



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة العربي بن مهيدي - أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

المجلس العلمي للكلية

رقم: 17/.....م/ع/ك ع د ط ح/2023

## مستخرج محضر اجتماع المجلس العلمي للكلية

في اليوم الثالث والعشرون من شهر ماي. عام ألفين وثلاثة وعشرين (2023/05/23) على الساعة العاشرة صباحا بقاعة الاجتماعات بالكلية اجتمع السادة أعضاء المجلس العلمي للكلية تقرر ما يلي :

النقطة رقم 02: المطبوعات والدروس على الخط

### ب- المطبوعات

الأستاذ(ة): نسيب عبد الحلیم

بناء على التقارير الايجابية للخبراء المقترحين لدراسة مطبوعة الأستاذ(ة) نسيب عبد الحلیم تحت عنوان

1) (Analyse) دروس التحليل

الرأي والتوصية

صادق المجلس العلمي على إيجابية التقارير وإعتماد المطبوعة كمرجع علمي معتمد

رئيس المجلس العلمي

رئيس المجلس العلمي بكلية العلوم  
الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة  
أ.د. مخاطي فريد



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة أم البواقي



كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة  
قسم الرياضيات والإعلام الآلي

## دروس وتمارين في التحليل 1

إعداد الدكتور : نسيب عبد الحليم

السنة الجامعية : 2022 – 2023

# الفهرس

| الصفحة | الموضوع   |                                  |              |
|--------|---|----------------------------------|--------------|
| 1      | المقدمة   |                                  |              |
| 3      | البنية الجبرية للمجموعة $\mathbb{R}$                  | مجموعة الأعداد الحقيقية          | جزء الدروس   |
| 3      | القيمة المطلقة  |                                  |              |
| 4      | الأجزاء المحدودة من $\mathbb{R}$                      |                                  |              |
| 5      | مسلمة أرخميدس   |                                  |              |
| 6      | الجزء الصحيح لعدد حقيقي                               |                                  |              |
| 6      | المجموعات الكثيفة في $\mathbb{R}$                     |                                  |              |
| 7      | المجالات في $\mathbb{R}$                              |                                  |              |
| 9      | عموميات   |                                  |              |
| 9      | المتتاليات المتقاربة                                  |                                  |              |
| 12     | المتتاليات الجزئية                                    |                                  |              |
| 14     | المتتاليات المتجاورة                                  |                                  |              |
| 14     | متتالية كوشي  |                                  |              |
| 16     | المتتاليات التراجعية                                  |                                  |              |
| 19     | عموميات   | التوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي |              |
| 20     | نهاية تابع  |                                  |              |
| 22     | نهاية تابع باستعمال المتتاليات                        |                                  |              |
| 23     | النهايات غير المنتهية                                 |                                  |              |
| 24     | نظريات على النهايات                                   |                                  |              |
| 25     | معيار كوشي الخاص بالتوابع                             |                                  |              |
| 26     | مقارنة التوابع بجوار نقطة ترميز لاندو                 |                                  |              |
| 28     | التوابع المتكافئة                                     |                                  |              |
| 29     | التوابع المستمرة                                      |                                  |              |
| 30     | التوابع المستمرة على مجال مغلق                        |                                  |              |
| 31     | التمديد بالاستمرار                                    |                                  |              |
| 32     | التوابع الرتيبة على مجال                              |                                  |              |
| 33     | التابع العكسي لتابع مستمر ورتيب تمامًا                |                                  |              |
| 34     | العدد المشتق - الدالة المشتقة                         |                                  |              |
| 35     | المشتقات ذات الرتب العليا                             |                                  |              |
| 35     | عمليات على التوابع القابلة للاشتقاق                   |                                  |              |
| 38     | نظرية التزايدات المنتهية - التزايدات المنتهية المعممة |                                  |              |
| 41     | التوابع الدائرية العكسية                              |                                  |              |
| 42     | التوابع الزائدية                                      |                                  |              |
| 43     | التوابع الزائدية العكسية                              |                                  |              |
| 45     | تمارين حول المحور الأول                               | مجموعة الاعداد الحقيقية          | جزء التمارين |
| 47     | حلول تمارين المحور الأول                              |                                  |              |
| 51     | تمارين حول المحور الثاني                              |                                  |              |

|    |                                     |                    |  |
|----|-------------------------------------|--------------------|--|
| 53 | حلول تمارين المحور الثاني           |                    |  |
| 58 | تمارين حول المحورين الثالث والرابع  | التوابع            |  |
| 60 | حلول تمارين المحورين الثالث والرابع |                    |  |
| 69 | الامتحان الأول                      | امتحانات<br>محلولة |  |
| 74 | الامتحان الثاني                     |                    |  |
| 77 | الامتحان الثالث                     |                    |  |
| 81 | قائمة المراجع                       |                    |  |

# مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم، والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين،  
أما بعد فهذه مطبوعة تضم مجموعة من الدروس والتمارين الموجهة لطلبة السنة الأولى  
رياضيات وإعلام آلي، تغطي مادة التحليل 1 وفق عرض التكوين في ليسانس أكاديمي  
(نظام ل م د) الصادر من طرف وزارة التعليم العالي في السنة الجامعية 2018-2019.

**أهداف المادة:** تهدف هذه المادة إلى تعريف الطلبة بمختلف خواص مجموعة الأعداد الحقيقية  
وكذلك المتتاليات الحقيقية والتوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي.

قسم محتوى هذه المطبوعة إلى ثلاثة أقسام:

**القسم الأول :** ويضم مجموعة من الدروس، ويتكون من المحاور التالية :

المحور الأول : مجموعة الأعداد الحقيقية

المحور الثاني : المتتاليات الحقيقية

المحور الثالث : التوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي

المحور الرابع : التوابع الأولية

**القسم الثاني :** يضم مجموعة من التمارين المحلولة تغطي المحاور السابقة، وتمثل بعض

تمارين الأعمال الموجهة التي قدمت في جامعة أم البواقي خلال السنوات 2018 – 2022 .

**القسم الثالث :** يضم ثلاثة امتحانات محلولة مع سلم التنقيط.

جزء

الدروس

## المحور الأول: مجموعة الأعداد الحقيقية (Nombres réels)

### 1.1. البنية الجبرية للمجموعة $\mathbb{R}$ :

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة نرّمز لها بـ  $\mathbb{R}$  مزودة بعمليتي جمع "+" و ضرب "·" ومزودة كذلك بعلاقة ترتيب كلي " $\leq$ " تحقق المسلمات التالية:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x + (y + z) = (x + y) + z \quad (A_1)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x \quad (A_2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: x + 0 = 0 + x = x \quad (A_3)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad (A_4)$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (A_5)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y = y \cdot x \quad (A_6)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad (A_7)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*: x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 \quad (A_8)$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (A_9)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \leq x \quad (A_{10})$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y \text{ و } y \leq z) \Rightarrow (x \leq z) \quad (A_{11})$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y \text{ و } y \leq x) \Rightarrow (x = y) \quad (A_{12})$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \text{ أو } y \leq x \quad (A_{13})$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y) \Leftrightarrow (x + z \leq y + z) \quad (A_{14})$$

$$\begin{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}; \forall z \in \mathbb{R}_+^*: (x \leq y) \Leftrightarrow (x \cdot z \leq y \cdot z) \\ \forall x, y \in \mathbb{R}; \forall z \in \mathbb{R}_-^*: (x \leq y) \Leftrightarrow (x \cdot z \geq y \cdot z) \end{cases} \quad (A_{15})$$

### خواص:

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}: (x \leq y \text{ و } x' \leq y') \Rightarrow (x + x' \leq y + y') \quad (1)$$

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}_+^*: (x \leq y \text{ و } x' \leq y') \Rightarrow (x \cdot x' \leq y \cdot y') \quad (2)$$

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}_+^*: (0 < x < y) \Rightarrow \left(0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}\right) \quad (3)$$

### 2.1. القيمة المطلقة:

**تعريف 1.1:** ليكن  $x \in \mathbb{R}$

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي  $x$  هي العدد الحقيقي الموجب الذي نرّمز له بـ  $|x|$  والمعرف كمايلي:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

**خواص:**  $x, y, r$  أعداد حقيقية حيث  $r \geq 0$

$$|x| \geq 0; \quad |-x| = |x|; \quad -|x| \leq x \leq |x| \quad (1)$$

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (2)$$

$$|x \cdot y| = |x| |y| \quad (3)$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} (y \neq 0) \quad (4)$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (5)$$

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \quad (6)$$

$$|x| \geq r \Leftrightarrow x \leq -r \text{ أو } x \geq r \quad (7)$$

### 3.1. الأجزاء المحدودة من $\mathbb{R}$ :

لتكن  $A$  مجموعة جزئية من  $\mathbb{R}$  وغير خالية.

- نقول أن  $A$  محدودة من الأعلى إذا، فقط إذا تحقق ما يلي:  
 $\exists b \in \mathbb{R} ; \forall x \in A : x \leq b$

يسمى  $b$  حاد أعلى للمجموعة  $A$ .

- نقول أن  $A$  محدودة من الأدنى إذا، فقط إذا تحقق ما يلي:  
 $\exists a \in \mathbb{R} ; \forall x \in A : x \geq a$

يسمى  $a$  حاد أدنى للمجموعة  $A$ .

- نقول أن  $A$  محدودة إذا، فقط إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى.

### ملاحظات:

- إذا كان  $a$  حاد من الأعلى للمجموعة  $A$  فإن كل عدد  $a' > a$  هو أيضا حاد من الأعلى للمجموعة  $A$ .
- إذا كان  $b$  حاد من الأدنى للمجموعة  $A$  فإن كل عدد  $b' < b$  هو أيضا حاد من الأدنى للمجموعة  $A$ .
- تكون  $A$  غير محدودة من الأعلى إذا، فقط إذا تحقق ما يلي:  $\forall b \in \mathbb{R} ; \exists x \in A : x > b$ .
- تكون  $A$  غير محدودة من الأدنى إذا، فقط إذا تحقق ما يلي:  $\forall a \in \mathbb{R} ; \exists x \in A : x < a$ .

### قضية 1.1: الشروط الثلاثة الآتية متكافئة.

(1)  $A$  محدودة.

$$\exists a \in \mathbb{R} ; \exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in A : a \leq x \leq b \quad (2)$$

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in A : |x| \leq M \quad (3)$$

### 1.3.1 الحد الأعلى و الحد الأدنى-العنصر الأكبر-العنصر الأصغر:

- نسمي حداً أعلى للمجموعة  $A$  (*borne supérieure de A*)، أصغر الحواد العليا لـ  $A$  عند وجوده ونرمز له بـ  $\sup A$

نسمي حداً أدنى للمجموعة  $A$  (*borne inférieure de A*)، أكبر الحواد الدنيا لـ  $A$  عند وجوده ونرمز له بـ  $\inf A$ .

