République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l.enseignement Supérieure et de la Recherche Scienti.que
Université larbi ben m.hidi .Oum el .Bouaghi
Faculté des Sciences Exacte et Sciences de la Nature et de la vie
Département de Mathématiques et Informatique
Ecole Doctorale de Mathématiques
n_d0ordre : : : : : : : :::::
S_erie :

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de magister en Mathématiques

Intitulé

Existence et unicité des solutions de certains problèmes aux limites non linéaires

Option
Mathématiques appliquées
par
Aoua. Rabiaa

Membre de jury :

Mr AYADI Abdelhamid Professeur Université d.Oum el Bouaghi Président
Mr AJEROUD Nacer maître de conférences (A)C. Universitaire de Khenchela Rapporteur
Mr BOUZIT Mohamed maître de conférences(A)Université d.Oum El Bouaghi Examinateur
Mr HITA Amara maître de conférences (A). Université de Guelma Examinateur

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université larbi ben m'hidi –Oum el –Bouaghi

Faculté des Sciences Exacte et Sciences de la Nature et de la vie

Département de Mathématiques et Informatique

Ecole Doctorale de Mathématiques

n°d'ordre : ....

Série :

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de magister en Mathématiques

Intitulé

Existence et unicité des solutions de certains problèmes aux limites non linéaires

Option

Mathématiques appliquées

par

Aouafi Rabiaa

Membre de jury :

Mr AYADI Abdelhamid	Professeur	Université d'Oum el Bouaghi	Président
Mr AJEROUD Nacer	maître de conférences (A)	C. Universitaire de Khenchela	Rapporteur
Mr BOUZIT Mohamed	maître de conférences(A)	Université d'Oum El Bouaghi	Examinateur
Mr HITA Amara	maître de conférences (A).	Université de Guelma	Examinateur

Remerciements.

Arrivé au terme de la rédaction de ce mémoire, il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma gratitude et mes remerciements à tous ceux qui, par leur enseignement, leur soutien et leurs conseils, m'ont aidé à sa réalisation.

Je tiens d'abord à exprimer tout le respect et toute ma reconnaissance à

M. AJEROUD NACER. qui m'a honoré de sa confiance en m'acceptant et en me formant. Directeur de recherche, il m'a encouragé, et il m'a permis de poursuivre mon travail de recherche dans un esprit scientifique rigoureux. Son écoute attentive et ininterrompue, ses lectures, ses conseils inestimables, ses encouragements, son aide et son soutien inconditionné.

Egalement, je remercie les honorables membres de jury Mrs AYADI Abdelhamid, BOUZIT Mohamed, HITA Amara d'avoir pris le temps de lire, juger et examiner mon modeste travail de recherche.

Par ailleurs , je tiens à exprimer chaleureusement toute ma gratitude à Mme SANDEL Saida , pour sa bienveillance, son bon cœur et son assistance.

Sans oublier mes parents, qu'ils trouvent dans ce travail, l'expression de ma reconnaissance, mon amour et mon estime.

A tous les membres de ma famille, mes amies et tous les gens qui me sont venus en aide au cours de l'élaboration de ce travail.

A vous tous un grand merci .

Table des matières

0.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires sont devenues une importante branche des mathématiques dans les trente dernières années à cause de leurs applications dans plusieurs domaine de la science et de l'ingénierie.

Récemment il existe des articles qui étudient l'existence des solutions des équations différentielles non linéaires d'ordre fractionnaire.

Dans[1] par application du théoréme du point fixe sur un cône ; S.Zhang étudie l'existence et la multiplicité des solutions positives pour le problème.

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} u(t) = f\left(t, u(t), {}^{c}D_{0^+}^{\beta} u(t)\right); \ 0 < t < 1 \\ u(0) + u'(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0, \end{cases}$$

où $1 < \alpha \leq 2$ et ${}^{c}D_{0^+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire aux sens de Caputo.

Dans [2] l'auteur démontra l'existence de trois solutions positives pour le problème

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} u(t) + a(t) \ f\left(t, u(t), u''(t)\right) = 0; \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

où $3 < \alpha \leq 4$; et $D_{0^+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire standard aux sens de Riemann-Liouville, par utilisation du théorème du point fixe dù à Bai et Ge.

Dans [3], les auteurs étudient l'existence et l'unicité des solutions pour le problème

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} u(t) = f\left(t, u(t), {}^{C}D_{0^+}^{\beta} u(t)\right) \qquad 0 < t < 1 \\ a_1 u(0) - a_2 u'(0) = A, \ b_1 u(1) + b_2 u'(1) = B, \end{cases}$$

où $0 < \beta \leq 1$, $1 < \alpha \leq 2$, ${}^{C}D_{0^+}^{\alpha}$ et ${}^{C}D_{0^+}^{\beta}$ sont les dérivées fractionnaires aux sens de Caputo, par l'application des théorèmes du point fixe de Banach et de Schauder.

Motivé par les résultats précédents, nous étudions dans ce travail l'existence et l'unicité des solutions pour le problème mixte suivant

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}u(t) = f\left(t, u(t), {}^{C}D_{0^+}^{\beta}u(t)\right) & 0 < t < 1 \\ u(0) = \int_0^1 p(s, u(s))\,ds, \ -au'(0) + bu'(1) = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

où $0 < \beta \leq 1$, $1 < \alpha \leq 2$, et $f \in C([0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a, b > 0$, $a > b$ et p est une fonction donnée (connue), par le moyen du principe de l'application cantractante et du théorème de Banach.

D'autre part nous considérons un autre problème d'une équation différentielle non linèaire avec des conditions aux limites a multipoints

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x, x', x'') = 0 \quad t \in [0,1] \\ x(0) = x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\eta_i) \end{cases}$$

Nous supposons que : $a_i > 0$ pour $i = 1, 2, ..., m-2$ et $\eta_i : 0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < 1$ et $\sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1; 0 \leq t \leq 1$. par application du théorème du point fixe de Schauder nous montrons que ce problème admet une solution positive et symétrique.

Chapitre 1

Rappels

Le but de ce chapitre est de rappeler certaines notions et résultats d'analyse fonctionnelle qui seront utilisées de notre étude, en particulier la définition de la fonction de Green d'un opérateur linéaire et le rappel de quelques théorèmes du point fixe.

