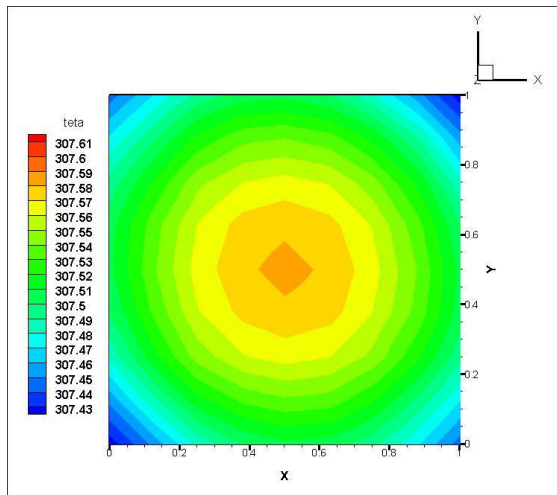


Figure 5.3.4.c3 Profil pour z=1

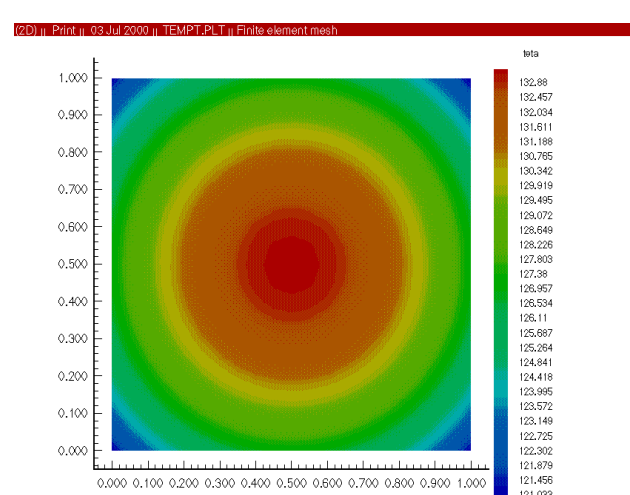


Figure 5.3.4.c4 Profil 2D [10]

L'allure du profil est qualitativement semblable pour les trois positions  $z=0$ ,  $z=0.5$  et  $z=1$ . Dans ce cas on remarque sur la figure 5.3.4.c1 que le minimum de température se trouve aux points  $(x=1, y=0)$  et  $(x=0, y=1)$  pour  $z=0$  par contre sur la figure 5.3.4.c3 le minimum de température se trouve aux points  $(x=0, y=0)$  et  $(x=1, y=1)$  pour  $z=1$ . On a une symétrie par rapport aux plans  $x=0.5$  et  $y=0.5$  sur la figure 5.3.4.c2.

On remarque sur la figure 5.3.4.c2 que le résultat obtenu sur le plan XY pour  $z=0.5$  sont en accord avec celui obtenu par le modèle 2D de la figure 5.3.4.c4 (Annexe 2) pour le même type de solide.