- إذا كان  $\sup A \in A$  يسمى العنصر الأكبر لـ  $A$  ونرمز له بـ  $\max A$ .
- إذا كان  $\inf A \in A$  يسمى العنصر الأصغر لـ  $A$  ونرمز له بـ  $\min A$ .

### ملاحظة:

إذا كانت  $A$  غير محدودة من الأعلى (من الأدنى، على التوالي) في  $\mathbb{R}$  نكتب:  $\sup A = +\infty$  ( $\inf A = -\infty$ )، على التوالي).

## قضية 2.1:

$$1. \text{ لتكن } A \text{ مجموعة محدودة من الأعلى.}$$

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \leq M \\ \text{و} \\ \forall \varepsilon > 0 ; \exists a \in A : M - \varepsilon < a \end{cases}$$

$$2. \text{ لتكن } A \text{ مجموعة محدودة من الأدنى.}$$

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \geq m \\ \text{و} \\ \forall \varepsilon > 0 ; \exists b \in A : m + \varepsilon > b \end{cases}$$

### البرهان:

(1) يكون  $M$  هو أصغر الحواد العليا للمجموعة  $A$ ، إذا، و فقط إذا كانت القضية التالية خاطئة:  
 $\forall M' < M ; \exists x \in A : x > M'$  أي إذا كانت القضية  $\exists M' < M ; \forall x \in A : x \leq M'$  صحيحة.  
 بوضع  $\varepsilon = M - M' > 0$  فإن  $\varepsilon > 0$  و منه فإن القضية الأخيرة تكتب على الشكل:  
 $\forall \varepsilon > 0 ; \exists x \in A : M - \varepsilon < x$

بنفس الطريقة نبرهن على الحالة الثانية.

### أمثلة:

$$(1) A = [1, 2[$$

غير موجود ;  $\max A = 2$  ;  $\sup A = 2$  ;  $\inf A = 1$  ;  $\min A = 1$

$$(2) A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$\sup A = \max A = 1 \text{ فإن } 1 \in A \text{ بما أن } \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

لنبرهن أن  $\inf A = 0$

$$0 = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \geq 0 \\ \text{و} \\ \forall \varepsilon > 0 ; \exists b \in A : 0 + \varepsilon > b \end{cases} \text{ لدينا}$$

و لدينا من جهة أخرى  $\varepsilon > \frac{1}{n} \forall \varepsilon > 0 ; \exists n \in \mathbb{N}^* : \varepsilon > \frac{1}{n}$  و هذه القضية الأخيرة صحيحة، لأنه حسب مسلمة أرخميدس لدينا:  $\forall \varepsilon > 0 ; \exists n \in \mathbb{N}^* : 1 < n\varepsilon$

بما أن  $0 \notin A$  فإن  $\min A =$  غ.م

### 2.3.1: مسلمة الحد الأعلى والحد الأدنى:

- كل مجموعة غير خالية  $A$  جزئية من  $\mathbb{R}$  ومحدودة من الأعلى تقبل حدًا أعلى في  $\mathbb{R}$ .
- كل مجموعة غير خالية  $A$  جزئية من  $\mathbb{R}$  ومحدودة من الأدنى تقبل حدًا أدنى في  $\mathbb{R}$ .

### 4.1 مسلمة أرخميدس: (Axiome d'Archimed)

$$\text{نظرية 1.1: } \forall x > 0 ; \forall y \in \mathbb{R} ; \exists n \in \mathbb{N}^* : y < nx$$

البرهان: ( نستعمل البرهان بالخلف )

نفرض أن  $\exists x > 0 ; \exists y \in \mathbb{R} ; \forall n \in \mathbb{N}^* : y \geq nx$  أو  $\exists x > 0 ; \exists y \in \mathbb{R} ; \forall n \in \mathbb{N}^* : n \leq \frac{y}{x}$

إن هذه القضية الأخيرة تعني أن المجموعة  $\mathbb{N}^*$  محدودة من الأعلى في  $\mathbb{R}$  فهي تقبل حداً أعلى في  $\mathbb{R}$  نرسم له  $M$  و منه  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : M - \varepsilon < n_0$  ;  $\forall \varepsilon > 0$  بوضع  $\varepsilon = 1$  نحصل على الآتي  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : M - 1 < n_0$  أو  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : M < n_0 + 1$  لكن  $n_0 + 1 \in \mathbb{N}^*$  وهذا يناقض الفرضية  $\sup A = M$ .

### 5.1: الجزء الصحيح لعدد حقيقي :

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يوجد عدد صحيح واحد و واحد فقط نرسم له بـ  $E(x)$  (أو  $[x]$ ) يحقق :  
 $E(x) \leq x < E(x) + 1$  يسمى  $E(x)$  الجزء الصحيح للعدد الحقيقي  $x$ .  
 بعبارة أخرى  $E(x)$  هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي  $x$ .

أمثلة:

$$\begin{aligned} (1) \quad E(0, 1) = 0 \quad \text{لأن } 0 \leq 0, 1 < 0 + 1 \\ (2) \quad E(-0, 1) = -1 \quad \text{لأن } -1 \leq -0, 1 < -1 + 1 \\ (3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \frac{1}{n+1} < 0 + 1 \quad \text{لأن } \forall n \in \mathbb{N}^* : E\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \end{aligned}$$

### 6.1 المجموعات الكثيفة في $\mathbb{R}$ :

نظرية 2.1: بين كل عددين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد ناطق.

البرهان:

ليكن  $x, y$  عددين حقيقيين حيث  $x < y$ .

حسب مسلمة أرخميدس فإنه  $\exists n \in \mathbb{N}^* : 1 < n(y - x)$  أو  $nx + 1 < ny$ .

من جهة أخرى لدينا  $E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$  و منه  $nx < E(nx) + 1 \leq nx + 1 < ny < E(ny) + 1$ .

أي أن  $nx < E(nx) + 1 < ny$  إذن  $x < \frac{E(nx)+1}{n} < y$ .

ومنه فإن العدد الناطق  $\frac{E(nx)+1}{n}$  محصور بين العددين الحقيقيين  $y, x$ .

تعريف 2.1: نسمي كل عدد غير ناطق عدداً أصمًا نرسم لمجموعة الأعداد الصماء بـ  $I$  أو  $Q^c$ .

نظرية 3.1: بين كل عددين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد أصم.

البرهان: لبرهان هذه النظرية نحتاج للقضيتين التاليتين.

قضية 3.1: العدد  $\sqrt{2}$ ، عدد غير ناطق.

قضية 4.1: إذا كان  $x \in I$  و  $r \in \mathbb{Q}^*$  فإن  $rx \in I$ .

### برهان القضية 3.1

نفرض أن  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ، إذن توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الطبيعية  $(p, q)$  حيث  $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$  و  $\text{PGCD}(p, q) = 1$ .

ومنه

$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Leftrightarrow p = q\sqrt{2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$  من هذه العلاقة نستنتج أن  $q^2$  يقسم  $p^2$  و بما أن  $q^2$  و  $p^2$  أوليان فيما بينهما فإن  $q^2$  يقسم 1 أي أن  $q = 1$  بالتعويض في المساواة السابقة نحصل على  $p^2 = 2$  وهذا تناقض لأنه لا يوجد عدد طبيعي مربعه يساوي 2.

### برهان القضية 4.1

نفرض أن  $x \in I$  و  $r \in \mathbb{Q}^*$  وأن  $rx \notin I$  أي أن  $rx \in \mathbb{Q}$  و منه فإن:

$$\left( \frac{1}{r} \in \mathbb{Q}^* \text{ و } rx \in \mathbb{Q} \right) \Rightarrow \frac{1}{r}rx \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$$

و هذا تناقض لأن  $x \in I$ .

### نأتي الآن إلى برهان النظرية 3.1

ليكن  $x, y$  عددين حقيقيين حيث  $x < y$ ، حسب النظرية 2.1 فإنه يوجد على الأقل عدد ناطق  $r$  (يمكن اختيار  $r$  حيث  $r \neq 0$ ) يحقق  $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$  و منه  $x < r\sqrt{2} < y$ ، حسب القضية 4.1 فإن العدد  $r\sqrt{2}$ ، عدد أصم وهو محصور بين العددين  $x$  و  $y$ .

ملاحظة: يمكن صياغة النظريتين (2.1) و (3.1) كما يلي:

إن المجموعتين  $I$  و  $\mathbb{Q}$  كثيفتين في  $\mathbb{R}$ .

### 7.1 المجالات في $\mathbb{R}$ :

ليكن  $a, b$  عددين حقيقيين حيث  $a < b$ .

المجموعة  $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  تسمى مجال مغلق طرفاه  $a$  و  $b$  و يرمز له بـ  $[a, b]$ ، بنفس الطريق نعرف المجالات:

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ مجال مفتوح.}$$

$$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \text{ مجال مغلق عند } a \text{ ومفتوح عند } b.$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \text{ مجال مفتوح عند } a \text{ ومغلق عند } b.$$

$$[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \text{ مجال مغلق عند } a \text{ وغير محدود من الأعلى.}$$

$$]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \text{ مجال مفتوح عند } a \text{ وغير محدود من الأعلى.}$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \text{ مجال مغلق عند } b \text{ وغير محدود من الأدنى.}$$

$$]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \text{ مجال مفتوح عند } b \text{ وغير محدود من الأدنى.}$$

$$\text{نقبل أن: } [a, a] = \{a\}, ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}, \text{ المجموعة الخالية هي أيضا مجال.}$$

### نظرية 4.1:

تكون مجموعة  $I$  غير خالية و جزئية من  $\mathbb{R}$ ، مجالا إذا و فقط إذا كانت محققة للخاصية التالية:

$$\forall a, b \in I (a \leq b); \forall x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I$$

### البرهان:

الشرط اللازم: إذا كانت المجموعة  $I$  مجال فإن الخاصية محققة.

الشرط الكافي: نفرض أن الخاصية محققة و نبرهن أن  $I$  مجال من  $\mathbb{R}$ .

لدينا أربع حالات ممكنة و هي: (1)  $I$  محدودة، (2)  $I$  محدودة من الأعلى و ليست محدودة من الأدنى، (3)  $I$  محدودة من الأدنى و ليست محدودة من الأعلى، (4)  $I$  ليست محدودة لا من الأعلى و لا من الأدنى.