1.1 Fonctionnelle convexe, cône et applications contractantes

Définition1.1. 1 *Un ensemble K dans espace vectoriel normé E est dit convexe si tout segment reliant deux points quelconques $x, y \in K$ est inclus dans K.*

Définition1.1. 2 *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. Un ensemble $K \neq \emptyset$ convexe, fermé de E est appelé cône si :*

- $au \in K$ $\forall u \in K$ et $\forall a \geq 0$,

- Si $u, -u \in K$ alors $u = 0$.

Définition1.1. 3 *Une application* φ *est dite fonctionnelle convexe non négative continue sur* $K \subset E$, E *un espace de Banach. Si* $\varphi : K \longmapsto \mathbb{R}^+$ *est continue et* $\varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y), \forall x, y \in K$ *et* $0 \leq \lambda \leq 1$.

Définition1.1. 4 *Soit* E *un espace de Banach, et* $T : E \longmapsto E$ *un opérateur non linéaire. Un point* $\overline{x}$ *est appelé point fixe de* T *si* $T(\overline{x}) = \overline{x}$.

Définition1.1. 5 *On dit que l'opérateur* T *est un opérateur contractant (ou simplement une contraction) sur* $\Omega \subset D\ (T)$ *,s'il existe* $k \in]0, 1[$ *tel que pour* $x, y \in \Omega$

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|,$$

le nombre k *s'appelle rapport de la contraction* T.

Définition1.1. 6 *Une famille de fonctions* $F = \{\varphi_i\}_{i\ \in I}$ *, définies sur un intervalle* $[a, b]$*, est dite uniformément bornée, s'il existe une constante* $k > 0$ *telle que* $|\varphi_i(x)| < k$ *pour tous les* $x \in [a, b]$ *et pour toutes* $\varphi_i \in F$.

Définition1.1. 7 *Une famille* $F = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ *est dite équicontinue, si* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 :$ $\forall x, y \in [a, b]$ *vérifiant* $|x - y| < \delta \Rightarrow |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < \epsilon$*, pour toutes les fonctions de* F.

Théorème1.1 (d'Arzela).

Pour qu'une famille F de fonctions continues et définies sur $[a, b]$ soit compacte dans $C[a, b]$, il faut et il suffit que les fonctions de F soient

1) uniformèment bornées

2) équicontinues

Définition1.1. 8 *Un opérateur $T : E \longmapsto E,\ E$ un espace de Banach est dit compact (où complètement continu), s'il est continu et applique des ensembles bornés dans des ensembles précompacts (c'est-à-dire sa fermeture dans E est compacte).*

Nous énonçons et sans démonstrations des théorèmes d'une grande application dans la théorie des équations différentielles non linéaires.

Théorème1.2 (principe de Schauder).

Soit T un opérateur qui applique une partie convexe et compacte D d'un espace de Banach E dans lui même ($TD \subset D$). Si T est compacte sur D, Alors il admet un point fixe dans D.

Théorème1.3 (de Krasnoselskii).

Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. supposons que Ω_1, Ω_2 sont deux sous ensembles ouverts de E avec $0 \in \Omega_1, \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et soit

$$T : K \cap \left(\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1\right) \mapsto K$$

un opérateur continu et compact tel que l'on ait l'une des conditions suivantes

(i) $\|Tu\| \geq \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Tu\| \leq \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$,

(ii) $\|Tu\| \leq \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Tu\| \geq \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors l'opérateur T admet un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1\right)$.

Théorème 1.4 (de Banach).

Supposons que l'opérateur T appliquant une partie fermée et bornée M d'un espace de Banach E dans lui-même est une contraction sur M de rapport k. Alors T admet dans M un point fixe unique $x^* : T(x^*) = x^*$.

1.2 Quelques fonctions utilisées dans notre étude

La fonction gamma [4]

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler, son interpretation est simplement la généralisation du factoriel n $(n!)$ et elle perment à n de prendre des valeurs non entieres.

Définition 1.2.1 La fonction intégrale Gamma est donnée par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \qquad z > 0$$

Elle est plus souvent utilisée si elle est restreinte aux valeurs positives de z .

L'intégration par parties conduit à la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\ \Gamma(z)$$

Puisque $\Gamma(1) = 1$, nous obtenons pour $z = 1, 2, 3, ...$la relation bien connue

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

La fonction de Green

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de beaucoups d'équations différentielles linéaires et non linéaires.

Définition 1.2.2 La fonction de Green pour un opérateur L est sous éutidie être la fonction $G(x,s)$ satisfaisant les conditions suivantes

1). $G(x,s)$ est continue et admet des derivées continues par rapport à x à l'ordre $(n-2)$, pour toutes les valeurs x et $s \in [a,b]$

2). Pour chaque s fixe dans $]a, b[$, la fonction $G(x, s)$ admet des dérivées continues d'ordre $(n-1)$ et n par rapport à x dans chacun des intervalles $[a, s[$ et $]s, b]$.

la $(n-1)$- ième dérivée est discontune en $x = s$, avec saut $\frac{1}{p_0(s)}$

3). Dans chacun des intervalles $[a, s[$ et $]s, b]$, $G(x, s)$ considerée comme une fonction de la variable x vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^{n-1}G(s+0,s)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1}G(s-0,s)}{\partial x^{n-1}} = \frac{1}{p_0(s)}$$

1.3 Intégrales et dérivées fractionnaires

Pour completer, nous énonçons les définitions fondamentales sur les dérivées fractionnaires aux sens de Caputo qui peuvent être obtenues dans [5, 6]

Définition 1.3.1 Pour une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordere α peut être écrite comme suit

$$I_{0^+}^{\alpha} f \ (t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

où $n = [\alpha] + 1$, et $[\alpha]$ désignent la partie entière du nombre réel α

Définition 1.3.2 Pour une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, l'expression

$$D_{0^+}^{\alpha} f \ (t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds,$$

où $n = [\alpha] + 1$, et $[\alpha]$ désignent la partie entière du nombre réel α est appelée la dérivée fractionnaire d'ordere α aux sens de Riemann-Liouville.