### 5.3.5 Cas du solide isotrope

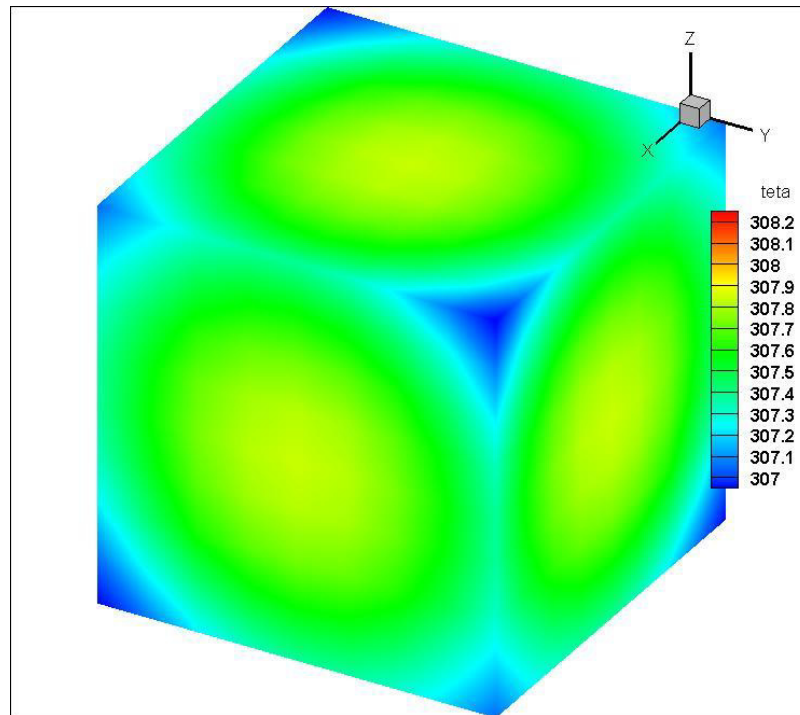


Figure 5.3.5 Champ de température pour le solide isotrope

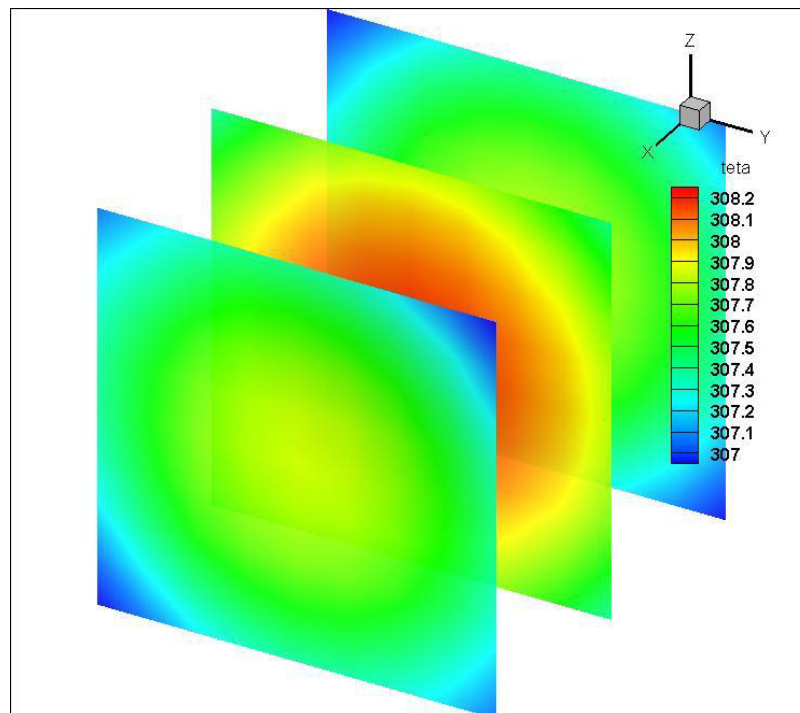


Figure 5.3.5.a Profil de température sur le plan YZ

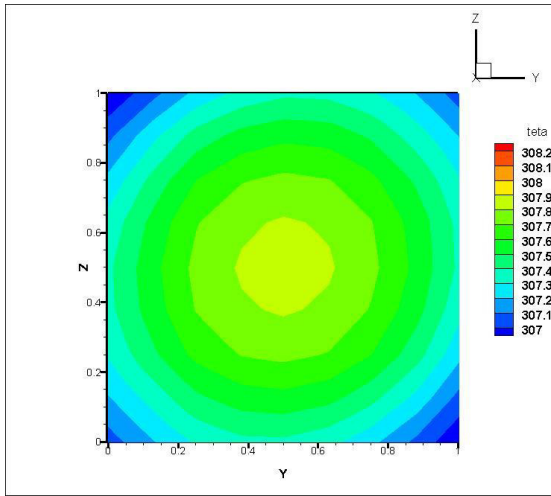


Figure 5.3.5.a1 Profil pour  $x=0$

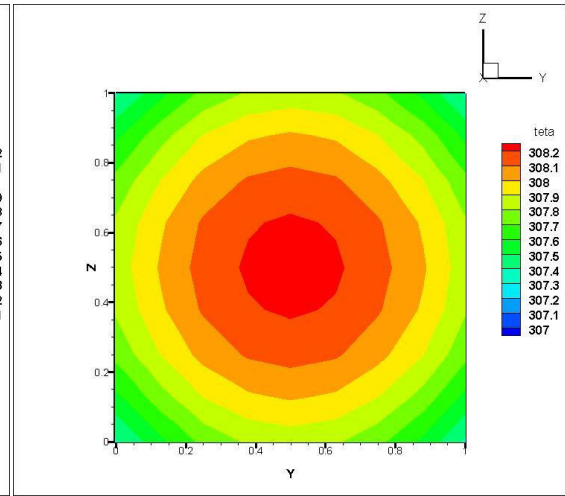


Figure 5.3.5.a2 Profil pour  $x=0.5$

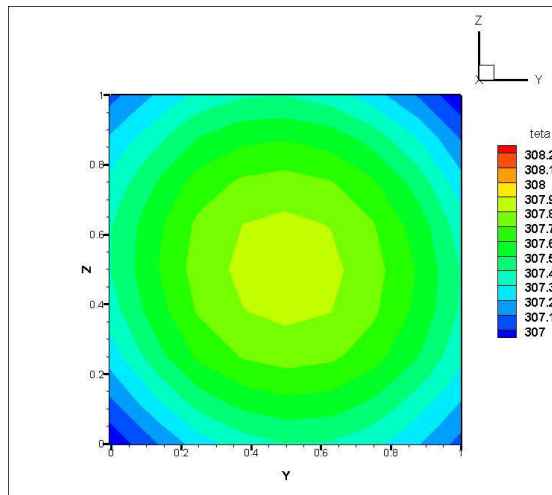


Figure 5.3.5.a3 Profil pour  $x=1$

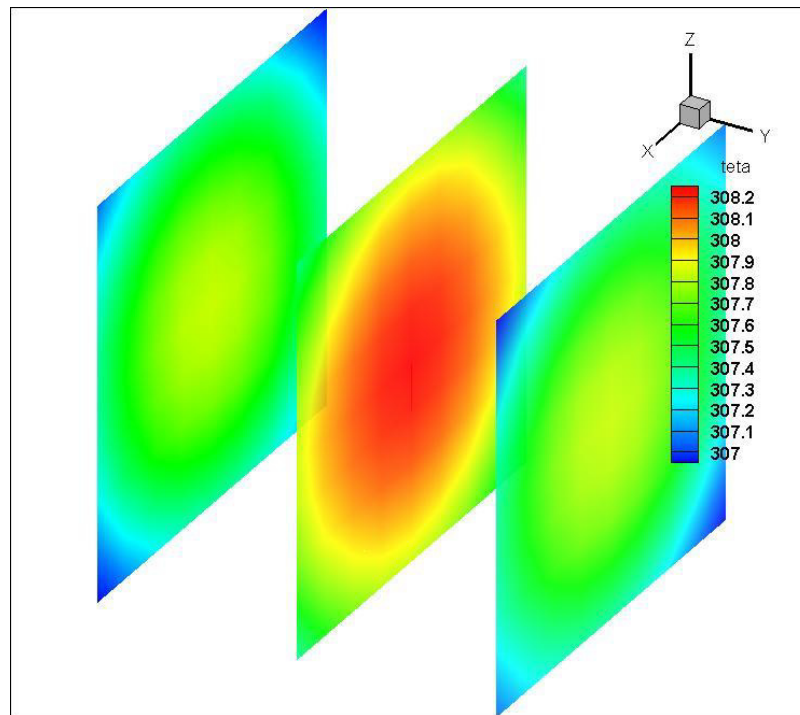


Figure 5.3.5.b Profil de température sur le plan XZ

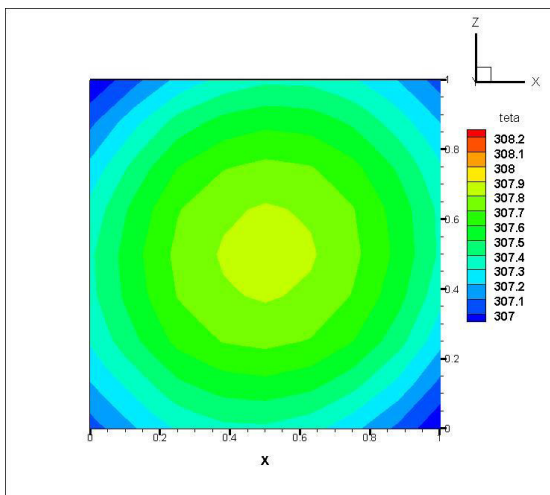


Figure 5.3.5.b1 Profil pour y=0

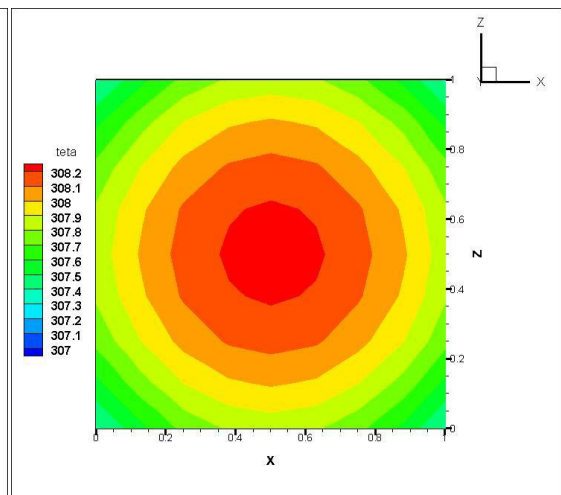


Figure 5.3.5.b2 Profil pour y=0.5

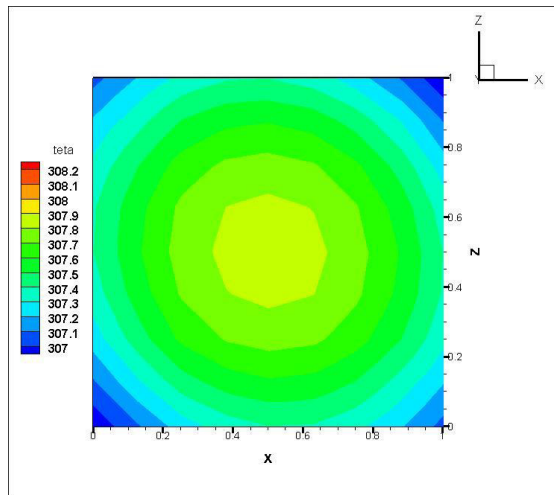


Figure 5.3.5.b3 Profil pour  $y=1$

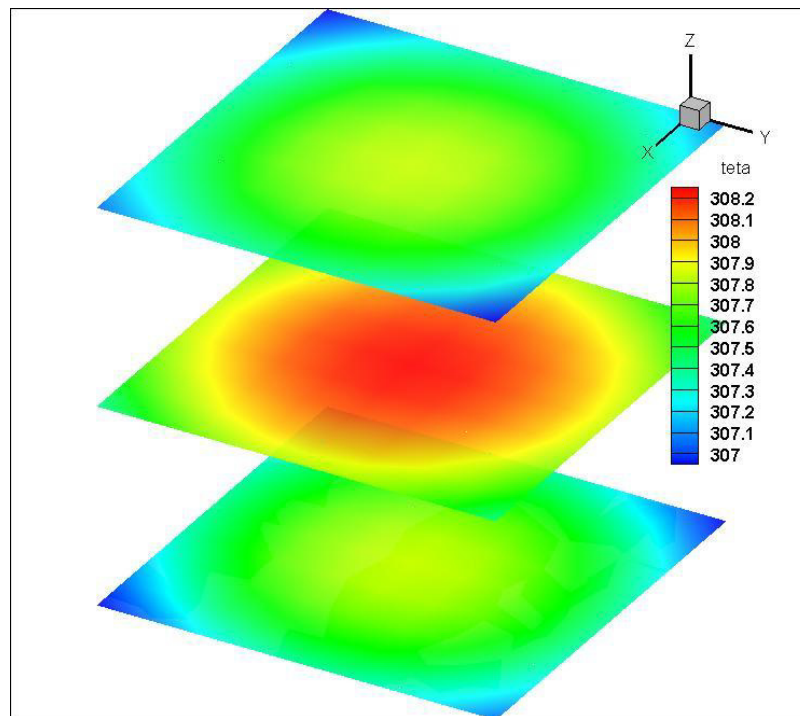


Figure 5.3.5.c Profil de température sur le plan XY

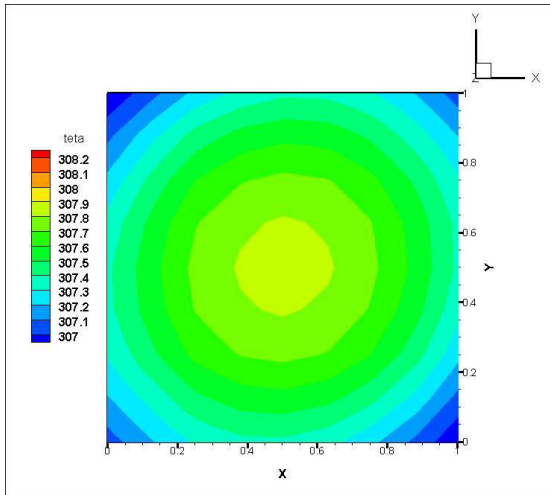


Figure 5.3.5.c1 Profil pour  $z=0$

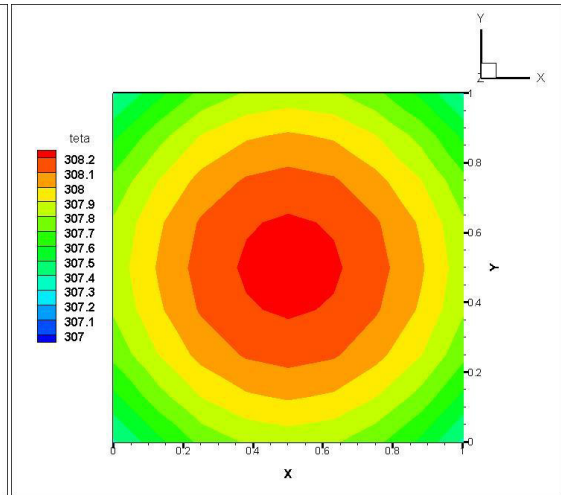


Figure 5.3.5.c2 Profil pour  $z=0.5$

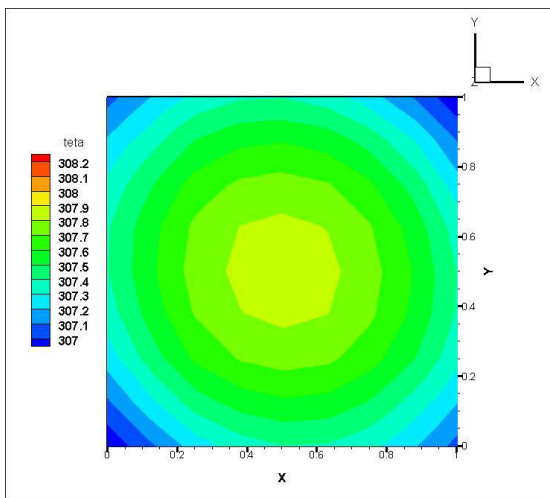


Figure 5.3.5.c3 Profil pour  $z=1$

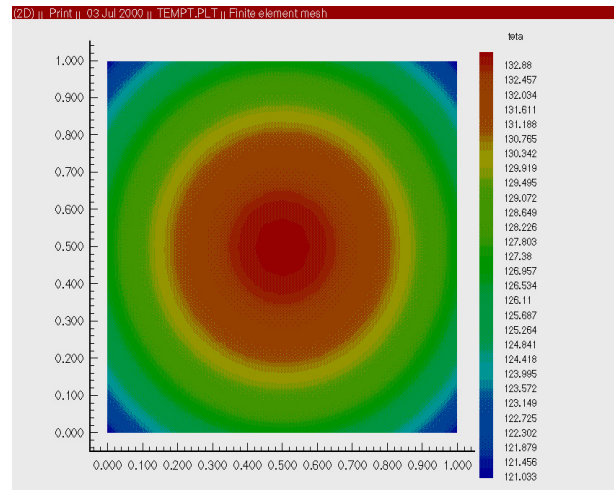


Figure 5.3.5.c4 Profil 2D [10]

Pour le solide isotrope le profil de la température est qualitativement identique sur les plans : YZ (figure 5.3.5.a), XZ (figure 5.3.5.b) et XY (figure 5.3.5.c) ; La différence est quantitative d'une position à l'autre : figures 5.3.5.a1, 5.3.5.a2 et 5.3.5.a3 pour le plan YZ ; figures 5.3.5.b1, 5.3.5.b2 et 5.3.5.b3 pour le plan XZ et figures 5.3.5.c1, 5.3.5.c2 et 5.3.5.c3 pour le plan XY. Pour le cas du solide isotrope on remarque une symétrie sur des résultats sur les trois plans et pour toutes les positions.