نبرهن أنه في الحالة الأولى فإن: إما  $I = ]a, b[$  و إما  $I = [a, b[$  و إما  $I = ]a, b]$  و إما  $I = [a, b]$  حيث

$$.b = \sup I \text{ و } a = \inf I$$

$$b = \sup I \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I : x \leq b \\ \text{و} \\ \forall \varepsilon > 0 ; \exists b' \in I : b - \varepsilon < b' \dots \dots (1) \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$.a = \inf I \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I : x \geq a \\ \text{و} \\ \forall \delta > 0 ; \exists a' \in I : a + \delta > a' \dots \dots (2) \end{cases}$$

(ا) إذا كان  $a \in I$  و  $b \in I$  فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in I \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a, b] \Rightarrow I \subset [a, b]$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in [a, b] \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I \Rightarrow [a, b] \subset I$$

و منه  $I = [a, b]$

(ب) إذا كان  $a \in I$  و  $b \notin I$  فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in I \Rightarrow a \leq x < b \Rightarrow x \in [a, b[ \Rightarrow I \subset [a, b[$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in [a, b[ \Rightarrow a \leq x < b \Rightarrow b - x > 0$$

بوضع  $\varepsilon = b - x$  في (1) نحصل على  $x < b'$  و بما أن  $a, b' \in I$  فإن:

$$a \leq x < b' \Rightarrow x \in I \Rightarrow [a, b[ \subset I$$

و منه  $I = [a, b[$

(ج) إذا كان  $a \notin I$  و  $b \in I$  فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in I \Rightarrow a < x \leq b \Rightarrow x \in ]a, b] \Rightarrow I \subset ]a, b]$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in ]a, b] \Rightarrow a < x \leq b \Rightarrow x - a > 0$$

$$a = \inf I \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 ; \exists a' \in I : a + \varepsilon > a'$$

بوضع  $\delta = x - a$  في (2) نحصل على  $x > a'$  و بما أن  $a, a' \in I$  فإن:

$$a' < x \leq b \Rightarrow x \in I \Rightarrow ]a, b] \subset I$$

و منه  $I = ]a, b]$

(د) إذا كان  $a \notin I$  و  $b \notin I$  فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in I \Rightarrow a < x < b \Rightarrow x \in ]a, b[ \Rightarrow I \subset ]a, b[$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in ]a, b[ \Rightarrow a < x < b \Rightarrow x - a > 0 \text{ و } b - x > 0$$

بوضع  $\varepsilon = b - x$  في (1) و  $\delta = x - a$  في (2) نحصل على  $x < b'$  و  $x > a'$  و بما أن  $a', b' \in I$  فإن:

$$.a' < x \leq b' \Rightarrow x \in I \Rightarrow ]a, b[ \subset I$$

و منه  $I = ]a, b[$

بنفس الطريقة نبرهن أن  $I$  مجال في الحالات الثلاثة الأخرى.

## المحور الثاني: المتتاليات الحقيقية (suites numériques)

### 1.2 عموميات:

#### تعريف 1.2:

- نسمي متتالية حقيقية كل دالة  $u$  للمجموعة  $\mathbb{N}$  في المجموعة  $\mathbb{R}$ .
- نرمز لصورة العدد الطبيعي  $n$  بالمتتالية بالرمز  $u_n$  ويسمى الحد العام للمتتالية  $u$ ، كما نرمز للمتتالية بـ  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  أو  $(u_n)$  وإذا كانت المتتالية معرفة من أجل كل  $n \geq n_0$  نرمز لها بـ  $(u_n)_{n \geq n_0}$ .
- إن الحد العام لـ  $(u_n)$  قد يكون معرفاً صراحةً أو بواسطة علاقة تراجعية.

#### أمثلة:

$$(1) \quad \forall n \geq 2 : u_n = \sqrt{n-2} \text{ معرفة بعدها العام: } u_{n \geq 2} \quad \dots; u_{10} = \sqrt{8}; \dots; u_4 = \sqrt{2}; u_3 = 1; u_2 = 0$$

$$(2) \quad (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ معرفة بالعلاقة التراجعية:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}; v_0 = 1$$

$$\dots; v_3 = \frac{1/3}{1/3 + 1} = \frac{1}{4}; v_2 = \frac{1/2}{1/2 + 1} = \frac{1}{3}; v_1 = \frac{1}{2}; v_0 = 1$$

$$(\text{أثبت أن } \forall n \in \mathbb{N}: v_n = \frac{1}{n+1})$$

#### تعريف 2.2:

- نقول عن متتالية  $(u_n)$  أنها محدودة من الأعلى إذا، فقط إذا تحقق:

$$\exists M \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}; u_n \leq M$$

- نقول عن متتالية  $(u_n)$  أنها محدودة من الأسفل إذا، فقط إذا تحقق:

$$\exists m \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq m$$

- نقول عن متتالية  $(u_n)$  أنها محدودة إذا، فقط إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

$$\text{قضية 1.2: } (u_n) \text{ محدودة} \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}^*; \forall n \in \mathbb{N}: |u_n| \leq M)$$

#### تعريف 3.2:

- نقول عن متتالية  $(u_n)$  أنها متزايدة (متناقصة، على الترتيب) إذا كان  $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq u_{n+1}$  (تمامًا، على الترتيب).

- نقول عن متتالية  $(u_n)$  أنها ثابتة إذا كان  $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = u_{n+1}$ .

#### 2.2 المتتاليات المتقاربة:

#### تعريف 4.2:

- نقول أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ونهايتها العدد الحقيقي  $l$  إذا، فقط إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

$$\text{ونكتب: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ أو اختصارًا } \lim u_n = l$$

كل متتالية غير متقاربة نقول أنها متباعدة.

**مثال:** لنكن المتتالية:  $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$ ،  $\forall n \in \mathbb{N}$ ، لنثبت أن  $\lim u_n = 3$

ليكن  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  حيث  $|u_n - 3| < \varepsilon$  لدينا

$$\begin{aligned} |u_n - 3| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{3n+1}{n+2} - 3 \right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 2 \end{aligned}$$

حسب مسلمة أرخميدس فإنه:  $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \frac{5}{\varepsilon} - 2 < N_0$  وعليه فإنه يكفي أخذ  $N = N_0$  حتى يتحقق الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N(N = N_0) \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: [n > N \Rightarrow |u_n - 3| < \varepsilon$$

**ملاحظة:** يمكن تحديد  $N$  بطريقة أخرى كما هو موضح في الآتي:

$$\begin{aligned} \text{بما أن } \left| \frac{5}{\varepsilon} - 2 \right| \leq \frac{5}{\varepsilon} - 2 \text{ و } \frac{5}{\varepsilon} - 2 \in \mathbb{N} \text{ و } \left| \frac{5}{\varepsilon} - 2 \right| < E \text{ فإنه يكفي أخذ} \\ N = E \left( \left| \frac{5}{\varepsilon} - 2 \right| \right) + 1 \end{aligned}$$

### نظرية 1.2:

إذا كانت المتتالية  $(u_n)$  متقاربة، فإن نهايتها وحيدة.

### البرهان:

نفرض أن  $(u_n)$  تقبل نهايتين  $\ell$  و  $\ell'$  حيث  $\ell' < \ell$ .

من أجل  $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{2}$  فإن

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\ell - \ell'}{2} \Rightarrow \frac{\ell + \ell'}{2} < u_n < \frac{3\ell - \ell'}{2}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_2 \Rightarrow |u_n - \ell'| < \frac{\ell - \ell'}{2} \Rightarrow \frac{3\ell' - \ell}{2} < u_n < \frac{\ell + \ell'}{2}$$

بوضع  $N = \max\{N_1, N_2\}$  فإن  $\forall n > N: \frac{\ell + \ell'}{2} < u_n < \frac{3\ell' - \ell}{2}$  وهذا تناقض.

### نظرية 2.2:

كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة.

### البرهان:

نفرض  $(u_n)$  متقاربة نحو العدد  $\ell$ .

$$\text{من أجل } \varepsilon = 1 \text{ فإن } \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow \ell - 1 < u_n < \ell + 1$$

نضع  $A = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_N, \ell - 1, \ell + 1\}$  المجموعة  $A$  منتهية فهي تقبل عنصر أكبر و عنصر أصغر، عندئذ فإن  $\min A < u_n < \max A$ .

### نظرية 3.2:

- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي متتالية متقاربة حيث  $\lim u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$
- كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى هي متتالية متقاربة حيث  $\lim u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$

**البرهان:** ( لنبرهن على الحالة الأولى)

لتكن  $(u_n)$  متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى، إذن المجموعة  $A = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$  محدودة من الأعلى فهي تقبل حداً أعلى نرسم له  $\ell$ .

لدينا  $\forall n > N: \ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell$  و  $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}: \ell - \varepsilon < u_N$

إذن  $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

بنفس الطريقة نبرهن على الحالة الثانية.

**مثال:** لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \text{ و } u_0 = \alpha > 1$$

أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة (لا يطلب حساب النهاية)

- نثبت أولاً وراثية الصفة  $u_n > 1$  أي أن  $\forall n \in \mathbb{N}: u_n > 1$  بإستعمال البرهان بالتراجع، ثم نثبت بعدها أن  $(u_n)$  متناقصة تمامًا، ينتج حسب النظرية (3.2) أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

#### **نظرية 4.2:**

إذا كانت  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين متقاربتين نحو  $\ell$  و  $\ell'$  على الترتيب فإن المتتاليات  $(u_n + v_n)$  ،  $(u_n v_n)$  ،  $(\lambda u_n)$  ،  $(|u_n|)$  متقاربة نحو  $\ell + \ell'$  ،  $\ell \ell'$  ،  $\lambda \ell$  ،  $|\ell|$  على الترتيب وإذا كانت  $v_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  و  $\ell' \neq 0$  فإن المتتالية  $(\frac{u_n}{v_n})$  متقاربة نحو  $\frac{\ell}{\ell'}$ .

**البرهان:** ( لنبرهن على الحالة الأخيرة)

- بما أن  $\lim v_n = \ell' \neq 0$ ، من أجل  $\varepsilon = \frac{|\ell'|}{2}$  فإن  $\exists N_1 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_1 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \frac{|\ell'|}{2}$  و منه

$$|v_n - \ell'| < \frac{|\ell'|}{2} \Rightarrow ||v_n| - |\ell'|| < \frac{|\ell'|}{2} \Rightarrow \frac{|\ell'|}{2} < |v_n| < 3 \frac{|\ell'|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|v_n|} < \frac{2}{|\ell'|}$$

- لدينا من جهة أخرى من أجل  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  فإن:

$\exists N_3 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_3 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon$  و  $\exists N_2 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_2 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$   
نضع  $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$

$$\forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'} \right| = \left| \frac{(u_n - \ell)}{v_n} - \frac{\ell(v_n - \ell')}{v_n \ell'} \right| \leq \left| \frac{(u_n - \ell)}{v_n} \right| + \left| \frac{\ell(v_n - \ell')}{v_n \ell'} \right| < \left( \frac{2}{|\ell'|} + \frac{\ell}{|\ell'|^2} \right) \varepsilon$$

بوضع  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \varepsilon' = \left( \frac{2}{|\ell'|} + \frac{\ell}{|\ell'|^2} \right) \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  و منه

$$\forall \varepsilon' > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'} \right| < \varepsilon'$$

#### **نظرية 5.2:**

- إذا كانت  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين متقاربتين حيث  $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq v_n$  و كانت  $\lim u_n = \ell$  و  $\lim v_n = \ell'$  عندئذٍ فإن  $\ell \leq \ell'$ .