Définition 1.3.3 Pour une fonction $f\ :\ [0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, la dérivée fractionnaire d'ordere α aux sens de Caputo est donnée par

$$ {}^{C}D\,_{0^{+}}^{\alpha}f\ \ (t)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{0}^{t}\frac{f\ ^{(n)}\left(s\right)}{\left(t-s\right)^{\alpha-n+1}}ds $$

où $n=[\alpha]+1$, et $[\alpha]$ désignent la partie entière du nombre réel α

Remarque Sous les conditions naturelles de la fonction $f\left(t\right)$, si $\alpha\ =\ n$ la dérivée de Caputo d'order α devient la dérivée habituelle d'order n. si $\alpha=n$ est entier la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est la dérivée usuelle d'order n, nous avons les propriétés suivantes

$$ I\,_{0^{+}}^{\alpha}I\,_{0^{+}}^{\beta}f\ \ (t)=I\,_{0^{+}}^{\alpha+\beta}f\ \ (t)\,\text{,et }\alpha,\ \beta>0,f\ \in L^{1}\left(0,1\right),\text{et }I\,_{0^{+}}^{\alpha}:C\left[0,1\right]\rightarrow C\left[0;1\right] $$

et

$$ D\,_{0^{+}}^{\alpha}I\,_{0^{+}}^{\alpha}f\ \ (t)=f\ \ (t)\ \text{ et }\alpha,\ \beta>0,f\ \in L^{1}\left(0,1\right),\text{et }I\,_{0^{+}}^{\alpha}:C\left[0,1\right]\rightarrow C\left[0;1\right] $$

et

$$ {}^{C}D_{0^{+}}^{\alpha}f\ \ (t)=D_{0^{+}}^{\alpha}\left(f\ \ (t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f\ ^{(k)}\left(t\right)}{k!}t^{k}\right),\alpha>0 $$

Lemme 1.5.

on suppose que $u\in C\left(0,1\right)\cap L^{1}\left(0,1\right)$ alors

$$ I\,_{0^{+}}^{\alpha}\ {}^{C}D_{0^{+}}^{\alpha}u\left(t\right)=u\left(t\right)+c_{0}+c_{1}t+c_{2}t^{2}+...+c_{n-1}t^{n-1}, $$

où $c_{i}\in\mathbb{R},i=1,2,...,n-1$ et $n=[\alpha]+1,\alpha>0$.

Chapitre 2

Existence et unicité des soulitions pour une équation différentielle fractionnaire avec des condition aux limites mixtes

Lemme 2.1. Soit $h(t) \in C[0,1]$ une fonction donnée et $1 < \alpha \leq 2$. Le problème aux limites

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^{+}}^{\alpha} u(t) = h(t) \qquad 0 < t < 1 \\ u(0) = \int_0^1 p(s, u(s))\, ds, \\ -au'(0) + bu'(1) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

admet une solution unique

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ &\quad + \frac{b(\alpha-1)t}{(a-b)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s)\, ds \\ &\quad + \int_0^1 p(s, u(s))\, ds \end{aligned}$$

preuve . D'après le lemme1.5. nous avons

$$\begin{aligned} u(t) &= I_{0^+}^{\alpha} h\ (t) - c_0 - c_1 t \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \textstyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds\ - c_0 - c_1 t \end{aligned}$$

et

$$u'(t) = \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} h(s)\, ds\ - c_1.$$

nous obtenons

$$c_0 = -u(0) = -\int_0^1 p(s, u(s))\, ds$$

et

$$u'(0) = -c_1,$$

et

$$u'(1) = \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s)\, ds\ - c_1.$$

Il suit que

$$-au'(0) + bu'(1) = ac_1 + \frac{(\alpha-1)b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s)\, ds\ - bc_1,$$

alors on obtient

$$c_1 = \frac{-(\alpha-1)\,b}{(a-b)\ \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\, h(s)\, ds.$$

Finalement

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, h(s)\, ds \\ &\quad + \frac{(\alpha-1)\,bt}{(a-b)\ \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\, h(s)\, ds \\ &\quad + \int_0^1 p(s, u(s))\, ds. \end{aligned}$$

2.1 Résultats essentiels

Dans cette section, nous considérons l'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites (0.1). Soit $I = [0,1]$ et $C(I)$ l'espace de toutes les fonctions réelles continues définies sur I , et définissons l'espace

$$X = \left\{ u(t) : u(t) \in C(I) \ \text{et}\, {}^{C}D_{0^+}^{B} u(t) \in C(I), 0 < \beta \leqslant 1 \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_X = c_1 \, |u|_\infty + c_2 \left| {}^{C}D_{0+}^{\beta} u \right|_\infty, \tag{2.2}$$

où

$$|u|_\infty = \max_{0 \leq\ t\ \leq 1} |u(t)| \text{ ,et } \left| {}^{c}D_{0+}^{\beta} u \right|_\infty = \max_{0 \leq\ t\ \leq 1} \left| {}^{c}D_{0+}^{\beta} u(t) \right|$$

alors par la méthode utilisée dans $[7, \text{lemme3,2}]$, $(X, \|.\|_X)$ est un espace de Banach

Lemme 2.2. Supposons $0 < \beta \leq 1$, $1 < \alpha \leq 2$, $f : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a, b > 0$, $a > b$ et P est une fonction donnée, alors le problème $(0,1)$ est equivalent à l'équation intégrale

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, f\left(s, u(s), {}^c D_{0^+}^{\beta} u(s)\right) + \int_0^1 p(s, u(s))\, ds, \tag{2.3}$$

où

$$G(t;s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\alpha-1)bt(1-s)^{\alpha-2}}{(a-b)\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(\alpha-1)bt(1-s)^{\alpha-2}}{(a-b)\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

ou bien chaque solution de (0.1) est aussi solution de (2.3) et vice versa .