La figure 5.3.5 c4 représente la variation de température calculée par le modèle 2D (Annexe 2) sur le plan XY ; pour le modèle 3D c'est le cas correspondant à la position  $z=0.5$  de la figure 5.3.5 c2, on remarque bien la concordance des résultats.

### 5.4 Comparaison entre différents solides

Pour pouvoir comparer entre le comportement de différents solides, nous avons représenté sur la figure 5.4.1 le profil de la température en fonction de la coordonnée  $x$ , c'est-à-dire pour  $(y=0, z=0)$ .

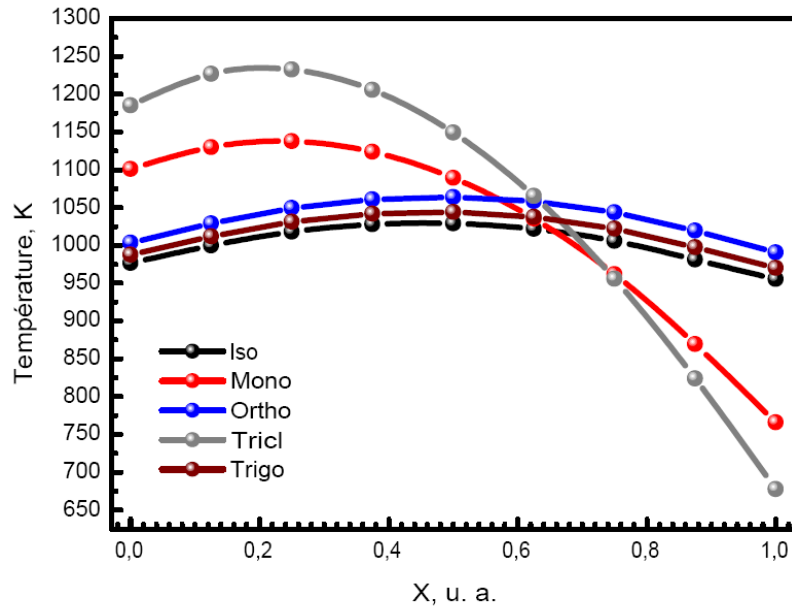


Figure 5.4.1 Superposition du profil de température pour différents cas

Dans la figure 5.4.2 nous avons représenté la comparaison entre la température des cinq solides en fonction de  $x$  mais pour une valeur de  $y = 0.25$  avec  $z=0$ . Et on remarque déjà la variation apparente entre les deux positions  $y=0$  et  $y=0,25$ .

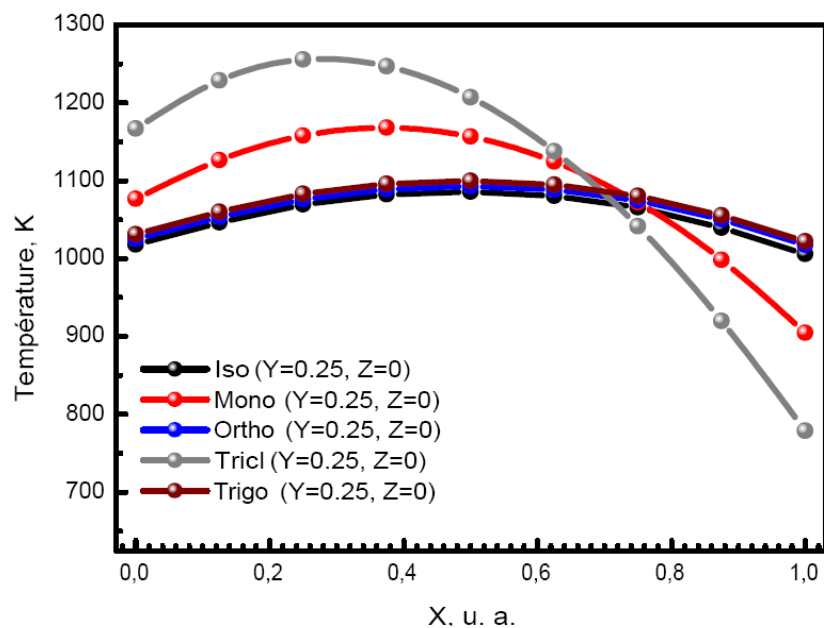


Figure 5.4.2 Superposition du profil de température pour différents cas



## CONCLUSION

Les matériaux composites sont d'un intérêt important dans plusieurs domaines tels que : la mécanique, l'aéronautique, le génie civil et la biomécanique vu leur dureté leur légèreté, leur super élasticité et leur durée de vie. Ces matériaux sont des matériaux anisotropes à caractère structural inhomogène et complexes utilisés pour la réalisation des pièces. Cependant durant leur fonctionnement et leur mode de vie, ces matériaux peuvent subir des fissurations sous l'effet de chargements provoquant leur déformation et par suite leur. Les charges limites à la rupture des matériaux doivent être déterminées à l'état statique comme à l'état dynamique.

Ces matériaux sont anisotropes ayant des différentes propriétés mécaniques et thermiques suivant leurs trois directions orthogonales. Il est donc nécessaire d'identifier le comportement de ces matériaux à partir d'un nombre réduit d'essais.

Dans ce domaine, d'un point de vu engineering, la méthode des éléments finis (MEF) donne une solution complète au problème de conduction thermique lorsque les propriétés et les conditions limites sont connues et dans la plupart des cas l'accès à la mesure de certains paramètres essentiels (température, flux thermique, résistance thermique....etc.) est très difficile. Elle devient même impossible lorsqu'il s'agit par exemple de mesurer la température à l'interface d'un bicouche ou la température dans une couche mince. Devant ces difficultés expérimentales, l'intérêt de la modélisation est majeur.

Durant notre recherche bibliographique, nous avons constaté le nombre limité de travaux traitant le cas du comportement thermique des matériaux anisotrope autre que les matériaux orthotropes ou isotropes transverses dans le cas tridimensionnel, d'où l'intérêt apporté au développement d'un outil numérique permettant de traiter le problème des déformations thermiques pour ce type de matériaux.

Pour atteindre l'objectif, notre étude a consisté à utilise la méthode des éléments finis pour discrétiser le domaine d'étude, ainsi que l'équation de Fourier pour un solide anisotrope en trois dimensions. Le développement de l'outil numérique écrit en langage fortran HEAT

3D, a permis de prédire le champs de température dans le solide soumis à une source de chaleur  $W$  et échangeant par convection avec le milieu ambiant à la température extérieure  $T_e$  avec un coefficient convectif  $h$ . Chaque système cristallin a été spécifié par son tenseur de conductivité thermique  $K_{ij}$

D'après les résultats obtenus on peut conclure que les matériaux anisotropes ont un comportement très varié d'un solide à un autre et au sein d'un même solide d'un plan à un autre et d'un point à un autre.

Pour des études ultérieures, on propose l'extension de cet outil pouvant traiter des géométries et des conditions aux limites complexes et variées spécialement dans les cas où la réalisation des expériences est complexe à réaliser. Ainsi que d'étendre les équations phénoménologique à un transfert mixte de chaleur et de masse.