- إذا كانت  $(u_n)$  ،  $(v_n)$  ،  $(w_n)$  متتاليات متقاربة وتحقق  $\forall n \in \mathbb{N}: w_n \leq u_n \leq v_n$  وكانت

$$\lim u_n = \ell \text{ فإن } \lim w_n = \lim v_n = \ell$$

**البرهان:**

- لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين متقاربتين حيث:  $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq v_n$  و  $\lim v_n = \ell'$  و  $\lim u_n = \ell$

نفرض أن  $\ell' > \ell$ ، من أجل  $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{2}$  فإن:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_0 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \varepsilon \text{ و } \exists N_1 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا

$$. n > N_0 \Rightarrow \frac{3\ell' - \ell}{2} < v_n < \frac{\ell + \ell'}{2} \text{ و } n > N_1 \Rightarrow \frac{\ell + \ell'}{2} < u_n < \frac{\ell + 3\ell'}{2}$$

بوضع  $N = \max\{N_0, N_1\}$  فإنه من أجل  $n > N$ :  $v_n < \frac{\ell + \ell'}{2} < u_n$  و هذا تناقض (لأن  $u_n \leq v_n$ ).

**ملاحظة:** الحالة الثانية هي نتيجة مباشرة للحالة الأولى.

### 3.2 المتتاليات الجزئية:

#### تعريف 5.2:

لتكن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية حقيقية ولتكن  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  متتالية متزايدة تماما من الأعداد الطبيعية نقول عن المتتالية  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  أنها متتالية جزئية من المتتالية  $(u_n)$ .

#### نظرية 6.2:

كل متتالية جزئية لمتتالية متقاربة هي متتالية متقاربة ولها نفس النهاية (العكس غير صحيح).

**البرهان:** للبرهان على هذه النظرية نحتاج للقضية التالية

#### قضية 2.2:

إذا كانت  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  متتالية من الأعداد الطبيعية متزايدة تماما فإن:  $\forall k \in \mathbb{N}: n_k \geq k$ .

#### برهان القضية 2.2:

$$. n_0 \in \mathbb{N} \text{ لأن } n_0 \geq 0$$

نفرض  $n_k \geq k$  ونبرهن أن  $n_{k+1} \geq k+1$ .

بما أن  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  متتالية متزايدة تماما فإن  $n_{k+1} > n_k$  و منه  $n_{k+1} > k$  أي أن  $n_{k+1} \geq k+1$ .

نأتي الآن إلى برهان النظرية 6.2.

لتكن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة نحو العدد الحقيقي  $\ell$ .

لدينا  $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$  و منه

$$. \forall k \in \mathbb{N}: k > N \Rightarrow n_k > n_N \geq N \Rightarrow |u_{n_k} - \ell| < \varepsilon$$

$$. \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = \ell \text{ إذن } \forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall k \in \mathbb{N}: k > N \Rightarrow |u_{n_k} - \ell| < \varepsilon$$

$$. \forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \text{ :مثال 01}$$

المتتاليتين  $u_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$ ;  $u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$  متتاليتين جزئيتين للمتتالية  $(u_n)$  بما أن  $(u_n)$  متقاربة نحو 1 فإن كلاً من المتتاليتين  $(u_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  و  $(u_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  متقاربتين نحو 1.

**ملاحظة:** باستعمال العكس النقيض للاستلزام الوارد في النظرية (6.2) يمكننا إثبات تباعد بعض المتتاليات.

**مثال 02:** لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $u_n = \frac{n+1}{n+2} \sin \frac{n\pi}{2}$   $\forall n \in \mathbb{N}$

لننشئ المتتاليتين الجزئيتين  $(u_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  و  $(u_{4k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  حيث  $\begin{cases} u_{2k} = 0 \\ u_{4k+1} = \frac{4k+2}{4k+3} \end{cases} \forall k \in \mathbb{N}$ .

لدينا  $\lim u_{2k} = 1$  و  $\lim u_{4k+1} = 1$  و منه  $\lim u_{2k} \neq \lim u_{4k+1}$  إذن المتتالية  $(u_n)$  متباعدة.

**5.2 تعميم إلى النهايات اللانتهية:**

**تعريف 6.2:**

نقول أن نهاية المتتالية  $(u_n)$  هي  $+\infty$  إذا تحقق ما يلي:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow u_n > A$$

**تعريف 7.2:**

نقول أن نهاية المتتالية  $(u_n)$  هي  $-\infty$  إذا تحقق ما يلي:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow u_n < -A$$

**مثال:**  $\alpha$  عدد حقيقي حيث  $\alpha > 1$ ،  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة بـ  $v_n = \alpha^n$   $\forall n \in \mathbb{N}$ .

لنثبت أن:  $\lim v_n = +\infty$  (استعمل متراجحة برنولي:  $(1+a)^n \geq 1+na$   $\forall n \in \mathbb{N}; \forall a > -1$ ).

ليكن  $A \in \mathbb{R}_+^*$ ، بوضع  $a = \alpha - 1 > 0$  فإن  $(1+a)^n \geq 1+na$   $\forall n \in \mathbb{N}$  و منه

$$|v_n| > A \Leftrightarrow \alpha^n > A \Leftrightarrow (1+a)^n > A$$

يكفي أخذ  $1+na > A$  و منه

$$1+na > A \Leftrightarrow n > \frac{A-1}{a} = \frac{A-1}{\alpha-1}$$

ومنه يكفي اختيار  $N = E\left(\frac{A-1}{\alpha-1}\right) + 1$ .

**نظرية 7.2: (بولزانو-فايرشتراس (BOLZANO-WEIERSTRASS)**

من كل متتالية حقيقية محدودة يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة.

**البرهان:** لتكن  $(u_n)$  متتالية محدودة، نضع  $a_0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$  و  $b_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$

لدينا  $\forall n \in \mathbb{N}: a_0 \leq u_n \leq b_0$  نضع  $I_0 = [a_0, b_0]$

لنقسم المجال  $I_0$  إلى مجالين متساويين في الطول، واحد على الأقل من هذين المجالين يحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتالية  $(u_n)$  نرمز له بـ  $I_1 = [a_1, b_1]$ ، ليكن  $u_{n_1}$  حداً من حدود المتتالية  $(u_n)$  حيث  $u_{n_1} \in I_1$ .

لنقسم المجال  $I_1$  إلى مجالين متساويين في الطول، واحد على الأقل من هذين المجالين يحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتالية  $(u_n)$  نرمز له بـ  $I_2 = [a_2, b_2]$ ، ليكن  $u_{n_2}$  حداً من حدود المتتالية  $(u_n)$  حيث  $u_{n_2} \in I_2$  و

$n_2 > n_1$  ( و هذا ممكن لأن  $I_2$  يحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتالية  $(u_n)$  ) و هكذا ننشئ متتالية مجالات  $I_k = [a_k, b_k]$  حيث  $I_k$  هو أحد نصفي المجال  $I_{k-1}$  الذي يحوي على عدد غير منتهي من حدود المتتالية  $(u_n)$  و  $u_{n_k} \in I_k$  حد من حدود المتتالية  $(u_n)$  حيث  $u_{n_k} \in I_k$  و  $n_k > n_{k-1}$  عندئذ نحصل على متتالية  $(u_{n_k})$  جزئية من

المتتالية  $(u_n)$  تحقق  $\forall k \in \mathbb{N}: a_k \leq u_{n_k} \leq b_k$ .

لدينا  $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k} = 0$  و بما أن  $I_k \subset I_{k-1}$  فإن المتتالية  $(a_k)$  متزايدة و المتتالية  $(b_k)$  متناقصة إذن المتتاليتين  $(a_k)$  ،  $(b_k)$  متجاورتين وبالتالي المتتالية  $(u_{n_k})$  متقاربة و نهايتها هي النهاية المشتركة للمتتاليتين  $(a_k)$  و  $(b_k)$ .

#### 4.2 المتتاليات المتجاورة:

#### تعريف 8.2:

نقول عن متتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  أنهما متجاورتين إذا، و فقط إذا كانت إحداها متناقصة والأخرى متزايدة وكانت:

$$\lim(u_n - v_n) = 0$$

#### نظرية 8.2:

كل متتاليتين متجاورتين هما متتاليتين متقاربتين ولهما نفس النهاية.

#### البرهان:

لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين متجاورتين حيث  $(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة. إن المتتالية  $(v_n - u_n)$  متناقصة، فهي إذن متقاربة نحو حدها الأدنى 0 و منه فإن  $\forall n \in \mathbb{N}: v_n - u_n \geq 0$ . أي أن  $\forall n \in \mathbb{N}: v_n \geq u_n$  و منه نستنتج أن  $u_0 < u_n < v_n < v_0$ . إذن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  رتيبيتين و محدودتين فهما متقاربتين.

نفرض أن  $\lim u_n = \ell$  و  $\lim v_n = \ell'$  بما أن  $\lim(u_n - v_n) = 0$  فإن  $\ell - \ell' = 0$  و منه  $\ell = \ell'$ .

مثال: لتكن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين بـ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} ; v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \text{ متزايدة تمامًا.}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \text{ متناقصة تمامًا.}$$

$$\lim(u_n - v_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$$

إذن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتين، فهما متقاربتين ولهما نهاية مشتركة.

$$\text{(يبرهن على أن } \lim u_n = \lim v_n = \frac{\pi^2}{6} \text{)}$$

#### 5.2 متتالية كوشي: (Suite de Cauchy)

#### تعريف 9.2:

نقول عن متتالية  $(u_n)$  أنها متتالية كوشي (أو كوشية) إذا، و فقط إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall p, q \in \mathbb{N}: (p > N \wedge q > N) \implies |u_p - u_q| < \varepsilon$$

#### صيغة ثانية:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n; p \in \mathbb{N}: n > N \implies |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

## نظرية 9.2:

تكون متتالية أعداد حقيقة متقاربة إذا، فقط إذا كانت متتالية كوشي.

### البرهان:

**الشرط اللازم:** لتكن  $(u_n)$  متتالية متقاربة نحو العدد الحقيقي  $l$ .

لدينا  $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$  فإن:

$$(p > N \wedge q > N) \Rightarrow |u_p - u_q| = |u_p - l - (u_q - l)| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

**الشرط الكافي:** نفرض  $(u_n)$  متتالية كوشي

**أولاً:** من أجل  $\varepsilon = 1$  فإن:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}; \forall n; q \in \mathbb{N}: (n > N_0 \wedge q > N_0) \Rightarrow |u_n - u_q| < 1$$

و من أجل  $q = N_0 + 1$  فإن:

$$\forall n \in \mathbb{N}: n > N_0 \Rightarrow |u_n - u_{N_0+1}| < 1$$

$$\Rightarrow \left| |u_n| - |u_{N_0+1}| \right| < 1$$

$$\Rightarrow |u_n| < |u_{N_0+1}| + 1$$

إن المجموعة  $A = \{|u_0|, |u_1|, |u_2|, \dots, |u_{N_0}|, |u_{N_0+1}| + 1\}$  منتهية فهي تقبل عنصر أكبر

نرمز له بـ  $M$ ، عندئذ فإن:  $\forall n \in \mathbb{N}: |u_n| \leq M$  إذن  $(u_n)$  محدودة.