Preuve. Supposons que $u \in X$ est solution de (2.3) et denotons le membre droit par $Z(t)$, alors on a

$$Z(t) = \int_0^1 G(t,s)\, f\left(s, u(s), {}^C D_{0^+}^{\beta} u(s)\right) ds + \int_0^1 p(s, u(s))\, ds,$$

et

$$Z(t) = I_{0^+}^{\alpha} f\left(t, u(t), {}^C D_{0^+}^{\beta} u(t)\right) + \frac{bt}{a-b} I_{0^+}^{\alpha-1} f\left(1, u(1), {}^C D_{0^+}^{\beta} u(1)\right) + \int_0^1 p(s, u(s))\, ds,$$

et

$$Z'(t) = D^1_{0^+} I^1_{0^+} I^{\alpha-1}_{0^+} f\left(t, u(t), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(t)\right) + \frac{b}{a-b} I^{\alpha-1}_{0^+} f\ \left(1, u(1), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(1)\right),$$

et

$$\begin{aligned} Z''(t) &= D^1_{0^+} I^{\alpha-1}_{0^+} f\ \left(t, u(t), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(t)\right) \\ &= D^{2-\alpha}_{0^+} f\ \left(t, u(t), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(t)\right), \end{aligned}$$

par la suite

$$\begin{aligned} {}^C D^{\alpha}_{0^+} Z(t) &= I^{2-\alpha}_{0^+} Z''(t) \\ &= I^{2-\alpha}_{0^+} D^{2-\alpha}_{0^+} f\ \left(t, u(t), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(t)\right) \\ &= f\ \left(t, u(t), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(t)\right). \end{aligned}$$

en d'autres termes on peut vérifier que

$$u(0) = \int_0^1 p(s, u(s))\, ds$$

$$\begin{aligned} bu'(1) &= \frac{b(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f\ \left(s, u(s), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(s)\right) ds \\ &\quad + \frac{(\alpha-1) b^2}{(a-b)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f\ \left(s, u(s) {}^C D^{\beta}_{0^+} u(s)\right) ds, \end{aligned}$$

et

$$-au'(0) = \frac{-(\alpha-1) ab}{(a-b)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f\ \left(s, u(s), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(s)\right) ds.$$

Il suit que

$$u(0) = \int_0^1 p(s, u(s))\, ds,\ -au'(0) + bu'(1) = 0,$$

par la suite $u \in X$ est une solution de (0.1).

Réciproquement soit $u \in X$ une solution du problème (0.1), par la méthode utilisée dans la preuve du lemme 2.1, on obtient que $u \in X$ est une solution de (2.3). Nous prouvons que $G(t,s)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ sont intégrabls sur $[0,1]$, qui par la suite seront utiles. Pour chaque $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |G(t,s)|\, ds \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, ds + \frac{(\alpha-1)\, bt}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\, ds \\
= & \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{bt}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)} \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)} \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{b}{(a-b)}\right) \\
= & \frac{a}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\right| ds \leq & \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\, ds + \frac{b\,(\alpha-1)}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\, ds \\
= & \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{b\,(\alpha-1)}{(a-b)\,(\alpha-1)\,\Gamma(\alpha)} \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{b}{(a-b)}\right) \\
= & \frac{a}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

Théorème 2.3. Supposons que (H_1) : la fonction $p \in C\ ([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$,il existe une fonction $\varphi \in C\ ([0,1], \mathbb{R}^+)$ et une constante $L : 0 < L < 1$, telle que

$$|p(s,x) - p(s,y)| \leq \varphi(s)\, |x-y|, \forall s \in [0,1], \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

et

$$\|\varphi\| < L, \|\varphi\| = \max_{0\leq\ t\ \leq 1} |\varphi(t)|$$

(H_2) : $f \in C\ \ ([0,1]\,\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ il existe une constante $0 < c_2 < \frac{L-M_2}{M_1}c_1$ et $\theta_1, \theta_2 \geqslant 0$ telle que

$$\theta_1 \leq \frac{c_1(L-\|\varphi\|)(a-b)\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)}{a\left(c_2+c_1\Gamma\left(2-\beta\right)\right)},\ \ \theta_2 \leq \frac{Lc_2\left(a-b\right)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(2-\beta\right)}{a\left(c_2+c_1\Gamma\left(2-\beta\right)\right)},$$

avec

$$\left|f\left(t,u_1,v_1\right)-f\left(t,u_2,v_2\right)\right| \leq \theta_1\left|u_1-u_2\right|+\theta_2\left|v_1-v_2\right|,$$

pour tout $t \in [0,1]$ et $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Alors le problème aux limites (0.1) admet une solution unique.

preuve Considérons l'opérateur $T : X \to X$ défini par

$$Tu\left(t\right) = \int_0^1 G\left(t,s\right) f\ \ \left(s, u\left(s\right), {}^C D^{\beta}_{0^+} u\left(s\right)\right) ds + \gamma\left(t\right),$$

où

$$\gamma\left(t\right) = \int_0^1 p\left(s, u\left(s\right)\right) ds.$$

Alors $u\left(t\right)$ est la solution du problème aux limites si et seulement si $u\left(t\right)$ est le point fixe de T et l'opérateur $T : X \to X$ est un opérateur continu et compact sur X. Nous prouvons que T admet un point fixe unique sur X.

Soient $u, v \in X$ on obtient que

$$\left|Tu\left(t\right)-Tv\left(t\right)\right| = \left|\int_0^1 G\left(t,s\right)(f\ \ \left(s,u\left(s\right), {}^C D^{\beta}_{0^+} u\left(s\right)\right)\right.$$

$$-f\left(s,v\left(s\right),^{C}D_{0^{+}}^{\beta}v\left(s\right)\right))ds$$

$$+\int_{0}^{1}\left(p\left(s,u\left(s\right)\right)-p\left(s,v\left(s\right)\right)\right)ds\Big|,$$