## BIBLIOGRAPHIE

## Introduction

- |     |  |   |   |           |
|-----|--|---|---|-----------|
| [1] | Hamid Belghazi.  | Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement | Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Limoges                    | 2008      |
| [2] | Damien Ducret  | Elasticité anisotrope et endommagement des matériaux composites : caractérisation ultrasonore et modélisation micromécanique.                                   | L'institut national des sciences appliquées de Lyon. Ingénieur INSA de Lyon | 2000      |
| [3] | Samuel Forest, Michel Amestoy, Gilles Amamme, Serge Kruch, Vincent Maurel, Matthieu Mazière. | Mécanique des milieux continus  | Ecole des mines de PARIS  | 2009–2010 |
| [4] | Guido Dhondt   | The Finite Element Method for Three-dimensional Thermo mechanical Applications  | Munich, Germany. John Wiley & Sons.   | 2004      |
| [5] | S. Bouzid, A.C. Boumaza, M. Afrid.   | Calcul du champ de température dans un solide anisotrope par la méthode des éléments finis - Cas bidimensionnel   | <i>Revue des Energies Renouvelables CISM'08 Oum El Bouaghi 103 – 111</i>    | 2008      |

## Chapitre 1

- |     |  |  |   |           |
|-----|--|--|---|-----------|
| [1] | J. Colombani, L. Joly.   | Science des matériaux.   | Université Claude Bernard Lyon1   |           |
| [2] | D. Ducret  | Elasticité anisotrope et endommagement des matériaux composites : caractérisation ultrasonore et modélisation micromécanique.                                    | L'institut national des sciences appliquées de Lyon. Ingénieur INSA de Lyon | 2000      |
| [3] | S. Forest, M. Amestoy, G. Amamme, S. Kruch, V. Maurel, M. Mazière. | Mécanique des milieux continus   | Ecole des mines de Paris  | 2009–2010 |
| [4] | J.F. Witza, S. Rouxa, F. Hilda, J.B. Rieunie                       | Identification de la conductivité anisotrope de laines minérales   | 19 <sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique Marseille                   | 2009      |
| [5] | H. Belghazi  | Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement. | Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Limoges                    | 2008      |
| [6] | M. Norouzi, H. Rahmani   | An exact analysis for transient anisotropic heat conduction in truncated composite conical shells,   | Applied Thermal Engineering   | 2017      |
| [7] | L. Champaney   | Méthode des Eléments Finis en Thermique et en Thermo-mécanique   |   |           |

- |      |                                   |   |   |      |
|------|-----------------------------------|---|---|------|
| [8]  | J.F. Witz, S. Roux & F. Hild LMT  | Prévision du comportement thermomécanique de laines minérales avec des mesures de champs                                | 18ème Congrès Français de Mécanique Grenoble  | 2007 |
| [9]  | D. Rochais                        | Caractérisation et modélisation thermique multi-échelle de matériaux hétérogènes  | CEA / Le Ripault Journée SFT Benchmark        | 2005 |
| [10] | S. Bouzid, A.C. Boumaza, M. AFRID | Etude et calcul du champ de température dans un solide anisotrope par la méthode des éléments finis- Cas bidimensionnel | Revue des Energies Renouvelables CISM'08 CDER | 2008 |

### Chapitre 2

- |     |                                 |   |   |      |
|-----|---------------------------------|---|---|------|
| [1] | Damien Ducret.                  | Elasticité anisotrope et endommagement des matériaux composites : caractérisation ultrasonore et modélisation micromécanique. | L'institut national des sciences appliquées de Lyon. Ingénieur INSA de Lyon | 2000 |
| [2] | GAY, D                          | Matériaux composites. 3 <sup>e</sup> édition. Paris   | Hermès  | 1991 |
| [3] | Laurent Gornet                  | Généralités sur les matériaux composites  | Ecole d'ingénieur cel-00470296v1  | 2008 |
| [4] | Federica DAGHIA – Lionel GENDRE | Modélisation du comportement des composites : l'elasticité anisotrope,  | Université Paris Sacley   | 2011 |
| [5] | <i>Marc François.</i>           | Élasticité anisotrope   |   | 2004 |

### Chapitre 3

- |     |  |  |  |      |
|-----|--|--|--|------|
| [1] | D.W. Hahn, M.N. Özisik.                  | Heat Conduction  | 3rd Eds, John Wiley & Sons   | 2012 |
| [2] | R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K. Seetkaramu | Fundamentals of Finite Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow | Eds, John Wiley & Sons   | 2008 |
| [3] | A.M. Bianchi, Y. Fauterelle, J. Etay.    | Transferts Thermiques  | 1 <sup>st</sup> Eds, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes | 2004 |
| [4] | B. André, D. Vriendt                     | Transmission de la Chaleur, la conduction                              | 3rd Eds, G. Morin  | 1989 |
| [5] | Yunus A. Çengel                          | Heat and mass transfer A practical                                     | Third edition University Nevada, Reno McGraw-Hill                      | 2007 |
| [6] | Y. Jannot, C. Moyne.                     | Transferts thermique   | Ecole des Mines Nancy  | 2012 |

**Chapitre 4**

- |   |                            |  |   |      |
|---|----------------------------|--|---|------|
| 1 | Jean Cristophe<br>cuillère | Introduction à la méthode des éléments finis   | DUNOD   | 2011 |
| 2 | Kenneth<br>H.Huebner       | The finit élément méthod for engineers   | JOHN Wiley and<br>Sons<br>Eurl a THORNTON   | 1982 |
| 3 | Nikishkov,<br>Gennadiy P   | Programming Finite Elements in Java  | Springer-Verlag<br>London   | 2010 |
| 4 | S.<br>Gockenbach.          | Understanding and implementing the finite<br>element method / Mark                         | the Society for<br>Industrial and<br>Applied<br>Mathematics.<br>Philadelphia,<br>Springer | 2006 |
| 5 | M. R. Eslami               | Finite Elements Methods in Mechanics, 95<br>Solid Mechanics and Its Applications 216,<br>. | International<br>Publishing<br>Switzerland  | 2014 |



## ANNEXES

## Annexe 1

*Revue des Energies Renouvelables CISM'08 Oum El Bouaghi (2008) 103 - 111*

**Calcul du champ de température dans un solide  
anisotrope par la méthode des éléments finis  
Cas bidimensionnel**

S. Bouzid<sup>1\*</sup>, A.C. Boumaaza<sup>2</sup> et M. Afrid<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Institut des Sciences Techniques, Ain Beida, Université Larbi Ben M'Hidi, Oum El Bouaghi, Algérie

<sup>2</sup> Institut de Génie Mécanique, Centre Universitaire, Khenchela, Algérie

<sup>3</sup> Département de Physique, Université des Frères Mentouri, Constantine, Algérie

**Résumé** - Notre étude a pour objectif la présentation et l'application de la loi de Fourier caractérisant le comportement thermique des matériaux anisotropes dans le cas bidimensionnel. Pour la réalisation de cet objectif, nous avons fait l'étude sur un solide carré de dimensions données représentant les sept systèmes cristallins (cubique, monoclinique, triclinique, tétragonal, trigonal, orthorhombique et rhomboédrique), subissant une variation de température sous l'effet d'une source de chaleur interne  $W$  et ayant des frontières convectives avec le milieu extérieur avec un coefficient  $h$ . Pour aboutir à la solution, nous avons discrétisé le domaine géométrique, ainsi que l'équation de transfert par la méthode la méthode des éléments finis, le système d'équations obtenu est résolu par la méthode de Crout dite L.U. L'étude réalisée permet une manipulation rapide et une vaste variété de cas faisant objet de la forme géométrique du solide et les conditions aux limites imposées sur le solide en étude. Dans cette étude, chaque système cristallin a été spécifié par son tenseur de conductivité thermique. Les résultats obtenus et illustrés à l'aide du logiciel de graphisme Tecplot ont permis une mise en évidence de l'influence des propriétés de conductivité thermique, ainsi que l'effet des conditions extérieures imposées sur le champ de température. Ils sont en bonne concordance avec la théorie du transfert thermique et illustrent bien la symétrie de la structure cristalline, ce calcul permet de prévoir les déformations thermiques éventuelles dans un solide dans des conditions connues.

**Abstract** - The objective of the present study is the presentation and enforcement of Fourier law characterizing the thermal behaviour of anisotropic materials in the bi-dimensional case. To achieve this objective we studied a square dimensions solid representing the seven crystal systems (cubic, monoclinic, triclinic, tetragonal, trigonal, orthorhombic and rhombohedra), having a temperature variation as a result of an internal heat source and convective boundary's. To achieve the solution, we have used the finite element method. The obtained equations system is resolved by the Crout method. The study provides a fast technique which handles a wide variety of cases. In this study each crystal has been specified by its thermal conductivity tensor. The obtained results allow a highlight of the influence of thermal conductivity properties and the effect of external conditions imposed on the temperature field. They show a good agreement with the heat transfer theory and illustrate the crystal structure symmetry. The calculation permits the prediction of the possible thermal deformation in a solid for known conditions.

**Mots clés** : - Champ thermique - Solide anisotrope - Discrétisation - Eléments finis - Simulation.

## 1. INTRODUCTION

Le présent travail a été proposé comme première partie d'une étude ayant pour objectif, la réalisation d'un programme de calcul numérique du champ de température et de déplacement dans un solide anisotrope dans le cas tridimensionnel. Cette étude est limitée au départ au cas bidimensionnel.

L'objectif est donc de faire l'étude de point de vue, modèle mathématique, ainsi que numérique et l'appliquer pour quelques solides anisotropes. Pour ce but, nous avons limité l'étude à un domaine de forme carrée soumis à l'effet d'une source de chaleur volumique et un échange convectif sur les frontières.

On présente l'écriture de l'équation de chaleur après discrétisation par la méthode des éléments finis utilisant l'approche de Galerkin, ainsi que la discrétisation du domaine géométrique, on aboutit ainsi à un système élémentaire d'équation linéaire  $3 \times 3$ .

Puis on procède à l'assemblage des effets de tous les éléments du domaine pour obtenir le système global qui sera résolu par la méthode classique de décomposition L.U avec substitution. Pour cela, nous avons développé un programme en Fortran 'Heat.for'.

## 2. EQUATION DE LA CHALEUR

### 2.1 Conduction de chaleur dans un solide

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur dans un solide provoqué par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide ou encore entre deux milieux en contact physique. L'étude des transferts de chaleur se ramène à celle des champs des températures dans le matériau.

### 2.2 Loi de Fourier pour un solide anisotropique

Pour les solides anisotropiques, les projections du vecteur de flux de chaleur suivant les coordonnées spatiales sont fonctions des gradients de température suivant les mêmes coordonnées:

$$\begin{cases} q_x = -k_{xx} \frac{\partial \theta}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial \theta}{\partial y} - k_{xz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ q_y = -k_{yx} \frac{\partial \theta}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial \theta}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ q_z = -k_{zx} \frac{\partial \theta}{\partial x} - k_{zy} \frac{\partial \theta}{\partial y} - k_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{cases} \quad (1)$$

$k_{ij}$ : Tenseur de conductivité thermique.