**ثانياً:** بما أن  $(u_n)$  محدودة، حسب النظرية 7.2 يمكن استخراج من المتتالية  $(u_n)$  متتالية جزئية  $(u_{n_k})$  متقاربة نحو

عدد حقيقي  $l$ .

ليكن  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  عندئذ فإن

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > k_0 \Rightarrow |u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}; \forall p; q \in \mathbb{N}: (p > N_1 \wedge q > N_1) \Rightarrow |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

من أجل  $N = \max\{k_0, N_1\}$  فإن:

$$\forall p \in \mathbb{N}: p > N \Rightarrow \begin{cases} p > k_0 \\ n_p \geq p > N_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u_{n_p} - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |u_p - u_{n_p}| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

و منه

$$\forall p \in \mathbb{N}: p > N \Rightarrow |u_p - l| = |u_p - u_{n_p} + u_{n_p} - l| < |u_p - u_{n_p}| + |u_{n_p} - l| < \varepsilon$$

إذن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو  $l$ .

## نتيجة 1.2:

تكون متتالية  $(u_n)$  متباعدة إذا، فقط إذا تحقق مايلي:

$$\exists \varepsilon > 0; \forall N \in \mathbb{N}; \exists p; q \in \mathbb{N}: p > N \wedge q > N \wedge |u_p - u_q| \geq \varepsilon$$

**مثال 01:** لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

لنثبت أن  $(u_n)$  متتالية متباعدة.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$u_{2n} - u_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: |u_{2n} - u_n| \geq \frac{1}{2}$$

إذا اخترنا  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  ،  $p = 2n$  ،  $q = n$  يتحقق الآتي:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*; \forall n \in \mathbb{N}^*; \exists p; q \in \mathbb{N} : p \geq n \wedge q \geq n \wedge |u_p - u_q| \geq \varepsilon$$

**مثال 02:**

لتكن  $(u_n)$  متتالية حقيقية حيث:  $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

أثبت أن  $(u_n)$  متتالية كوشي.

من أجل  $p, n \in \mathbb{N}$  فإن :

$$|u_{n+p} - u_n| = |u_{n+p} - u_{n+p-1} + u_{n+p-1} - u_{n+p-2} + \dots + u_{n+1} - u_n|$$

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \dots + |u_{n+1} - u_n|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+p-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+p-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\leq 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بما أن  $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  فإن  $2 \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \Rightarrow \forall n > N \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

إذًا  $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n; p \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

**6.2 المتتاليات التراجعية:**

**تعريف 10.2:**

ليكن  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  تابع، حيث  $f(D) \subset D$  و  $\alpha \in D$

نقول عن متتالية  $(u_n)$ ، أنها متتالية تراجعية إذا كانت معرفة بإعطاء  $u_0 = \alpha$  و العلاقة التراجعية:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = f(u_n)$$

**اتجاه التغير:** إن دراسة رتبة المتتالية  $(u_n)$  ترد إلى دراسة رتبة التابع  $f$ ، باستعمال البرهان بالتراجع يمكن البرهان على صحة النتائج التالية.

- إذا كان  $f$  متزايد فإن المتتالية  $(u_n)$  رتيبة و تكون متزايدة إذا كان  $f(u_0) - u_0 \geq 0$  و متناقصة إذا كان  $f(u_0) - u_0 \leq 0$ .

- إذا كان  $f$  متناقص فإن إشارة الفرق  $u_{n+1} - u_n$  سالبة و موجبة بالتناوب أي أن  $(u_n)$  غير رتيبة في هذه الحالة.

### التقارب:

**قضية 3.2:** نفرض أن  $f$  مستمر على  $D$  إذا تقاربت المتتالية  $(u_n)$  نحو نهاية  $\ell$  من  $D$  فإن هذه النهاية هي حل للمعادلة  $f(x) = x$ .

### البرهان:

إذا كانت المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو العدد  $\ell$  من  $D$  عندئذ فإن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \ell$

بما أن  $f$  مستمر عند  $\ell$  فإن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\ell)$

لدينا من جهة أخرى:  $u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \Rightarrow \ell = f(\ell)$

### ملاحظات:

- يرد إذن البحث عن نهاية المتتالية  $(u_n)$  إلى حل المعادلة  $f(x) = x$  ذات المجهول  $x$  في المجموعة  $D$ .
- إذا لم تقبل المعادلة حلول فإن المتتالية لا تقبل نهاية، أما إذا قبلت المعادلة حل أو أكثر فإن المسألة تؤول إلى دراسة إمكانية أن يكون أحد هذه الحلول هو نهاية للمتتالية  $(u_n)$ .
- إذا قبلت المعادلة  $f(x) = x$  حولا فهذا لا يعني بالضرورة أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

### مثال 1:

لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $u_0 = a \geq 0$  و  $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

نضع:  $D = [-2, +\infty[$ ،  $f(x) = \sqrt{x + 2}$

بما أن التابع  $f$  معرف و مستمر و متزايد تماما على المجال  $D$  و  $f(D) \in D$  فإن المتتالية  $(u_n)$  معرفة و رتيبة و اتجاه تغيرها تحدده إشارة الفرق  $f(u_0) - u_0$ .

لدينا:  $f(u_0) - u_0 = f(a) - a = \sqrt{a + 2} - a = \frac{-a^2 + a + 2}{\sqrt{a + 2} + a} = \frac{(1 + a)(2 - a)}{\sqrt{a + 2} + a}$  إذن إشارة الفرق

$f(u_0) - u_0$  من إشارة  $2 - a$  و المعادلة  $\sqrt{x + 2} = x$ ، تقبل حل وحيد هو  $x = 2$  و منه النتائج التالية:

(1)  $a < 2$  المتتالية متزايدة و يمكننا إثبات وراثية هذه الخاصية (أي أن  $\forall n \in \mathbb{N}: u_n < 2$ ) إذن المتتالية محدودة من الأعلى بـ 2.

(2)  $a > 2$  المتتالية متناقصة و محدودة من الأدنى بـ 2.

(3)  $a = 2$  المتتالية ثابتة.

إذن المتتالية متقاربة في جميع الحالات و نهايتها 2.

### مثال 2:

لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $u_0 = a > 1$  و  $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = (u_n)^2$ .

نضع:  $\forall x \in D = [0, +\infty[ : f(x) = x^2$ .

بما أن التابع  $f$  معرف و مستمر و متزايد تماما على المجال  $D$  و  $f(D) \in D$  و  $f(a) - a = a^2 - a > 0$  فإن المتتالية  $(u_n)$  معرفة و متزايدة تماما.

و المعادلة  $x^2 = x$ ، تقبل حلين هما:  $x = 0$  و  $x = 1$ ، لكن المتتالية  $(u_n)$  متباعدة لأن:

باستعمال البرهان بالتراجع نبرهن على أن  $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = a^{(2^n)}$  ومنه فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

## المحور الثالث: التوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي (Fonctions réelles d'une variable réelle)

### 1.3.1.3 عموميات

#### تعريف 1.3:

- نسمي تابعًا حقيقيًا لمتغير حقيقي، كل تطبيق  $f$  لمجموعة جزئية  $D$  من  $\mathbb{R}$  في المجموعة  $\mathbb{R}$ . تسمى  $D$  مجموعة تعريف  $f$ .
- نسمي بيان التابع  $f$  المجموعة الجزئية من  $\mathbb{R}^2$  والتي نرمز لها بـ  $\Gamma_f$  و المعرفة كمايلي:  
 $\Gamma_f = \{(x; f(x)); x \in D\}$  أو  $\Gamma_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x \in D \wedge y = f(x)\}$
- نرمز بـ  $f(D)$  لصورة المجموعة  $D$  حيث  $f(D) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in D: y = f(x)\}$ .

### 1.1.3 التوابع المحدودة، التوابع الرتيبة:

#### تعريف 2.3:

لتكن  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  تابع ( $D \subset \mathbb{R}$ ).

- نقول أن التابع  $f$  محدود من الأعلى (محدود من الأدنى، على الترتيب) إذا، فقط إذا كانت المجموعة  $f(D)$  محدودة من الأعلى (محدود من الأدنى، على الترتيب) أي  $\exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in D: f(x) \leq M$  (الترتيبي على).
- نقول أن التابع  $f$  محدود إذا، فقط إذا كان محدودًا من الأعلى و من الأسفل أي  $\exists M \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in D: |f(x)| \leq M$ .

#### نتيجة 1.3:

إذا كان التابع  $f$  محدود على  $D$  فإن الجزء  $f(D)$  محدود في  $\mathbb{R}$ ، فهو يقبل حدًا أعلى و حدًا أدنى نرمز لهما بـ  $Sup_D f$  و  $Inf_D f$  على الترتيب.

#### تعريف 3.3:

لتكن  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  تابع ( $D \subset \mathbb{R}$ )

- نقول أن  $f$  متزايد على  $D$  (متزايد تمامًا، على الترتيب) إذا، فقط إذا كان:  
 $(\forall x; y \in D: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)) \vee (\forall x; y \in D: x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$
- نقول أن  $f$  متناقص على  $D$  (متناقص تمامًا، على الترتيب) إذا، فقط إذا كان:  
 $(\forall x; y \in D: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)) \vee (\forall x; y \in D: x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$ .
- نقول أن  $f$  ثابت على  $D$  إذا، فقط إذا كان:  $\forall x; y \in D: x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y)$ .

#### تعريف 4.3:

لتكن  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  تابع ( $D \subset \mathbb{R}$ ).

- نقول أن  $f$  يقبل قيمة عظمى محلية (قيمة صغرى محلية، على الترتيب) عند النقطة  $x_0$  من  $D$  إذا تحقق:
- $$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in D: |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)) \vee (\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in D: |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \geq f(x_0))$$
- على الترتيب).
- وإذا كان:  $(\forall x \in D: f(x) \leq f(x_0)) \vee (\forall x \in D: f(x) \geq f(x_0))$  (على الترتيب)
- نقول أن  $f$  يقبل قيمة عظمى (صغرى، على الترتيب) مطلقة عند  $x_0$ .

### 2.3 نهاية تابع:

### 1.2.3 النهاية المنتهية:

### تعريف 5.3:

- نقول عن جزء من  $\mathbb{R}$ ، أنه جوار للنقطة  $x_0$  من  $\mathbb{R}$  إذا احتوى على مجال مفتوح يشمل  $x_0$  نرمز لجوار النقطة  $x_0$  بالرمز  $V_{x_0}$ .
- نقول عن تابع  $f$  معرف في جوار  $V_{x_0}$  لـ  $x_0$ ، باستثناء محتمل لـ  $x_0$ ، أن له نهاية  $\ell$  ( $\ell \in \mathbb{R}$ ) عند النقطة  $x_0$  إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; \forall x \in V_{x_0} : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\text{ونكتب } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

**ملاحظة:** نقول أن  $f$  لا يقبل العدد  $\ell$  كنهاية عند  $x_0$  إذا، و فقط إذا كان:

$$\exists \varepsilon > 0 ; \forall \delta > 0 ; \exists x \in V_{x_0} : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ و } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

### قضية 1.3:

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$ ، فإنه يوجد على الأقل مجال من الشكل  $]x_0 - \alpha, x_0[ \cup ]x_0, x_0 + \alpha[$

مع  $\alpha > 0$ ، تكون فيه لـ  $f(x)$  نفس إشارة  $\ell$ .