et

$$\begin{aligned}
\left|Tu\left(t\right)-Tv\left(t\right)\right| &\leq \int_{0}^{1}\left|G\left(t,s\right)\right|\left|f\left(s,u\left(s\right),^{C}D_{0^{+}}^{\beta}u\left(s\right)\right)\right. \\
&\quad \left.-f\left(s,v\left(s\right),^{C}D_{0^{+}}^{\beta}v\left(s\right)\right)\right|ds \\
&\quad +\int_{0}^{1}\left|p\left(s,u\left(s\right)\right)-p\left(s,v\left(s\right)\right)\right|ds \\
&\leq \left(\theta_{1}\left|u-v\right|_{\infty}+\theta_{2}\left|^{C}D_{0^{+}}^{\beta}u-^{C}D_{0^{+}}^{\beta}v\right|_{\infty}\right)\int_{0}^{1}\left|G\left(t,s\right)\right|ds \\
&\quad +\left|u-v\right|_{\infty}\int_{0}^{1}\varphi\left(s\right)ds \\
&\leq \left(\theta_{1}\left|u-v\right|_{\infty}+\theta_{2}\left|^{C}D_{0^{+}}^{\beta}u-^{C}D_{0^{+}}^{\beta}v\right|_{\infty}\right)\int_{0}^{1}\left|G\left(t,s\right)ds\right| \\
&\quad +\left\|\varphi\right\|\left|u-v\right|_{\infty} \\
&\leq \frac{a}{\left(a-b\right)\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\theta_{1}\left|u-v\right|_{\infty}+\theta_{2}\left|^{C}D_{0^{+}}^{\beta}u-^{C}D_{0^{+}}^{\beta}v\right|\right) \\
&\quad +\left\|\varphi\right\|\left|u-v\right|_{\infty} \\
&= \left(\frac{a\ \theta_{1}}{\left(a-b\right)\Gamma\left(\alpha\right)}+\left\|\varphi\right\|\right)\left|u-v\right|_{\infty} \\
&\quad +\frac{a\ \theta_{2}}{\left(a-b\right)\Gamma\left(\alpha\right)}\times\left|^{C}D_{0^{+}}^{\beta}u-^{C}D_{0^{+}}^{\beta}v\right|.
\end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
\left|Tu-Tv\right|_{\infty} &\leq \left(\frac{a\ \theta_{1}}{\left(a-b\right)\Gamma\left(\alpha\right)}+\left\|\varphi\right\|\right)\left|u-v\right|_{\infty} \\
&\quad +\frac{a\ \theta_{2}}{\left(a-b\right)\Gamma\left(\alpha\right)}\times\left|^{C}D_{0^{+}}^{\beta}u-^{C}D_{0^{+}}^{\beta}v\right|_{\infty}\ ,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

comme

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, u(s), {}^C D_{0^+}^{\beta} u(s)\right) ds + \gamma(t),$$

alors

$${}^C D_{0^+}^{\beta} (Tu)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (Tu)'(s)\, ds,$$

et

$$\begin{aligned}{}^C D_{0^+}^{\beta} (Tu)(t) = & \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \\ & \times \left(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,r) f\left(r, u(r), {}^C D_{0^+}^{\beta} u(r)\right) dr + \gamma'(s) \right) ds,\end{aligned}$$

d'où nous avons

$$\left| {}^C D_{0^+}^{\beta} (Tu)(t) - {}^C D_{0^+}^{\beta} (Tv)(t) \right| = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left| \int_0^t (t-s)^{-\beta} \left((Tu)'(s) - (Tv)'(s) \right) ds \right|,$$

et

$$\begin{aligned}\left| {}^C D_{0^+}^{\beta} (Tu)(t) - {}^C D_{0^+}^{\beta} (Tv)(t) \right| &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \Big| \int_0^t (t-s)^{-\beta} \Big(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,r) \\ &\quad \times f\left(r, u(r), {}^C D_{0^+}^{\beta} u(r)\right) dr + \gamma'(s) \Big) ds \\ &\quad - \int_0^t (t-s)^{-\beta} \Big(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,r) \\ &\quad \times f\left(r, v(r), {}^C D_{0^+}^{\beta} v(r)\right) dr + \gamma'(s)\, ds \Big| \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \Big| \int_0^t (t-s)^{-\beta} \Big(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,r) \\ &\quad \times \Big(f\left(r, u(r), {}^C D_{0^+}^{\beta} u(r)\right) \\ &\quad - f\left(r, v(r), {}^C D_{0^+}^{\beta} v(r)\right) \Big) dr \Big) ds \Big| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \Big(\int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial s}(s,r) \right| \\ &\quad \times \Big| f\left(r, u(r), {}^C D_{0^+}^{\beta} u(r)\right) \\ &\quad - f\left(r, v(r), {}^C D_{0^+}^{\beta} v(r)\right) \Big| dr \Big)\, ds,\end{aligned}$$

ainsi on obtient

$$\begin{aligned}\left|{}^{C}D_{0^+}^{\beta}(Tu)(t)-{}^{C}D_{0^+}^{\beta}(Tv)(t)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\theta_1|u-v|_\infty+\theta_2\left|{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u-D_{0^+}^{\beta}v\right|_\infty\right)\\ &\quad\times\int_0^t(t-s)^{-\beta}\left(\int_0^1\left|\frac{\partial G}{\partial s}(s,r)\right|dr\right)ds,\end{aligned}$$

i.e,

$$\begin{aligned}\left|{}^{C}D_{0^+}^{\beta}(Tu)(t)-{}^{C}D_{0^+}^{\beta}(Tv)(t)\right| &\leq \frac{a}{(a-b)\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)}\\ &\quad\times\left(\theta_1|u-v|_\infty+\theta_2\left|{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u-{}^{C}D_{0^+}^{\beta}v\right|_\infty\right)\end{aligned}$$

finalement nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|{}^{C}D_{0^+}^{\beta}(Tu)-{}^{C}D_{0^+}^{\beta}(Tv)\right|_\infty &\leq \frac{a\ \theta_1}{(a-b)\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)}|u-v|_\infty\\ &\quad+\frac{a\ \theta_2}{(a-b)\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)}\left|{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u-{}^{C}D_{0^+}^{\beta}v\right|_\infty\end{aligned}\tag{2.5}$$

d'après (2.4) et (2.5)on obtient que

$$\|Tu-Tv\|=c_1|Tu-Tv|_\infty+c_2\left|{}^{C}D_{0^+}^{\beta}(Tu)-{}^{C}D_{0^+}^{\beta}(Tv)\right|_\infty$$

$$\begin{aligned}&\leq c_1\left(\frac{a\ \theta_1}{(a-b)\Gamma(\alpha)}+\|\varphi\|\right)|u-v|_\infty\\ &\quad+c_1\frac{a\ \theta_2}{(a-b)\Gamma(\alpha)}\times\left|{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u-{}^{C}D_{0^+}^{\beta}v\right|_\infty\\ &\quad+c_2\frac{a\ \theta_1}{(a-b)\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)}|u-v|_\infty\\ &\quad+c_2\frac{a\ \theta_2}{(a-b)\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)}\left|{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u-{}^{C}D_{0^+}^{\beta}v\right|_\infty\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a\ \theta_1 c_1}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)} + c_1 \|\varphi\| + \frac{a\ \theta_1 c_2}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(2-\beta)} \right) |u-v|_\infty$$

$$+ \left(\frac{a\ \theta_2 c_1}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)} + \frac{a\ \theta_2 c_2}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(2-\beta)} \right) \left| {}^C D_{0^+}^{\beta} u - {}^C D_{0^+}^{\beta} v \right|_\infty$$

$$\leq L \left(c_1 |u-v|_\infty + c_2 \left| {}^C D_{0^+}^{\beta} u - {}^C D_{0^+}^{\beta} v \right|_\infty \right)$$

$$= L \|u-v\|.$$

d'après le théorème du point fixe de Banach T est une aplication contractante, alors T admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème (0.1).