Sous forme condensée, l'équation du bilan énergétique dans un solide anisotrope s'écrit [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left( k_{ij} \times \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right) + W = \rho \times C_p \times \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2)$$

### 2.3 Tenseurs de conductivité thermique $[k_{ij}]$ pour différents solides

#### Système monoclinique

$$[k_h] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

#### Système trigonal

$$[k_h] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

#### Système orthorhombique

$$[k_h] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

#### Système triclinique

$$[k_h] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

#### Système cubique

$$[k_h] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} \end{bmatrix}$$

## 3. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR LE CALCUL DES TEMPERATURES

### 3.1 Discrétisation du domaine

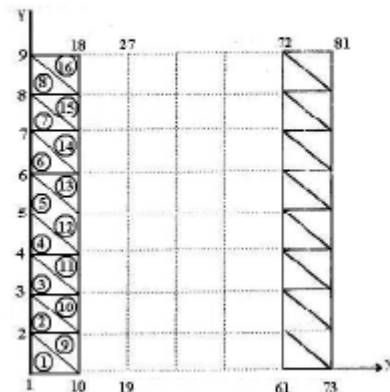


Fig. 1: Numérotation des nœuds et des éléments

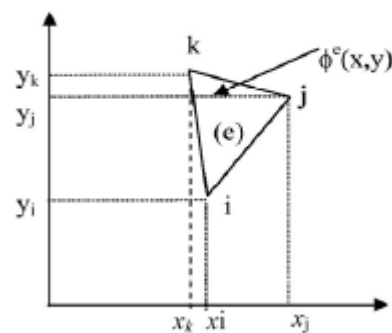


Fig. 2: Élément type

### 3.2 Discrétisation de l'équation de chaleur

On reprend l'équation d'énergie pour le régime permanent [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + W = 0 \quad (3)$$

W : Source de chaleur dans le solide.

L'équation (3) est de la forme:

$$\text{div } \theta + W = 0 \quad (4)$$

On choisit la fonction d'interpolation, pour un élément triangulaire à trois nœuds, suivante [3]:

$$\theta^e(x, y) = N_1(x, y) \times \theta_1 + N_2(x, y) \times \theta_2 + N_3(x, y) \times \theta_3 \quad (5)$$

Où:  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  les températures aux nœuds  $i, j, k$ .

Pour calculer le champ de température  $\theta$  de l'équation (3), on applique la méthode de Galerkin décrite par l'équation (4).

$$\int_v (\Psi_k) \cdot \left[ L \left( \sum_{j=1}^n C_j \cdot \Phi_j \right) - f \right] \cdot dv \quad k = 1, \dots, n \quad (6)$$

D'où

$$\int_{D^e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + W \right] \times N_i \cdot dD^e \quad (7)$$

On intègre le premier terme en appliquant le théorème de Green:

$$\int_{D^e} (\nabla \phi) \cdot \Psi \cdot dD^e = \int_{\Sigma^e} (\phi \vec{n}) \cdot \Psi \cdot d\Sigma^e + \int_{D^e} \phi \cdot \nabla \cdot \Psi \cdot dD^e$$

On obtient:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma^e} \left[ \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] N_i \cdot d\Sigma^e \\ & - \int_{\Sigma^e} \left[ \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \times \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Sigma^e = 0 \quad i=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (8)$$

Posons:

$$\int_{D^e} \left[ \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \times \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dD^e = I_{D^e} \quad (9)$$

$$\int_{\Sigma^e} \left[ \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] N_i \cdot d\Sigma^e = I_{\Sigma^e} \quad (10)$$

Le terme  $I_{\Sigma}$  n'existe que pour les éléments ayant des segments situés sur la frontière qui échange de la chaleur avec le milieu extérieur à l'aide d'un coefficient de convection  $h$ . Ce terme est évalué comme suit:

$$\int_{\Sigma^e} h \cdot \theta \cdot N_i \cdot d\varepsilon^e = \int_{\Sigma^e} h (N_1 N_i \theta_1 + N_2 N_i \theta_2 + N_3 N_i \theta_3) \cdot d \Sigma^e \quad i=1,2,3 \quad (11)$$

Où  $\Sigma^e$  est la somme des longueurs des trois segments d'un élément.

Après tout calcul fait, la discrétisation de l'équation (3) pour un élément  $\epsilon$  de nœuds  $i, j, k$  peut s'écrire sous forme matricielle:

$$a- \begin{matrix} [k]^e \{\theta\}^e = \{W\}^e \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 1 \end{matrix} \quad (12)$$

si aucun segment n'échange de la chaleur avec le milieu extérieur,

$$b- \left\{ [k]^e + [k_h]^e \right\} \{\theta\}^e = \{W\}^e \quad (13)$$

si un ou deux segments se trouvent à la frontière du solide.

$$K_{11} = \frac{1}{4\Delta} \cdot (k_{11} b_1^2 + k_{12} b_1 c_1 + k_{21} b_1 c_1 + k_{22} c_1^2)$$

$$K_{12} = \frac{1}{4\Delta} \cdot (k_{11} b_1 b_2 + k_{12} b_1 c_2 + k_{21} b_2 c_1 + k_{22} c_2 c_1)$$

$$K_{13} = \frac{1}{4\Delta} \cdot (k_{11} b_1 b_3 + k_{12} b_1 c_3 + k_{21} b_3 c_1 + k_{22} c_3 c_1)$$

$$K_{21} = \frac{1}{4\Delta} \cdot (k_{11} b_1 b_2 + k_{12} c_1 b_2 + k_{21} b_1 c_2 + k_{22} c_1 c_2)$$

$$K_{22} = \frac{1}{4\Delta} \cdot (k_{11} b_2^2 + k_{12} b_2 c_2 + k_{21} b_2 c_2 + k_{22} c_2^2)$$

$$K_{23} = \frac{1}{4\Delta} \cdot (k_{11} b_3 b_2 + k_{12} c_3 b_2 + k_{21} b_3 c_2 + k_{22} c_3 c_2)$$

$$K_{31} = \frac{1}{4\Delta} \cdot (k_{11} b_1 b_3 + k_{12} b_3 c_1 + k_{21} b_1 c_3 + k_{22} c_1 c_3)$$

$$K_{32} = \frac{1}{4\Delta} \cdot (k_{11} b_2 b_3 + k_{12} c_2 b_3 + k_{21} b_2 c_3 + k_{22} c_2 c_3)$$

$$K_{33} = \frac{1}{4\Delta} \cdot (k_{11} b_3^2 + k_{12} b_3 c_3 + k_{21} b_3 c_3 + k_{22} c_3^2)$$

Avec

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$b_2 = y_3 - y_1$$

$$b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

$$c_2 = x_1 - x_3$$

$$c_3 = x_2 - x_1$$

$$\{\theta\}^e = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}^e \quad \{W\} = \frac{\Delta W}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$[k_h] = \begin{cases} h \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times l_{12} & \text{pour } i - j \\ h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \times l_{23} & \text{pour } j - k \\ h \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \times l_{13} & \text{pour } i - k \end{cases}$$

#### 4. CHOIX DU MAILLAGE CONVENABLE

Ayant écrit le modèle mathématique décrivant le comportement thermique d'un solide fourni par la loi de Fourier et après discrétisation du modèle par la méthode des éléments finis, on a procédé au calcul numérique concernant quelques types de solides afin de mettre en évidence le comportement du solide sous l'effet des conditions aux limites données.

On a choisi un solide de forme carrée de dimensions  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ , on lui a fait subir une ariation de température par génération d'une source de chaleur volumique de valeur  $10^3 \text{ kW/m}^3$ , on a représenté les résultats sur des graphes tracés à l'aide du logiciel Tecplot.

Avant d'illustrer la distribution du champ de température, on a fait un calcul préliminaire pour le choix du maillage éléments finis. On a commencé par un premier maillage de  $5 \times 5$  et on a enregistré les températures calculées, en augmentant l'ordre de maillage.

On a remarqué une variation du champ de températures, mais qui diminuait de plus en plus, on a jugé bon d'augmenter encore le maillage jusqu'à  $21 \times 21$  malgré que le temps d'exécution paraît de plus en plus considérable mais qui reste acceptable et à ce moment là on a eu un écart de  $0,3 \%$  par rapport au précédent. Ce qui est acceptable comme intervalle et on a maintenu pour les calculs ultérieurs le maillage  $21 \times 21$  pour tous les solides.

### 5. RESULTATS DU CALCUL DU CHAMP DE TEMPERATURE POUR DIFFERENTS SOLIDES

Le calcul a été élaboré pour les cas suivant

#### Système monoclinique

$$[k_h] = \begin{bmatrix} 100 & 120 & 0 \\ 120 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

#### Système trigonal

$$[k_h] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

#### Système orthorhombique

$$[k_h] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

#### Système triclinique

$$[k_h] = \begin{bmatrix} 100 & 120 & 150 \\ 120 & 200 & 190 \\ 150 & 190 & 300 \end{bmatrix}$$