### البرهان:

من أجل  $\varepsilon = |\ell|$  فإنه  $\exists \alpha > 0 ; \forall x \in V_{x_0} : 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < |\ell|$  و منه

$$\exists \alpha > 0 ; \forall x \in V_{x_0} : x \in ]x_0 - \alpha, x_0[ \cup ]x_0, x_0 + \alpha[ \Rightarrow \begin{cases} 2\ell < f(x) < 0 ; \ell < 0 \\ 0 < f(x) < 2\ell ; \ell > 0 \end{cases}$$

### أمثلة:

1. ليكن  $f: x \rightarrow 5x - 7$ ، أثبت باستعمال التعريف أن:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

بما أن  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ ، يمكن أخذ  $V_2 = \mathbb{R}$  جوار لـ 2، ليكن  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  لدينا:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |5x - 7 - 3| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$$

إذا يكفي أخذ  $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$  حتى يتحقق الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$$

2. ليكن  $f: x \rightarrow \frac{1}{x+1}$ ، أثبت باستعمال التعريف أن:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$

بما أن  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  يمكن أخذ  $V_1 = ]0; +\infty[$  جوار لـ 1، ليكن  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  لدينا:

$$\forall x \in V_1 : \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|x-1|}{2|x+1|} < \frac{|x-1|}{2}$$

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < 2\varepsilon \text{ ومنه } \frac{|x-1|}{2} < \varepsilon \text{ إذا كان } |x-1| < 2\varepsilon$$

إذاً يكفي أخذ  $\delta = 2\varepsilon$  حتى يتحقق الآتي :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_1: 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

### تعريف 6.3:

- ليكن  $f$  تابع معرف في جوار  $V_{x_0}$  لـ  $x_0$  من اليمين ، نقول أن  $f$  يقبل نهاية  $\ell$  من اليمين عند  $x_0$  إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\text{ونكتب } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \text{ أو } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

- ليكن  $f$  تابع معرف في جوار  $V_{x_0}$  لـ  $x_0$  من اليسار ، نقول أن  $f$  يقبل نهاية  $\ell$  من اليسار عند  $x_0$  إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\text{ونكتب } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \text{ أو } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

### نتيجة 2.3:

تكون للتابع  $f$  نهاية عند  $x_0$  إذا، وفقط إذا كان يقبل نهايتين من اليمين و من اليسار عند  $x_0$  تكونا متساويتين.

### مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{6}{x+2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{ليكن التابع } f \text{ المعرف على } \mathbb{R}$$

أثبت أن:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ ، ماذا تستنتج ؟

$$1. \text{ لنثبت أن: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

ليكن  $V_1 = ]-\infty; 1]$  جوار لـ 1 من اليسار و  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  لدينا:

$$\forall x \in V_1: |f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 3| < \varepsilon$$

$$|3x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 < -x + 1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

يكفي أخذ  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$  حتى يتحقق الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_1: 0 < 1 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

$$2. \text{ لنثبت أن } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

ليكن  $V_1 = [1; +\infty[$  جوار لـ 1 من اليمين و  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  لدينا:

$$\forall x \in V_1: |f(x) - 2| = \frac{2|x-1|}{x+2} < \frac{2}{3}|x-1|$$

$$\frac{2}{3}|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{3}{2}\varepsilon \Leftrightarrow 0 < x-1 < \frac{3}{2}\varepsilon$$

إذن يكفي أخذ  $\delta = \frac{3\varepsilon}{2}$  حتى يتحقق الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V: 0 < 1 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

الاستنتاج: بما أن  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$  فإن  $f$  يقبل نهاية عند 1 وهي 2.

### نظرية 1.3:

إذا قبل تابع  $f$  نهاية منتهية عند  $x_0$  فإن هذه النهاية وحيدة.

#### البرهان:

نفرض  $f$  يقبل نهايتين مختلفتين  $\ell$  و  $\ell'$  حيث  $\ell > \ell'$ ، من أجل  $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{2}$  فإن:

$$\exists \delta_1 > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\ell - \ell'}{2}$$

$$|f(x) - \ell| < \frac{\ell - \ell'}{2} \Leftrightarrow \frac{\ell + \ell'}{2} < f(x) < \frac{3\ell - \ell'}{2}$$

$$\exists \delta_2 > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \frac{\ell - \ell'}{2}$$

$$|f(x) - \ell'| < \frac{\ell - \ell'}{2} \Leftrightarrow \frac{\ell + 3\ell'}{2} < f(x) < \frac{\ell + \ell'}{2}$$

من أجل  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  فإن

$$\forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < \frac{\ell + \ell'}{2} \text{ و } \frac{\ell + \ell'}{2} < f(x)$$

و هذا تناقض.

### 2.2.3 نهاية تابع باستعمال المتتاليات:

#### نظرية 2.3:

ليكن  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  تابع و  $x_0 \in D$  إن الشرطين التاليين متكافئين

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

2. من أجل كل متتالية  $(x_n)$  حيث  $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in D \wedge x_n \neq x_0$  فإن:

$$(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell)$$

#### البرهان:

الشرط اللازم: نفرض  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  و لتكن  $(x_n)$  متتالية حيث  $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in D \wedge x_n \neq x_0$

$$\text{و } (\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0) \text{ و لنبرهن أن } (\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell)$$

لدينا  $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$$

و منه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell \text{ إذن } \forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$$

الشرط الكافي: نفرض الآن أنه من أجل كل متتالية  $(x_n)$  حيث  $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in D \wedge x_n \neq x_0$  فإن:

$$(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell)$$

و لنبرهن أن  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  نفرض أن  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \ell$  أي أن

$$\exists \varepsilon > 0; \forall \delta > 0; \exists x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \text{ و } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

$$\text{فإن } \delta = \frac{1}{n} \text{ و من أجل } x \neq x_0 \text{ و } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ و } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \exists x_n \neq x_0 \text{ و } x_n \in V_{x_0}: |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ و } |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$$

أي أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$  لكن  $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \ell$  وهذا تناقض.

### نتيجة 3.3:

لإثبات أن تابع  $f$  ليس له نهاية عند  $x_0$  يكفي إيجاد متتاليتين  $(x_n)$  و  $(x'_n)$  متقاربتان نحو نفس النهاية  $x_0$  لكن  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  أو نبحت عن متتالية  $(x_n)$  متقاربة نحو  $x_0$  لكن المتتالية  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  متباعدة.

### مثال:

أثبت أن التابع  $f: x \rightarrow \cos \frac{1}{x}$  لا يقبل نهاية عند 0

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: x_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad x'_n = \frac{1}{2\pi n + \pi} \text{ حيث } (x'_n) \text{ و } (x_n) \text{ المتتاليتين}$$

$$\text{لدينا من جهة: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$$

$$\text{من جهة أخرى فإن: } f(x'_n) = -1; \quad f(x_n) = 1$$

$$\text{ومنه } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = -1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$$

إذن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  أي أن  $f$  لا يقبل نهاية عند 0.

### 3.2.3 النهايات غير المنتهية:

نسمي جوار  $+\infty$  ( $-\infty$ ، على الترتيب) كل جزء من  $\mathbb{R}$  يحتوي مجال من الشكل  $]a; +\infty[$  و  $]-\infty; a[$ ، على الترتيب) حيث  $a \in \mathbb{R}$  و نرمز له بـ  $V_{+\infty}$  ( $V_{-\infty}$ ، على الترتيب).

### تعريف 7.3:

$$(\forall \varepsilon > 0; \exists A > 0; \forall x \in V_{+\infty}: x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell)$$

$$(\forall \varepsilon > 0; \exists A > 0; \forall x \in V_{-\infty}: x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell)$$

$$(\forall A > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty)$$

$$(\forall A > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty)$$

$$(\forall A > 0; \exists B > 0; \forall x \in V_{+\infty}: x > B \Rightarrow f(x) > A) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$$

$$(\forall A > 0; \exists B > 0; \forall x \in V_{+\infty}: x > B \Rightarrow f(x) < -A) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty)$$

$$(\forall A > 0; \exists B > 0; \forall x \in V_{-\infty}: x < -B \Rightarrow f(x) > A) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty)$$

$$(\forall A > 0; \exists B > 0; \forall x \in V_{-\infty}: x < -B \Rightarrow f(x) < -A) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty)$$

**أمثلة:**

$$1. \text{ أثبت أن: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

الدالة  $x \rightarrow \frac{2x}{x-1}$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  ليكن  $+\infty[$  جوار  $V_{+\infty} = ]1; +\infty[$  و  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  لدينا:

$$\forall x \in V_{+\infty}: |f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{|x-1|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{2}{\varepsilon} + 1$$

إذن يكفي اختيار  $B = \frac{2}{\varepsilon} + 1$  حتى يتحقق الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists B \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in V_{+\infty}: x > B \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

$$2. \text{ أثبت أن: } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

ليكن  $]0; 1[$  جوار  $V_1 = ]0; 1[$  من اليسار و  $A \in \mathbb{R}_+^*$  لدينا:

$$\forall x \in V_1: f(x) < -A \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} < -A \Leftrightarrow 2 + \frac{2}{x-1} < -A$$

$$\Leftrightarrow 0 > x-1 > \frac{2}{-A-2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1-x < \frac{2}{A+2}$$

إذن يكفي أخذ  $\varepsilon = \frac{2}{A+2}$  حتى يتحقق الآتي:

$$\forall A > 0; \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in V_1: 0 < 1-x < \delta \Rightarrow f(x) < -A$$

### 4.2.3 نظريات على النهايات:

#### نظرية 3.3:

- ليكن  $f$  و  $g$  تابعين معرفين على نفس الجوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$ ، باستثناء محتمل  $x_0$ ، حيث  $\forall x \in V_{x_0}: f(x) < g(x)$ .
- 1. إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$  فإن  $\ell \leq \ell'$ .
- 2. إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ .
- 3. إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .

- إذا كانت  $f, g, h$  توابع معرفة على نفس الجوار  $V_{x_0}$  باستثناء محتمل  $x_0$ ، حيث  $\forall x \in V_{x_0}: h(x) < f(x) < g(x)$  و كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

**البرهان:**

(1) نفرض  $\forall x \in V_{x_0}: f(x) < g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  ولنبرهن

أن  $\ell \leq \ell'$ .