Nous présentons notre résultat essentiel

Théoreme 2.4. Supposons les hypothèses (H_1) et (H_2) dans le théorème $(2,3)$ vraies et

$$f(t,v,w) \geqslant 0, \forall (t,v,w) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$

$$p(s,u) \geqslant 0, \forall (s,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+.$$

alors le problème aux limites (0.1) admet une solution positive unique

preuve Le théorème 2.3 assure l'existence d'une solution unique pour le problème aux limites (0.1) telle que

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, f\left(s, u(s), {}^C D_{0^+}^{\beta} u(s)\right) ds + \int_0^1 p(s, u(s))\, ds$$

définissons

$$K = \{u(t) \in X : u(t) \geqslant 0, t \in [0,1]\}.$$

alors K est un sous ensemble convexe fermé et borné de X , nous avons que

$$\gamma(t) = \int_0^1 p(s, u(s))\, ds \geqslant 0, \text{ pour } u \in K$$

pour $1 < \alpha \leq 2$, et à partir de l'expression de $G(t,s)$, il suit que

$$G(t,s) = \frac{(t - s)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{b(\alpha-1)\, t\, (1-s)^{\alpha-2}}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)}, \text{ telle que } s \leq t \leq 1,$$

comme $a, b > 0$ et $a > b$, alors on conclut que

$$G(t,s) = \frac{(t - s)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{b(\alpha-1)\, t\, (1-s)^{\alpha-2}}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)} \geq 0, \text{ pour } s \leq t \text{ et } 1 < \alpha \leq 2,$$

nous obtenons ainsi pour $t \leq s$

$$G(s,t) = \frac{b(\alpha-1)\, t\, (1-s)^{\alpha-2}}{(a-b)\,\Gamma(\alpha)} \geq 0.$$

$$f\left(s, u(s), {}^{c}D_{0^+}^{\beta} u(s)\right) \geq 0, \text{ pour } 0 \leq s \leq 1 \text{ et } u \in K,$$

nous avons donc

$$\int_0^1 G(t,s)\, f\left(s, u(s), {}^{c}D_{0^+}^{\beta} u(s)\right) ds \geq 0 \text{ pour } u \in K,$$

et

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, f\left(s, u(s), {}^{c}D_{0^+}^{\beta} u(s)\right) ds + \gamma(t) \geq 0, 0 \leq t \leq 1.$$

Par la suite le problème (0.1) admet une solution positive unique

Chapitre 3

solution positive et symétrique d'un problème aux limites à multipoints

Dans ce chapitre nous considérons un problème aux limites à multipoints d'ordre deux

$$x^{''}(t) + f\left(t, x, x', x^{''}\right) = 0, \quad t \in [0, 1] \tag{3.1}$$

$$x(0) = x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\eta_i) \tag{3.2}$$

Nous supposons que : $a_i > 0$ pour $i = 1, 2, ..., m-2$ et $\eta_i : 0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < 1$ et $\sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$; $f : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$et continue avec $f\ \ (t, 0.0.0) \neq 0$ pour $0 \leq t \leq 1$, $f(., u, v, w)$ est symétrique sur $[0, 1]$ pour tous $(u, v, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$.

Par application du théorème du point fixe de Schauder nous montrons que le problème$(3.1)-(3.2)$ admet une solution positive et symétrique.

Lemme 3.1. Soit $a_i > 0$ pour $i = 1, 2, ..., m-2$,et $\sum_{i=1}^{m-2} a_i \neq 1$, alors pour $g \in C[0,1]$ le problème

$$x'' + g(t) = 0, \ t \in [0,1] \tag{3.3}$$

$$x(0) = x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\eta_i), \tag{3.4}$$

admet une solution unique donnée par

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)\, g(s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}, \tag{3.5}$$

où

$$G(\alpha,\beta) = \begin{cases} \alpha(1-\beta), \ 0 \le \alpha \le \beta \le 1 \\ \beta(1-\alpha), \quad 0 \le \beta \le \alpha \le 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

Preuve intégrons de 0 à t on obtient

$$x'(t) = -\int_0^t g(s)\, ds \ + c_1.$$

Une seconde intégration de 0 à t donne

$$x(t) = -\int_0^t \left(\int_0^r g(s)\, ds \right) dr + c_1 t + c_2.$$

i.e

$$x(t) = -\int_0^t (t-s)\, g(s)\, ds \ + c_1 t + c_2.$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
x(0) &= c_2, \\
a_i x(\eta_i) &= -a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds \ + a_i c_1 \eta_i + a_i c_2, \\
\textstyle\sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\eta_i) &= -\textstyle\sum_{i=1}^{m-2} a_i \displaystyle\int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds \ + c_1 \textstyle\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i + c_2 \textstyle\sum_{i=1}^{m-2} a_i; \\
x(1) &= -\int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds \ + c_1 + c_2,
\end{aligned}$$

de (3.4) on obtient

$$\begin{aligned}
c_1 &= \int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds, \\
c_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i \int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}.
\end{aligned}$$

Finalement, le problème $(3.3) - (3.4)$ admet une solution unique donneé par

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\int_0^t (t-s)\, g(s)\, ds \ + t \int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i \int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&\quad - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i},
\end{aligned}$$

ou

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)\, g(s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}.$$

Remarque 3.1.