#### Système cubique

$$[k_h] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

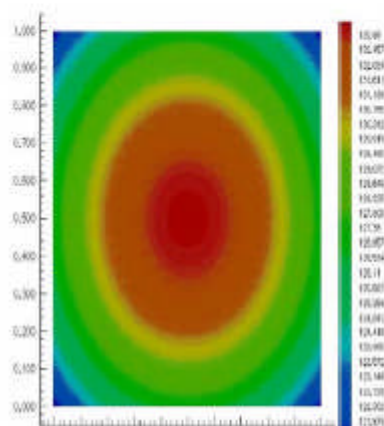


Fig. 3: Solide cubique

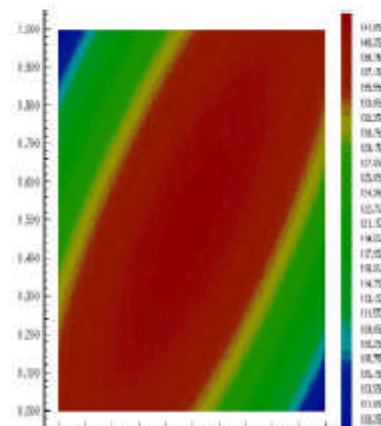


Fig. 4: Solide monoclinique

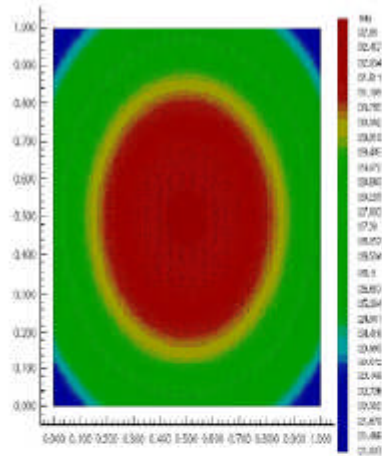


Fig. 5: Solide trigonal

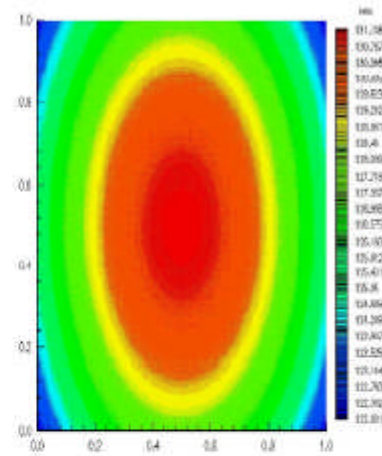


Fig. 6: Solide orthorhombique

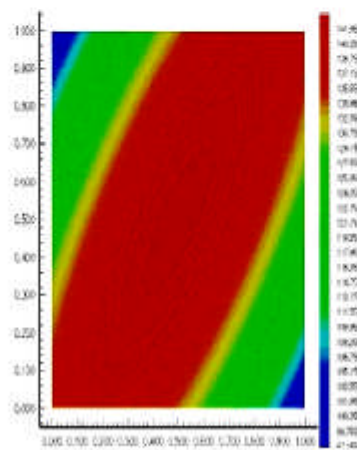


Fig. 7: Solide triclinique

## 6. DISCUSSION

La distribution de température sur le plan  $(x, y)$  est illustrée par les figures 3 à 7 à l'aide du logiciel Tecplot, représentant respectivement les solides: cubique, monoclinique, trigonal, orthorhombique et triclinique.

La figure 3 montre que le maximum de température se trouve au centre. Elle présente une symétrie par rapport aux diagonales et aux axes médians vu la symétrie du

CISM'2008: *Calcul du champ de température dans un solide anisotrope par la...* 111

tenseur de conductivité thermique et des conditions aux limites imposées. Les résultats paraissent identiques pour les figures 3 et 5. Ils auraient été différents si l'illustration était faite sur le plan  $(xz)$  ou  $(yz)$  ou dans le cas tridimensionnel car  $k_{33} \neq k_{11}$  et  $k_{33} \neq k_{22}$ . Elles sont égales sur les 4 extrémités.

Pour la figures 4, la distribution de température est visiblement différente des deux cas précédents car  $k_{12} \neq 0$  en plus  $k_{11} \neq k_{22}$ , la différence entre les résultats de la figure 4 et de la figure 7 serait plus nette pour une représentation  $(xz)$ ,  $(yz)$  ou encore pour le cas tridimensionnel.

Sur la figure 6, la distribution de température dans le solide orthorhombique est symétrique par rapport aux axes médians, car  $k_{22} \neq k_{11}$ .

## 7. CONCLUSION

Le programme élaboré nous a permis de mettre en évidence l'application de la loi de Fourier pour calculer le champ de température dans les solides anisotropes dans le cas bidimensionnel, résultats concordant avec la théorie de la conduction de chaleur. Ce programme permettra une manipulation rapide et variée concernant, spécialement la forme géométrique du solide et les condition imposées aux limites.

## NOMENCLATURE

$q$ : Flux de chaleur	$\Phi \equiv \theta$ : Champ variable inconnue
$k_{ij}$ : Tenseur de conductivité thermique	$D^e$ : Domaine élémentaire
$\theta$ : Température	$\Sigma^e$ : Surface du domaine élémentaire
$W$ : Source de chaleur	$h$ : Coefficient d'échange thermique
$\rho$ : Masse volumique	$[k]^e$ : Matrice de rigidité élémentaire de conduction
$b_i, c_i$ : Coefficients géométriques	$\{\theta\}^e$ : Vecteur température élémentaire
$C_p$ : Chaleur spécifique	$\{w\}^e$ : Vecteur source de chaleur élémentaire
$N_i$ : Fonctions d'interpolation	$[k_h]^e$ : Matrice de rigidité élémentaire Convective
$\theta^e$ : Champ de température élémentaire	
$\theta_i$ : Températures nodales	
$\Psi \equiv N$ : Fonction d'interpolation	
$K_{ij}$ : Coefficients de rigidité élémentaires	

## REFERENCES

- [1] P. Cormault, '*Cours de Thermique Théorique et Pratique*', Édition 1999.
- [2] J. Crabol, '*Transfert de Chaleur*', Édition Masson, 1992.
- [3] P. Trompette, '*Mécanique des Structures par la Méthode des Éléments Finis*', Masson, 1992.
- [4] K.H. Huebner et al., '*The Finite Element Method for Engineers*', 1982.

## Annexe 2

Journal of New Technology and Materials(JNTM)

J. New Technol. Mater.

Vol. 07, N°02 (2017)117-122



## Temperatures field calculation in an anisotropic solid through finite elements method, tridimensional case

Sihem Bouzid<sup>a</sup>, A. Charif Boumaza<sup>b</sup> and Mourad Zaabat<sup>c</sup><sup>a</sup>Mechanical Engineering Department, Faculty of sciences and Applied Sciences; University of Oum El Bouaghi, Algeria.<sup>b</sup>Laboratory of Structures, Properties and Interatomic Interactions (LASPI2A), University of Khenchela, Algeria.<sup>c</sup>Laboratory of Active Components and Materials (LCAM), University of Oum El Bouaghi, AlgeriaCorresponding author: email: [sihem.bouzid@yahoo.fr](mailto:sihem.bouzid@yahoo.fr)

Received date: Nov. 06, 2017; revised date: Dec. 21, 2017; accepted date: Dec 22, 2017

**Abstract**

This calculation is part of numeric thermo-mechanical strains simulation in anisotropic solids. The objective is to apply Fourier's law for anisotropic materials in tridimensional case. The study domain is a cube with unit dimension, representing some crystalline systems having one internal heat source equal to  $10^6$  Kw/m<sup>3</sup> and convective borders with a convection coefficient equal to 20 w/m<sup>2</sup>.K. Domain and heat transfer equation are discretized by finite elements method, obtained equations set is resolved via Crout's method. Each crystalline system is identified by its heat conductivity tensor. Obtained results agree well with thermal transfer theory and clearly illustrate crystalline structure symmetry. This calculation can predict eventual thermal strains in a solid anisotropic.

Keywords: Temperature, anisotropic, discretization, finite element, simulation;

**1. Introduction**

The work consists on enlarging temperature fields calculation in anisotropic solids, already completed for the two-dimensional case [1]. This paper aims to implement a program for numerical temperature field calculation in an anisotropic solid into tridimensional case. To achieve this, we have chosen a cubic domain submitted to a volumical heat source effect and convective heat exchange in the borders. Via Galerkin's discretization method, we obtain an elementary-four order linear equations system, and then we assemble all element effects to obtain the global system which will be resolved via LU decomposition technique of Crout's method.

**2. Fourier's law for an anisotropic solid**

In anisotropic solids, heating flow vector projections according to space coordinates are temperature gradients function under same coordinates [2]:

$$\begin{cases} q_x = -k_{xx} \frac{\partial \theta}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial \theta}{\partial y} - k_{xz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ q_y = -k_{yx} \frac{\partial \theta}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial \theta}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ q_z = -k_{zx} \frac{\partial \theta}{\partial x} - k_{zy} \frac{\partial \theta}{\partial y} - k_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{cases} \quad (1)$$

Where

 $q_x, q_y, q_z$ : Heat flow thru x,y,z axis (w/m<sup>2</sup>). $k_i$ : Thermal conductivity tensor (w/m K). $\theta$ : Temperature (K).

In a condensed form, the energy balance equation into an anisotropic solid is written as [3], [4]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + w = \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad i, j = x, y, z \quad (2)$$

Where

$w$ : Internal heat source in domain D ( $w/m^3$ ).

$\rho$ : Density ( $kg/m^3$ ).

$c_p$ : Specific-massic heat capacity ( $J/kg K$ ).

$t$ : Time (s).

### 3. Heat conductivity tensors $[k]$ for different solids

For each system and taking into account symmetry in crystalline systems, thermal conductivity tensors became [7]:

Monoclinic system:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

Cubic system:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} \end{bmatrix}$$

Orthorhombic system:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

Trigonal system:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

Triclinic system:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

## 4. Finite elements method application to calculate temperatures

### 4.1 Domain discretization

To manage automatic mesh of studied domain on fig.1, we proceed with a first clipping on elementary cubes noted (e) of eight nodes (i,j,k,l,m,r,p,q) as shown on fig.2. Then,

we discretized every cube (e) on five tetrahedron noted (ee), each of four node (i,j,k,l) fig.3.