نفرض  $\ell > \ell'$ ، من أجل  $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{2}$

$$\exists \delta_1 > 0: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \frac{\ell + \ell'}{2} < f(x) < \frac{3\ell - \ell'}{2}$$

$$\exists \delta_2 > 0: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \varepsilon \Rightarrow \frac{3\ell' - \ell}{2} < g(x) < \frac{\ell + \ell'}{2}$$

من أجل  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  فإن

$$\forall x \in V_{x_0}: f(x) < g(x) \text{ لأن } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow g(x) < \frac{\ell + \ell'}{2} < f(x)$$

بنفس الطريقة نبرهن على باقي الحالات الأخرى.

### نظرية 4.3:

إذا كان  $f$  و  $g$  تابعين معرفين على نفس الجوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$ ، بإستثناء محتمل لـ  $x_0$ ، وكانت نهايتا  $f$  و  $g$  عند  $x_0$  هما  $\ell$ ،  $\ell'$  على الترتيب فإن نهايات التوابع:  $f + g$ ،  $f - g$ ،  $\lambda f$ ،  $|f|$  عند  $x_0$  هي  $\ell + \ell'$ ،  $\ell - \ell'$ ،  $\lambda \ell$ ،  $|\ell|$ ، على الترتيب. وإذا كانت  $\ell' \neq 0$  و  $f(x) \neq 0 \forall x \in V_{x_0}$  فإن نهاية التابع  $\frac{1}{f}$  عند  $x_0$  هي  $\frac{1}{\ell'}$ .

**البرهان:** لنبرهن على الحالة الأخيرة

نفرض  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell' \neq 0$  و  $\forall x \in V_{x_0}: g(x) \neq 0$  من أجل  $\varepsilon = \frac{|\ell'|}{2}$  فإن

$$\exists \delta_1 > 0: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \frac{|\ell'|}{2}$$

$$\Rightarrow ||g(x)| - |\ell'|| < \frac{|\ell'|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|\ell'|}{2} < |g(x)| < \frac{3|\ell'|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|\ell'|}$$

لدينا أيضا:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta_2 > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \varepsilon$$

من أجل  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  فإن:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell'} \right| = \left| \frac{\ell' - g(x)}{\ell' g(x)} \right| < \frac{2|g(x) - \ell'|}{|\ell'|^2} < \frac{2\varepsilon}{|\ell'|^2} = \varepsilon'$$

### 5.2.3 معيار كوشي الخاص بالتوابع:

### نظرية 5.3:

تكون التابع  $f$  نهاية منتهية عند  $x_0$  إذا، فقط إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x', x'' \in V_{x_0}: (0 < |x' - x_0| < \delta \text{ و } 0 < |x'' - x_0| < \delta)$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

**البرهان:**

**الشرط اللازم:** لنفرض أن  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  إذن:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x', x'' \in V_{x_0}: (0 < |x' - x_0| < \delta \text{ و } 0 < |x'' - x_0| < \delta)$$

$$\Rightarrow |f(x') - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ و } |f(x'') - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - \ell - (f(x'') - \ell)| < |f(x') - \ell| + |(f(x'') - \ell)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

**الشرط الكافي:** نفرض أن

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x', x'' \in V_{x_0}: (0 < |x' - x_0| < \delta \text{ و } 0 < |x'' - x_0| < \delta)$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

و لتكن  $(x_n)$  متتالية من عناصر  $V_{x_0}$  حيث  $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \neq x_0$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  و منه

مقابل العدد  $\delta$  يوجد عدد طبيعي  $N_0$  حيث  $\forall n \in \mathbb{N}; n > N_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta$  و ليكن  $p$  و  $q$  عددين طبيعيين حيث  $p > N_0$  و  $q > N_0$  عندئذ فإن  $0 < |x_q - x_0| < \delta$  و  $0 < |x_p - x_0| < \delta$  و منه فإن

$$|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon \text{ أي أن المتتالية } (f(x_n)) \text{ كوشية و بالتالي فهي متقاربة.}$$

لنبين الآن أن النهاية  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  مستقلة عن اختيار المتتالية  $(x_n)$ .

لتكن  $(x_n)$  و  $(x'_n)$  متتاليتين حيث  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  و منه يوجد عدد طبيعي  $N$  حيث

$$\forall n > N: (0 < |x_n - x_0| < \delta \text{ و } 0 < |x'_n - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$$

### 6.2.3 مقارنة التوابع بجوار نقطة - ترميز لاندو:

ليكن  $f$  و  $g$  تابعين معرفين في جوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$ ، باستثناء محتمل لـ  $x_0$ .

#### تعريف 8.3:

نقول أن  $f$  مهمل أمام  $g$  عندما  $x \rightarrow x_0$ ، ونكتب  $f = o(g)$ ، إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

#### تعريف 9.3:

نقول أن  $g$  مسيطر على  $f$  عندما  $x \rightarrow x_0$ ، ونكتب  $f = O(g)$ ، إذا كان

$$\exists k > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq k |g(x)|$$

يسمى الرمزان  $o$  و  $O$  رمزي لاندو.

ينتج من التعريف أنه إذا لم يندم  $g$  على  $V_{x_0}$  فإن

$$f = O(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ و } f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ محدود في } V_{x_0}$$

و إذا كان  $g = 1$  فإن  $f = o(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  و  $f = O(1) \Leftrightarrow$  محدود في  $V_{x_0}$

#### تعريف 10.3:

ليكن  $f$  و  $g$  تابعين معرفين في جوار  $V_{+\infty}$  لـ  $x_0$  ( $V_{-\infty}$ ، على الترتيب) عندئذ فإن

$$(f = o(g) \text{ لما } x \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{+\infty}: x > \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|)$$

$$(f = O(g) \text{ لما } x \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow (\exists k > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{+\infty}: x > \delta \Rightarrow |f(x)| \leq k |g(x)|)$$

بنفس الطريقة نعرف العلاقتين  $f = o(g)$  و  $f = O(g)$  لما  $x \rightarrow -\infty$ .

#### أمثلة:

(1) لما  $x \rightarrow 0$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 = o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^4\right), \quad x^2 \cos \frac{1}{x} = O(x^2), \quad x^3 = o(x^2)$$

(2) لما  $x \rightarrow +\infty$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4 = o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right), x^2 \sin x = O(x^2), x^2 = o(x^3)$$

### نظرية 6.3:

$$f = gh \Leftrightarrow f = o(g) \text{ حيث } h = o(1) \quad (1)$$

$$f = O(g) \Leftrightarrow f = O(1) \text{ حيث } h = O(1) \quad (2)$$

البرهان: ( لنبرهن على 1 مثلا )

(1) الشرط اللازم: نفرض  $f = o(g)$  و نبين أن  $f = gh$  حيث  $h = o(1)$ .

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & g(x) \neq 0 \\ 0, & g(x) = 0 \end{cases} \text{ نضع}$$

لدينا  $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \Leftrightarrow f = o(g)$

أولاً: لنبين أن  $f = gh$ .

إذا كان  $g(x) = 0$  فإن من المتباينة  $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$  نحصل على  $f(x) = 0$  أي أن  $f = gh$ .

و إذا كان  $g(x) \neq 0$  فإن  $f(x) = g(x) \frac{f(x)}{g(x)}$  و منه  $f = gh$ .

ثانياً: لنبين أن  $h = o(1)$  أي أن  $|h(x)| \leq \varepsilon$   $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |h(x)| \leq \varepsilon$

إذا كان  $g(x) = 0$  فإن  $h(x) = 0$  و منه  $|h(x)| \leq \varepsilon$ .

إذا كان  $g(x) \neq 0$  فإن  $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$  و منه  $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \varepsilon$  أي أن  $|h(x)| \leq \varepsilon$ .

الشرط الكافي: نفرض  $f = gh$  و  $h = o(1)$  و نبين أن  $f = o(g)$ .

لدينا  $h = o(1) \Leftrightarrow |h(x)| \leq \varepsilon \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |h(x)| \leq \varepsilon$  و منه

$$|f(x)| = |h(x)g(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \text{ أي أن } f = o(g)$$

بنفس الطريقة نبرهن على الخاصية 2.

ملاحظة: إن الخاصيتين السابقتين تختصران في الكتابة التالية.

$$o(g) = g \cdot o(1) \text{ و } O(g) = g \cdot O(1)$$

### خواص:

$$f = O(g) \text{ و } h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g) \quad (1)$$

$$f = o(g) \text{ و } h = o(g) \Rightarrow f + h = o(g) \quad (2)$$

$$f = o(g) \text{ و } h = O(1) \Rightarrow fh = o(g) \quad (3)$$

$$f = o(g) \text{ و } h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g) \quad (4)$$

$$f = O(g) \text{ و } h = O(1) \Rightarrow fh = O(g) \quad (5)$$

$$h = O(g) \text{ و } f = o(g) \Rightarrow h = o(g) \quad (6)$$

$$. h = o(g) \text{ و } f = O(g) \Rightarrow h = o(g) \quad (7)$$

**ملاحظة:** إن الخواص السابقة تختصر في الكتابة التالية.

$$.O(g) + O(g) = O(g) \quad (1)$$

$$.o(g) + o(g) = o(g) \quad (2)$$

$$.o(g) O(1) = o(g) \quad (3)$$

$$.o(g) + O(g) = O(g) \quad (4)$$

$$.O(g).O(1) = O(g) \quad (5)$$

$$.O(o(g)) = o(g) \quad (6)$$

$$.o(O(g)) = o(g) \quad (7)$$

### **7.2.3 التوابع المتكافئة:**

#### **تعريف 11.3:**

ليكن  $f$  و  $g$  تابعين معرفين في جوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$ ، باستثناء محتمل لـ  $x_0$ .

نقول أن  $f$  يكافئ  $g$  لما  $x \rightarrow x_0$  و نكتب  $f \sim g$ ، إذا كان  $f - g = o(f)$  لما  $x \rightarrow x_0$ .

#### **نتائج:**

$$.f - g = o(f) \Leftrightarrow f - g = o(g) \quad (1)$$

(2) العلاقة  $\sim$  هي علاقة تكافؤ في مجموعة التوابع المعرفة على جوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$ ، باستثناء محتمل لـ  $x_0$ .