Nous avons que $G(\alpha,\beta) \leq G(\alpha,\alpha)\,, G(\alpha,\beta) = G(1-\alpha, 1-\beta)\,,$ et $G(\alpha,\beta) \geq 0$ pour $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

Lemme 3.2 Soit $a_i > 0$ pour $i = 1, 2, ..., m-2$ et $\sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$. Si $g \in C[0,1]$ et $g(t) \geq 0$, alors l'unique solutions $x(t)$ du probléme $(3.3) - (3.4)$ vérifie $x(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]$

Preuve. Comme $x''(t) = -g(t) \leq 0$, on déduit que le graphe de $x(t)$ est concave sur $[0,1]$. Utilisons (3.4) et (3.5) on a

$$\begin{aligned}
x(0) &= x(1) = \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i \int_0^1 (1-s) g(s) ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s) g(s) ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i \int_{\eta_i}^1 (1-s) g(s) ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i \int_0^{\eta_i} (1-s) g(s) ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&\quad - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s) g(s) ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i \int_{\eta_i}^1 (1-s) g(s) ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} [\eta_i (1-s) - (\eta_i - s)] g(s) ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i \int_{\eta_i}^1 (1-s) g(s) ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i (1-\eta_i) \int_0^{\eta_i} s g(s) ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \geq 0.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve.

lemme 3.3. Soit $a_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, ..., m-2$,et $\sum_{i=1}^{m-2} a_i > 1$. Si $g \in C[0,1]$ et $g(t) \geq 0$ alors le problème aux limites $(3.3) - (3.4)$ n'admet pas de solution positive.

Preuve. Supposons le contraire, i.e ; que le problèm $(3.3) - (3.4)$ a une solution positive x, on a $x(\eta_i) > 0$ pour $i = 1, ..., m-2$, de (3.5) nous avons que

$$\begin{aligned}
x(\eta_i) &= \int_0^1 G(\eta_i, s) g(s) ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s) g(s) ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&= \int_0^1 G(\eta_i, s) g(s) ds - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s) g(s) ds}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i - 1} > 0,
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\left(\sum_{i=1}^{m-2} a_i - 1\right) \int_0^1 G(\eta_i, s) g(s) ds > \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s) g(s) ds,$$

il suit que

$$-\int_0^1 G(\eta_i, s) g(s) ds > 0,$$

et

$$\int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds < 0,$$

on a une contradiction, donc le problème $(3.3)-(3.4)$ n'admet pas de solution positive. Si $\sum_{i=1}^{m-2} a_i > 1$, il est clair que $x(0) = x(1)$ n'est pas positive.

Lemme 3.4. Pour $\sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$et $\eta_i : 0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < 1$,si la fonction $g(t)$ est symétrique sur $[0,1]$. Alors l'unique solution $x(t)$ du problème $(3.3)-(3.4)$ est symétrique sur $[0,1]$

Preuve . De (3.5) on a

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)\, g(s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i},$$

il suit que

$$\begin{aligned} x(1-t) &= \int_0^1 G(1-t,s)\, g(s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\ &= \int_0^1 G(1-t,1-s)\, g(1-s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\ &= x(t). \end{aligned}$$

ceci montre que $x(t)$ est symétrique sur $[0,1]$. Soit $B = C^2[0,1]$ l'espace de Banach de norme $\|x\|_B = \max\left\{|x|_0, |x'|_0, \left|x''\right|_0\right\}$, où $|x|_0 = \max_{0\leq t\ \leq 1}|x(t)|$ .on définit l'opérateur intégral $T : B \to B$ par

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t,s)\, f\ \left(s, x, x', x''\right) ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, f\left(s, x, x', x''\right) ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}$$

Nous avons que la fonction $x = x(t) \in C^2[0,1]$ est solution du problème $(3.1) - (3.2)$ ssi x est un point fixe de l'opérateurr T. Appliquons le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 3.5. Soit B un espace de Banach et $K \subset B$ un sous ensemble fermé, borné et convexe, si $T : B \to B$ est un opérateur complètement continu (compact) tel que $T\ (k) \subset K$. Alors T admet un point fixe dans K. (see [9])

3.1 Preuve du résultat essentiel

On étudie l'existence d'une solution positive de $(3.1)-(3.2)$ Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.6. supposons que $\sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$, $\eta_i : 0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < 1$, $f : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$est continue, $f(., u, v, w)$ est symétrique sur $[0,1]$ $\forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$, $f(t, 0, 0, 0) > 0, \forall t \in [0,1]$. et supposons qu'il existe une conctante C telle que

$$\max\left\{1, \frac{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i (1-\eta_i)}{\left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\right)}\right\} C \leq 2M,$$

où

$$C = \max\left\{f\ (t, u, v, w) : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq M, |v| \leq M, -2M \leq w \leq 0\right\}.$$

Alors le problème aux limites à m-point $(3.1) - (3.2)$ admet au plus une solution positive et symétrique.

Preuve. Soit K un sous ensemble fermé, borné et convexe de l'espace de Banach $B = C^2[0,1]$ défini par :

$$K = \left\{ x(t) \in B : x(t) \text{ est symétrique sur } [0,1], 0 \leq x(t) \leq M, \left|x'(t)\right| \leq M, -2M \leq x''(t) \leq 0 \right\}$$

On montre que l'opérateurr T est complètement continu, alors nous avons pour tous $x, y \in C^2[0,1]$

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \left(k + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \right) \\ &\quad \times \left\| f\left(x(.), x'(.), x''(.)\right) - f\left(y(.), y'(.), y''(.)\right) \right\| \end{aligned}$$

où

$$K = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)\, ds \qquad (< \infty).$$

Ainsi T est un opérateur continu.

on montre que T transforme un ensemble borné en un ensemble compact. Soit $ß$ un sous-ensemble borné de $C^2[0,1]$, il existe une constante $M > 0$ telle que$|x(t)| \leq M, \forall x \in ß$ et $t \in [0,1]$. Nous avons

$$|(Tx)(t)| \leq C \left(k + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^t G(\eta_i, s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \right),$$

pour tous $x \in ß$ et $t \in [0,1]$, et où

$$C = \max \left\{ f\left(s, x, x', x''\right), 0 \leq s \leq 1, 0 \leq x \leq M, \left|x'\right| \leq M, -2M \leq x'' \leq 0 \right\}.$$

Soit $x \in \beta$, alors $\forall\ t_1, t_2 \in [0,1]$,on a

$$\begin{aligned}
\left|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)\right| &\leq \int_0^1 \left|G(t_1,s) - G(t_2,s)\right| \left| f\ \left(s,x,x',x''\right)\right| ds \\
&\leq C \left\|G(t_{1,}.) - G(t_2,.)\right\|_{C\ [0,1]}.
\end{aligned}$$