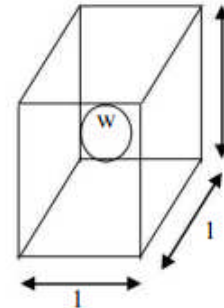


Figure 1. Study domain

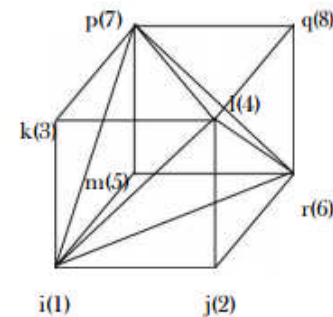


Figure 2. Elementary cube (e)

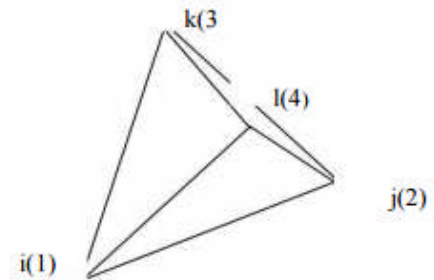


Figure 3. Elementary tetrahedron (ee)

### 4.2 Equation discretization

For stationary case, equation (2) became:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + w = 0 \quad (3)$$

The equation (3) is discretized by Galerkin's method, [5], [6].

$$\int_V (\Phi_k) \left[ \mathcal{L} \left( \sum_{j=1}^n C_j \Phi_j \right) - f \right] dV = 0 \quad (4)$$

$$k = 1, \dots, n$$

Where

$\Phi_k$ : State variable.

$\mathcal{L}U=f$ : Problem's state equation.

$U = \sum_{j=1}^n C_j \Phi_j$ : Approached problem solution.

$C_k$ : Constants to be calculated.

#### 4.3 Interpolating function choice

We choose the following interpolating function [4]

$$N^{ee}(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (5)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ : Constants to be determined.

Interpolating function in a four nodes tetrahedron component is :

$$\theta^{ee}(x, y, z) = N_1(x, y, z)\theta_1 + N_2(x, y, z)\theta_2 +$$

$$N_3(x, y, z)\theta_3 + N_4(x, y, z)\theta_4 \quad (6)$$

Where:  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  and  $\theta_4$  are temperatures at i, j, k and l nodes.

We apply Galerkin's method described in (4), then:

$$\int_{D^e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + w \right] N_i dD^e = 0$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad (7)$$

Using Green's theorem we integrate the first term of (7) we obtain:

$$\int_{\Sigma^e} \left[ \begin{aligned} & \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \\ & \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \\ & \left( k_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \end{aligned} \right] N_i d\Sigma^e -$$

$$\int_{D^e} \left[ \begin{aligned} & \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \\ & \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \\ & \left( k_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \end{aligned} \right] \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \right] dD^e = 0 \quad (8)$$

Let

$$I_{\Sigma^e} = \int_{\Sigma^e} \left[ \begin{aligned} & \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \\ & \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \\ & \left( k_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \end{aligned} \right] N_i d\Sigma^e \quad (9)$$

and

$$I_{D^e} = \int_{D^e} \left[ \begin{aligned} & \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \\ & \left( k_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \\ & \left( k_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial \theta}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \end{aligned} \right] \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \right] dD^e \quad (10)$$

The term  $I_{\Sigma^e}$  exists only for elements with segments situated on frontiers exchanging heat with external medium, with a convection coefficient  $h$ . This term is estimated as follows:

$$\int_{\Sigma^e} h \theta N_i d\Sigma^e =$$

$$\int_{\Sigma^e} h (N_1 N_i \theta_1 + N_2 N_i \theta_2 + N_3 N_i \theta_3) d\Sigma^e \quad (11)$$

$i=1, 2, 3, 4$

where  $\Sigma$  is the four surface areas sum of a tetrahedron. Second term equation integral is given by

$$\int_{D^e} w_i N_i dD^e = w \int_{D^e} N_i dD^e \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (12)$$

Once every calculation made, discretization from (3) for one tetrahedron element (ec) of i, j, k and l nodes, may be written in a matrix form:

$$a) [K]^e \{\theta\}^e = \{W\}^e \quad (13)$$

when no face exchanges heat with external medium,

$$b) \{[K]^e + [K_h]^e\} \{\theta\}^e = \{W\}^e \quad (14)$$

when one, two or three surfaces are within solid boundary.

$[K]$ ,  $[K_h]$ : Square matrix of four order.

$\{W\}$ ,  $\{\theta\}$ : Column vectors of four order.

### 5. Suitable mesh choice

Once mathematical formula finished, which describes solid thermal behavior given by Fourier's law, and following model discretization finite elements method; we proceeded to numerical calculation concerning several solid types. To achieve these calculations, we performed a program in FORTRAN language. We choose a cubical solid with unit dimension, which experienced temperature variations through volume heat source of  $10^3$  Kw/m<sup>3</sup>. Before temperature field distribution is described, we made a preliminary estimation to choose finite element mesh. First, we started with an uniform grid of six (6) order along three axis. While temperatures are calculated by increasing mesh order, we noted temperature field variation which decreases more and more, we consider that it will be appropriate to further increase the mesh to a grid of nine (9) order, that we maintained for any subsequent solid type calculations.

### 6. Temperature field calculation results for different solids

To illustrate calculation results, we have chosen as numerical value for conductivity tensors

Monoclinic system:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 120 & 0 \\ 120 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

Cubic system:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Orthorhombic system

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

Trigonal system:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

Triclinic system:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 120 & 150 \\ 120 & 200 & 190 \\ 150 & 190 & 300 \end{bmatrix}$$

### 7. Discussion

Temperature distribution in the (x, y, z) coordinates is shown in Fig.4 to 8 with Tecplot software, representing solids: monoclinic, cubic, orthorhombic, trigonal and triclinic, respectively.

For all presented cases, we find that maximum calculated temperature is at field centre, it is equal to 1200°K, 1160°K, 1120°K, 1140°K and 1250°K for monoclinic, cubic, orthorhombic, trigonal and triclinic solid cases, respectively.

All figures present symmetries to median and diagonal planes as per thermal conductivity tensor symmetry and imposed boundary conditions.

The results that seems qualitatively identical in bi-dimensional case for cubic/trigonal and monoclinic/triclinic solids, on the fact that  $k_{11} = k_{22}$  and  $k_{12} = 0$ ; however, in the three-dimensional case, they are clearly different because  $k_{33} \neq k_{11}$  and  $k_{33} \neq k_{22}$ , and also  $k_{12}$ ,  $k_{13}$  and  $k_{23}$  are different from 0.

In fig.5, temperature distribution is obviously different from the two previous cases because  $k_{11} = k_{22} = k_{33}$ , also  $k_{12}$ ,  $k_{13}$  and  $k_{23}$  are non-zero; the difference between the results shown in fig.4 and fig.8 is well visible because  $k_{13}$  and  $k_{23}$  are non-zero, which was expected in results discussion of the bi-dimensional case.

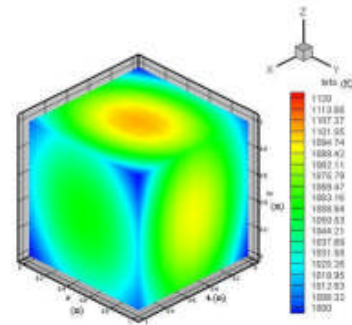


Figure 6. Orthorhombic solid

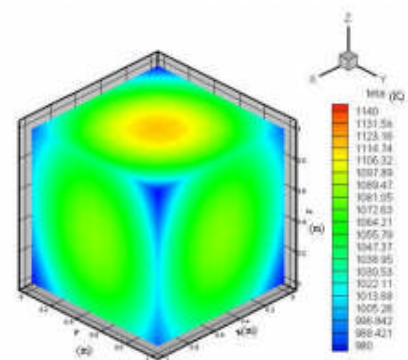


Figure 7. Trigonal solid

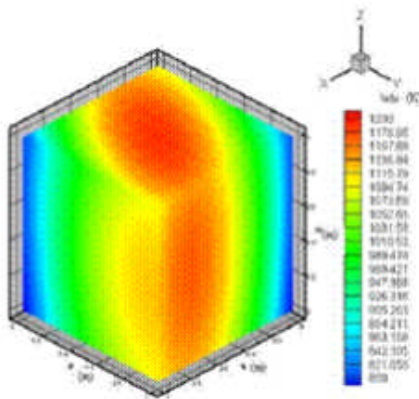


Figure 4. Monoclinic solid

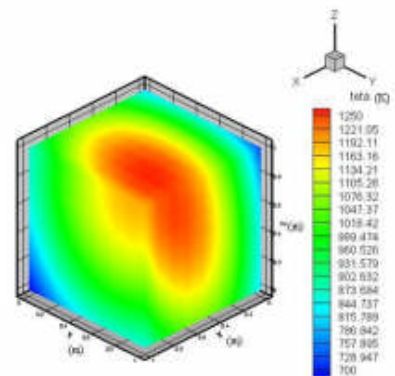


Figure 8. Triclinic solid

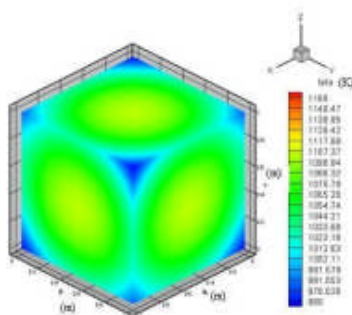


Figure 5. Cubic solid

### 8. Conclusion

Elaborated program enabled us to identify Fourier's law implementation to calculate temperature distribution within anisotropic solids in tridimensional case.

Results agreed with heat conduction theory and crystalline systems symmetry. These results can contribute to calculate thermal elastic strains of anisotropic solids in tridimensional case which will be used as data for subsequent thermo-mechanical strain calculations in anisotropic solids.

### References

- [1] S. Bouzid1, A.C. Boumaza, et M. Afrid, *Revue des Energies Renouvelables* (2008), 103 - 111
- [2] D.W. Halm, M.N. Özisik, *Heat Conduction*, 3rd Eds, John Wiley & Sons (2012).
- [3] K.H. Huebner, D.L. Dewhurst, D.E. Smith, T.G. Byron, *The Finite Element Method for Engineers*, 4th Eds, John Wiley & Sons, (2001), 349-351
- [4] K.H. Huebner, , *The Finite Element Method for Engineers*, 2nd Eds, John Wiley & Sons, (1982), 407
- [5] R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K. Seetkaranu, *Fundamentals of Finite Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow*, Eds, John Wiley & Sons, (2008), 80-85.
- [6] A.M. Bianchi, Y. Fauterelle, J. Etay, *Transferts Thermiques*, 1st Eds, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, (2004), 351-353
- [7] B. André, D. Vriendt, *Transmission de la Chaleur, la conduction*, 3rd Eds, G. Morin, (1989).
- [8] J. Crabol, *Transferts de chaleur*, 2, Eds Masson, (1990)



## RESUME

Notre travail concerne la modélisation numérique du transfert de chaleur par conduction stationnaire dans un matériau anisotrope tridimensionnel **3D** soumis à une source de chaleur interne. L'élaboration de la solution numérique est basée sur la méthode des éléments finis **MEF**, utilisant la méthode variationnelle d'intégration dite de **Galerkin**, pour résoudre l'équation aux dérivées partielles **EDP** de **Fourier**. Ce modèle numérique représente un outil de calcul du champs de température permettant l'évaluation des déformations résultants d'une sollicitation thermique lors des études de comportement des pièces ou structures à caractère anisotrope et ce pour tout type d'anisotropie, vue que la majorité des études faites dans ce domaine se limitent aux matériaux orthotropes ou isotropes transverses, spécialement quand il s'agit du cas tridimensionnel. Nous avons donc choisi pour notre étude un domaine de forme cubique de dimensions unité, dans un repère cartésien, que nous avons supposé soumis à la génération d'une source de chaleur interne et échangeant avec le milieu extérieur par convection avec un coefficient superficiel  $h$ . Nous avons d'abord procédé à la discrétisation du domaine géométrique par des éléments cubiques à huit (8) nœuds, ce qui nous a amené à une formulation compliquée, par suite nous avons pensé à procéder à un découpage en sous domaines tétraédriques à quatre nœuds (4), là nous avons commencé par gérer un maillage automatique pouvant assurer un nombre important de nœuds et d'éléments. Ensuite, nous somme passé à la discrétisation de l'équation aux dérivées partielles, où nous avons obtenu la **matrice de rigidité élémentaire**  $[K]^e$ , ainsi que le **vecteur charge élémentaire**  $\{B\}^e$ . L'étape suivante est l'assemblage de toutes les matrices et vecteurs élémentaires, pour aboutir à un système d'équations linéaires. Nous avons enfin adopté pour la résolution de ce système la méthode de décomposition **LU**, dite de **Crout**. L'opération est assurée ensuite pour tout les éléments du domaine de façon automatique et ce à l'aide du programme que nous avons écrits en **langage Fortran**. Le programme obtenu a été appliqué pour différents systèmes cristallins : monoclinique, triclinique, orthorhombique, trigonal, cubique identifiés par leurs tenseurs de conductivité thermique  $[k_{ij}]$ , ce qui nous a permis de calculer le champ de température en tout point du domaine. Les profils de température correspondant à chaque type de solide sont illustrés par des graphes tracés à l'aide du logiciel de graphisme **Tecplot**. Ces résultats sont jugés en accord avec la théorie de transfert de chaleur et sont comparables avec quelques résultats cités dans la bibliographie. Enfin nous estimons ce travail comme une contribution à la réalisation d'un outil numérique permettant de prédire l'évolution de la température dans les structures composites tridimensionnelles, un outil qui, après extension sera capable de traiter des géométries et des conditions aux limites complexes et variées spécialement dans les cas où la réalisation des expériences est complexe à réaliser.

**Mots clés** : champ thermique, solide anisotrope, discrétisation, éléments finis, simulation



## Abstract

This work concerns the heat transfer numerical modeling by unsteady conduction in a **3D** three-dimensional anisotropic material subjected to an internal heat source. The numerical solution elaboration is based on the **MEF** finite element method, using the variational integration method called **Galerkin** method, to solve the **EDP Fourier's** partial differential equation. This numerical model represents a calculation tool of the temperature field that allows to evaluate the deformations resulting from a thermal stress during the studies of parts or structures behavior with anisotropic character, for any anisotropy type, since that the majority of the studies in this area are limited to transverse orthotropic or isotropic materials, especially when it comes to the three-dimensional case. Therefore, for our study, we have chosen a cubic domain of unit dimensions, in a Cartesian coordinate system, which we supposed to be subjected to an internal heat source **W** generation and exchanging with the external environment by convection with a surface coefficient **h**. We first proceeded to the discretization of the geometric domain by cubic elements with eight (8) nodes, which led us to a complicated formulation, and then we thought to proceed to a division into **tetrahedral** subdomains with four nodes (**4**), where we began by managing an automatic mesh that can ensure a large number of nodes and elements. Then we discretized the partial differential equation, where we obtained the elementary stiffness matrix  $[\mathbf{K}]^e$ , as well as the elementary charge vector  $\{\mathbf{B}\}^e$ . The next step is to assemble all the matrices and elementary vectors, to achieve a system of linear equations system. We have finally adopted the decomposition method **LU**, called Crout method to resolve this system. The operation is then ensured automatically for all domain elements through the program that we wrote in **FORTRAN** language. The obtained program was applied for different crystalline systems: monoclinic, triclinic, orthorhombic, trigonal, cubic that were identified by their thermal conductivity tensors  $[\mathbf{k}_{ij}]$ , which enabled us to calculate the temperature field at any point of the domain. The temperature profiles corresponding to each solid type are illustrated via graphs drawn by using the **Tecplot** graphics software. These results are seen to be in agreement with the heat transfer theory and are comparable with some results cited in the bibliography. Finally, we estimate that this work is a contribution to the achievement of a numerical tool to predict the evolution of temperature in three-dimensional composite structures, a tool which, after extension, will be able to deal with complex and varied geometries and conditions especially in cases where the realization of experiments is complex to achieve.

**Key words:** *thermal field, anisotropic solid, discretization, finite elements, simulation*

## ملخص

تتعلق هذه الدراسة بإنجاز نموذج عددي لنقل الحرارة غير الثابتة في المواد ثلاثية الأبعاد المتباينة الخاضعة لمصدر حرارة داخلي. يستند تطوير الحل العددي على طريقة العناصر المحدودة MEF ، باستخدام ما يسمى طريقة التكامل المتغيرة Galerkin لحل المعادلة التفاضلية الجزئية ل Fourier .

هذا النموذج الرقمي هو أداة لحساب حقل درجة الحرارة لتقييم التشوهات الناتجة عن الإجهاد الحراري أثناء دراسة سلوك القطع والهياكل ذات الطابع المتباين الخواص وذلك لمختلف أنواع التباين ، نظرا لكون غالبية الدراسات في هذا المجال تقتصر على المواد المتناحية العظمية أو المستعرضة ، خاصة عندما يتعلق الأمر بالحالة الثلاثية الأبعاد. لذلك اخترنا لدراستنا نطاقاً مكعباً ذو ثلاث أبعاد تساوي الوحدة ، في نظام إحداثيات ديكارتية ، والذي من افتراضنا أن يتم إخضاعه لتوليد مصدر حرارة داخلي  $W$  ويتبادل مع الوسط الخارجي عن طريق الحمل الحراري بواسطة معامل النقل الحراري السطحي  $h$  .

لقد شرعنا بداية في تقطيع المجال الهندسي بواسطة عناصر محدودة ذات شكل مكعب بثمانية (8) عقد، مما أدى بنا إلى صياغة معقدة ، لذلك فكرنا في الانتقال إلى التقسيم إلى نطاقات فرعية رباعية السطوح بأربعة عقد (4) ، وهنا بدأنا بتسيير شبكة أوتوماتيكية يمكن أن تضمن عدداً كبيراً من العقد والعناصر. بعدها انتقلنا إلى مرحلة تمييز المعادلة التفاضلية الجزئية ، حيث حصلنا على مصفوفة الصلابة الأولية  $[K]$  وكذلك شعاع الشحنة الأولية  $\{B\}$  .

الخطوة التالية كانت تجميع كل المصفوفات والنواقل الأولية ، للوصول إلى جملة معادلات خطية. لقد اعتمدنا أخيراً لحل هذه الجملة طريقة التحليل LU المعروفة بطريقة Crout. و يتم ضمان العملية لجميع عناصر النطاق محل الدراسة تلقائياً واستخدام البرنامج الإعلامي الذي كتبناه بلغة Fortran تم تطبيق البرنامج الناتج لمختلف أنظمة الكريستال: أحادي، ثلاثي، معيني متعامد المحاور، ثلاثي الزوايا و متناح و المتميزة كل واحدة بواسطة موثر التوصيل الحراري  $[k_{ij}]$  ، مما سمح لنا بحساب درجة الحرارة داخل مجال الدراسة. ثم قمنا بتمثيل شكل منحنى درجة الحرارة الخاص بكل نوع من أنواع المواد الصلبة السابقة الذكر ، وهذا بواسطة رسوم بيانية باستخدام برنامج رسومات Tecplot .

بعد معاينة و تحليل النتائج المحصل عليها، يتم الحكم على هذه النتائج بالاتفاق مع نظرية نقل الحرارة وقابلة للمقارنة مع بعض النتائج المذكورة في الببليوغرافيا. وأخيراً ، فإننا نقدر هذا العمل كمساهمة في تحقيق أداة عددية للتنبؤ بتطور درجة الحرارة في الهياكل المركبة ثلاثية الأبعاد ، وهي أداة ، بعد التوسيع ، ستكون قادرة على التطرق لأشكال هندسية مختلفة وظروف محيطية متنوعة خاصة في الحالات التي يكون فيها تحقيق التجارب أمراً معقد التحقيق.

**كلمات مفتاحية:** الحقل الحراري، متباين الخواص ، تفريد، محاكاة، العناصر المحدودة