Il suit que T transforme un ensemble borné en un ensemble compact, donc l'opérateur T est compact. On montre que

$$T(K) \subset K \tag{3.7}$$

D'après $(3.5),(3.6)$ et la remarque 3.1, pour $x \in K$ il suit que

$$\begin{aligned}
Tx(t) &= \int_0^1 G(t,s) f\ \left(s,x,x',x''\right) ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i,s) f\ \left(s,x,x',x''\right) ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&\leq \left(\int_0^1 G(t,s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i,s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right) C \\
&\leq \left(\int_0^1 G(t,t)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} G(\eta_i,s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\eta_i}^1 G(\eta_i,s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right) C \\
&\leq \left(\int_0^1 t\ \ (1-t)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} s(1-\eta_i)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\eta_i}^1 \eta_i (1-s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right) C \\
&\leq \left(\frac{t(1-t)}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i (1-\eta_i)}{2\left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\right)}\right) C \\
&\leq \left(\frac{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i (1-\eta_i)}{2\left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\right)}\right) C \leq M,
\end{aligned}$$

i.e ;

$$0 \leq Tx(t) \leq M,\ \ \forall t \in [0,1] \tag{3.8}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}(Tx)'(t) &= \textstyle\int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f\left(s,x,x',x''\right)ds \\ &= \textstyle\int_0^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f\left(s,x,x',x''\right)ds + \int_t^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f\left(s,x,x',x''\right)ds \\ &= -\textstyle\int_0^t s f\left(s,x,x',x''\right)ds + \int_t^1 (1-s) f\left(s,x,x',x''\right)ds \\ &\leq \textstyle\int_0^t (1-s) f\left(s,x,x',x''\right)ds + \int_t^1 (1-s) f\left(s,x,x',x''\right)ds \\ &\leq \textstyle\int_0^1 (1-s) f\left(s,x,x',x''\right)ds \\ &\leq \frac{1}{2}C \leq M,\end{aligned}$$

aussi on a

$$\begin{aligned}(Tx)'(t) &\geq -\textstyle\int_0^t s f\left(s,x,x',x''\right)ds \\ &\geq -\textstyle\int_0^1 s f\left(s,x,x',x''\right)ds \\ &\geq -\frac{1}{2}C \\ &\geq -M.\end{aligned}$$

On tire que

$$\left|(Tx)'(t)\right| \leq M, \quad \forall t \in [0,1]. \tag{3.9}$$

Pour finir, nous avons

$$(Tx)''(t) = -\ f\left(s,x,x',x''\right),$$

et

$$-2M \leq -C \leq (Tx)''(t) \leq 0,$$

$$-2M \leq (Tx)''(t) \leq 0,\ \forall t \in [0,1] \tag{3.10}$$

D'après le lemme 3.1, et $(3.8)-(3.10)$ nous avons que $Tx \in K$ et $T\ (K) \subset K$. D'après le théorème du point fixe de Schauder, l'opérateur T admet un point $x^* \in K$, i.e $Tx^* = x^*$, comme $f\ (t,0,0,0) \neq 0,\ t \in [0,1]\,,$ x^*est une solution positive symétrique du problème $(3.1)-(3.2)$

Conclusion

Les théorèmes du point fixe s'appliquent dans beaucoup de branches de mathématiques, en particulier en l'analyse, dans la résolution des équations différentielles ordinaires non linéaires, à ordre fractionnaire, dans les équations aux dérivées partielles, dans les équations intégrales, les inéquations variationnelles.

Dans ce mémoire nous avons présenté des exemples d'applications de théorèmes du point fixe de Banach et de Schauder, mais comme les recherches évoluent très rapidement, il est toujours possible de résoudre de tels problèmes dans des espaces métriques généralisés avec des conditions aux limites plus compliquées, en considérant des équations à retard et les théorèmes du point fixe de Banach, Shauder et surtout de Krasnoselskii, se présentent en force pour résoudre de tels problèmes.

Résumé

Dans ce travail, on étudie l'existence des solutions d'un problème aux limites pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire non linéaire avec conditions aux limites mixtes, ainssi que l'existence d'une solution positive et symétrique d'une équation différentielle non linéaire avec des conditions aux limites à multipoints.

Dans les deux problèmes l'existence des solutions sont obtenues par applications de certains théorèmes du point fixe.

Mots Clés. Equation non linéaire ; conditions aux limites à multipoints ; dérivée au sens de Caputo ; théorème du point fixe ; conditions aux limites mixtes.

Abstract

In this work, we prove the existence of solutions for fractional differential equations with mixed boundary conditions, and we consider the existence of symmetric positive solutions of multi-point boundary-value problem. This solutions are obtained by using certain fixed point theorems

key words.Nonlinear equation ; fixed-point theorem ; Caputo derivative ; multi-point boundary conditions ; mixed boundary conditions

Bibliographie

[1] S.Q.Zhang,Positive solution for boundary-value problem of nonlinear differential equations,Electronic Journal of Differential Equation,36,1-12,2006

[2] C.Bai, triple positives solutions for boundary-value problem of nonlinear differential equations, EJQTDE,24, 1-10, 2008.

[3] X.Su, S. Zhang, Solutions to boundary-value problem for nonlinear differential equations of fractional order, Electronic Journal of Differential equations, 26, 1-115,2009.

[4] Das, S (2008) .Functional fractional Calculus for System Identification and Control. Springer-verlage Berlin

[5] I. Podlubny,fractional differential equations, Mathematics in science and engineering,vol, 198, Academic press, New york /London/Toronto, 1999

[6] Kilbas, A.A.,Srisvastava, H.M. ,Trujillo, J.J(2006) . Theory and applications of Differential equation. Elservier, north-Holland

[7] X.Su,Boundary-value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equation, App.Math. Lett.22,64-68,2009.

[8] C.Bai and J ; Fang, the existence of positive solution for a singular coupled system of nonlinear fractional differential equation, Appl.Math. comput. 150,611,2004.

[9] V.Trénoguine, analyse fonctionnelle, tradiction française,Editions Mir,1985

[10]Y. Sun, eigenvalues and symmetric positive solution for a three-point boundary-value problem, Electronic Journal of Differential Equations, 127(2005), 1-7