(3) إذا وجد جوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$  بحيث لا تنعدم  $f$  و  $g$  في  $V_{x_0} - \{x_0\}$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$   $f \sim g$

#### **نظرية 7.3:**

لتكن  $f$ ،  $g$ ،  $f_1$ ،  $g_1$  توابع معرفة في جوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$ ، باستثناء محتمل لـ  $x_0$  حيث  $f \sim f_1$  و  $g \sim g_1$  لما

$x \rightarrow x_0$ ، إذا وجدت النهاية:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  فإن النهاية  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$  تكون أيضا موجودة و يكون لدينا

$$. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

#### **البرهان:**

بما أن  $\frac{f(x)}{g(x)}$  تقبل نهاية لما  $x \rightarrow x_0$  فإنه يوجد جوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$  بحيث  $g$  لا تنعدم على  $V_{x_0} - \{x_0\}$  و كون  $g \sim g_1$  (أي أن  $|g(x)| \leq \varepsilon |g_1(x)|$ ) فإن  $g_1$  لا ينعدم أيضا و منه

$$\left\{ \begin{array}{l} f \sim f_1 \\ g \sim g_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1 \sim f \\ g_1 \sim g \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1 = f(1 + o(1)) \\ g_1 = g(1 + o(1)) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f_1}{g_1} = \frac{f(1+o(1))}{g(1+o(1))}$$

و بما أن  $\frac{1+o(1)}{1+o(1)}$  لما  $x \rightarrow x_0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

**ملاحظة:** يستعمل مفهوم التوابع المتكافئة حساب النهايات خاصة إذا تعلق الأمر بإزالة حالات عدم التعيين.

#### **أمثلة:**

$$(1) \text{ أحسب النهاية } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt[3]{x+1}-1}$$

لدينا لما  $x \rightarrow 0$  فإن  $\sqrt{4+x}-2 \sim \frac{1}{2}x$  و  $\sqrt[3]{x+1}-1 \sim \frac{1}{3}x$  و منه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x} = \frac{3}{2}$$

$$(2) \text{ أحسب النهاية } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{2+xe^{\frac{1}{x}}}$$

لدينا لما  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $\sqrt{x^2-2x}+x \sim 2x$  و  $2+xe^{\frac{1}{x}} \sim x$  و منه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{2+xe^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

### 3.3 التتابع المستمرة:

#### تعريف 12.3:

- ليكن  $f$  تابع معرف على جوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$  نقول أن  $f$  مستمرة عند  $x_0$  إذا، فقط إذا كان:  

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$(\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

- ليكن  $f$  تابع معرف على جوار  $V_{x_0}$  من اليمين للنقطة  $x_0$  نقول أن  $f$  مستمرة عند  $x_0$  من اليمين إذا فقط إذا تحقق:  

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$
- ليكن  $f$  تابع معرف على جوار  $V$  من اليسار للنقطة  $x_0$  نقول أن  $f$  مستمرة عند  $x_0$  من اليسار إذا فقط إذا تحقق:  

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

#### نتيجة 4.3:

يكون تابع  $f$  مستمر عند  $x_0$  إذا، فقط إذا كان مستمرا عند  $x_0$  من اليمين ومن اليسار.

#### أمثلة:

$$1. \text{ ليكن التابع } f \text{ المعرف على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$f \leftarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1) \text{ مستمر عند } 1 \text{ من اليمين.}$$

$$f \leftarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 \neq f(1) \text{ غير مستمر عند } 1 \text{ من اليسار.}$$

ومنه فإن  $f$  غير مستمر في النقطة  $x_0 = 1$ .

#### تعريف 13.3:

ليكن  $I$  مجال من  $\mathbb{R}$ .

- نقول أن التابع  $f$  مستمر على المجال  $I$  إذا فقط إذا كان مستمر عند كل نقطة من هذا المجال، نرمز لمجموعة التتابع المستمرة على مجال  $I$  بـ  $C(I)$ .
- نقول أن التابع  $f$  مستمر بانتظام على المجال  $I$ ، إذا فقط إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in I: |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

واضح من التعريف أن كل تابع مستمر بانتظام على المجال  $I$  فهو مستمر على هذا المجال (العكس غير صحيح دوماً)

### 1.3.3 التوابع المستمرة على مجال مغلق:

**نظرية 8.3:** كل تابع مستمر على مجال مغلق  $[a, b]$  يكون مستمر بانتظام على هذا المجال.

**البرهان:** نفرض أن  $f$  مستمر و غير مستمر بانتظام على  $[a, b]$ ، أي أن

$$\exists \varepsilon > 0; \forall \delta > 0: \exists x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| < \delta \text{ و } |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

نضع  $\delta = \frac{1}{n} > 0$  حيث  $n \in \mathbb{N}^*$  و منه

$$\exists \varepsilon > 0; \forall n \in \mathbb{N}^*; \exists x'_n, x''_n \in [a, b]: |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \text{ و } |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$$

إن المتتالية  $(x'_n)$  محدودة، حسب نظرية بولزانو-فاير شتراس إذن يمكن استخراج منها متتالية جزئية  $(x'_{n_k})$  متقاربة نحو  $\bar{x}$  من  $[a, b]$  و بما أن  $\forall k \in \mathbb{N}: |x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$  فإن المتتالية الجزئية  $(x''_{n_k})$  متقاربة بدورها نحو  $\bar{x}$  و كون

$$f \text{ مستمر عند } \bar{x} \text{ فإن } \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0 \text{ و هذا تناقض لأن}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}: |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon$$

**نظرية 9.3:** كل تابع مستمر على المجال المغلق  $[a, b]$  يكون محدود على هذا المجال.

**البرهان:** نفرض أن  $f$  مستمر و غير محدود على  $[a, b]$ ، أي أن  $\forall n \in \mathbb{N}; \exists x_n \in [a, b]: |f(x_n)| > n$

إن المتتالية  $(x_n)$  محدودة، يمكن استخراج منها متتالية جزئية  $(x_{n_k})$  متقاربة نحو  $\bar{x}$  من  $[a, b]$  و بما أن  $f$  مستمر عند  $\bar{x}$  فإن  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| = |f(\bar{x})|$  و هذا تناقض لأن  $\forall k \in \mathbb{N}: |f(x_{n_k})| > n_k \geq k$  أي أن  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$ .

**نظرية 10.3:** يدرك كل تابع مستمر على المجال المغلق  $[a, b]$ ، مرة على الأقل حديه الأعلى و الأدنى أي أنه يوجد

$$\text{على الأقل } x_1 \text{ و } x_2 \text{ من المجال } [a, b] \text{ حيث: } f(x_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \text{ و } f(x_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

**البرهان:** ليكن  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  نفرض أن  $\forall x \in [a, b]: f(x) \neq M$  أي أن

$$\forall x \in [a, b]: f(x) < M \text{ عندئذ يكون التابع } g \text{ حيث } g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \text{ مستمر و موجب تماماً على}$$

المجال  $[a, b]$  و بالتالي فهو محدود و منه  $\exists m > 0; \forall x \in [a, b]: g(x) \leq m$  أي أن

$$\forall x \in [a, b]: f(x) \leq M - \frac{1}{m} \text{ و هذا يناقض الفرض } M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

**نظرية 11.3:** ليكن  $f$  تابع مستمر على المجال  $[a, b]$ ، إذا كانت إشارتي  $f(a)$  و  $f(b)$  مختلفتين فإنه توجد على الأقل نقطة  $c$  من المجال  $[a, b]$  تحقق:  $f(c) = 0$ .

**البرهان:**

نفرض  $f(a) < 0$  و  $f(b) > 0$  و لتكن المجموعة  $E = \{x \in [a, b] / f(x) > 0\}$ ، إن  $E \neq \emptyset$  لأن  $b \in E$

$$\text{نضع } c = \inf E = 0 \text{ لنبرهن أن } f(c) = 0.$$

نفرض  $f(c) \neq 0$  بما أن  $f$  مستمر عند  $c$  فإنه يوجد على الأقل مجال من الشكل  $]c - \alpha; c + \alpha[$  حيث  $\alpha > 0$ ، يكون فيه  $f(x) < 0$  و  $f(x) > 0$  نفس الإشارة (أنظر القضية 1.3).

- إذا كان  $f(c) > 0$  فإن  $\forall x \in I: f(x) > 0$  بوضع  $x = c - \frac{\alpha}{2}$  فإن  $f(c - \frac{\alpha}{2}) > 0$  و منه  $c - \frac{\alpha}{2} \in E$  و بالتالي فإن  $c = \inf E \geq c - \frac{\alpha}{2}$  وهذا تناقض.

- إذا كان  $f(c) < 0$  فإن  $\forall x \in I: f(x) < 0$ .

لدينا  $\inf E = c \Rightarrow \exists x_0 \in E: c + \alpha > x_0 \geq c \Rightarrow x_0 \in I$  و منه  $f(x_0) < 0$

و هذا تناقض أيضا لأن  $f(x_0) > 0$  كون أن  $x_0 \in E$ .

إذن  $f(c) = 0$ .

### نظرية 12.3:

ليكن  $f$  تابع مستمر على المجال  $[a; b]$ ، من أجل كل عدد حقيقي  $\lambda$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  من المجال  $[a; b]$  يحقق:  $f(c) = \lambda$ .

البرهان:

(1) إذا كان  $f(a) = \lambda$  يكفي أخذ  $c = a$ ، أما إذا كان  $f(b) = \lambda$  يكفي أخذ  $c = b$ .

(2) إذا كان  $f(b) \neq \lambda$  و  $f(a) \neq \lambda$  نبين أن التابع  $g(x) = f(x) - \lambda$  يحقق شروط النظرية 9.3 على المجال  $[a; b]$ .

### قضية 2.3:

ليكن  $I$  مجال من  $\mathbb{R}$ ،  $f$  تابع حقيقي.

إذا كان التابع  $f$  مستمر على  $I$  فإن صورة المجال  $I$  بالتابع  $f$  هو مجال من  $\mathbb{R}$  أي أن المجموعة  $f(I)$  هي مجال من  $\mathbb{R}$ .

البرهان:

ليكن  $y_1; y_2$  من  $f(I)$  حيث  $y_1 \leq y_2$  إذن يوجد على الأقل عنصرين  $x_1; x_2$  من المجال  $I$  حيث

$y_1 = f(x_1)$  و  $y_2 = f(x_2)$ ، حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه من أجل كل عنصر  $y$  حيث  $y_1 \leq y \leq y_2$  يوجد

على الأقل عنصر  $x$  محصور بين  $x_1$  و  $x_2$  (أي  $x \in I$ ) حيث  $y = f(x)$  و منه  $y \in f(I)$ .

### 2.3.3 التمديد بالاستمرار:

### تعريف 14.3:

ليكن  $f$  تابع معرف على مجال  $I$ ، باستثناء النقطة  $x_0$  من  $I$ ، نفرض أن  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

إن التابع  $\tilde{f}$  المعرف بـ  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq x_0 \\ \ell & ; x = x_0 \end{cases}$  يتطابق مع  $f$  على  $I - \{x_0\}$  وهو مستمر عند  $x_0$ ، يسمى التابع  $\tilde{f}$  امتداد  $f$  بالاستمرار عند  $x_0$ .

مثال:

ليكن التابع  $f$  المعرف على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ ، بما أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$

فإنه يمكن تمديد  $f$  بالاستمرار عند 0 إلى التابع  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$

### 3.3.3 التوابع الرتيبة على مجال:

### نظرية 13.3:

ليكن  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  تابعاً رتيبياً، حيث  $-\infty < a < b < +\infty$  عندئذ فإن النهايتين  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  موجودتين (منتهيتين أو غير منتهيتين) و يكون:

$$-\infty \leq \inf_{x \in ]a, b[} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{x \in ]a, b[} f(x) \leq +\infty$$

إذا كان  $f$  متزايداً و

$$-\infty \leq \inf_{x \in ]a, b[} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{x \in ]a, b[} f(x) \leq +\infty$$

إذا كان  $f$  متناقصاً.

### البرهان:

نفرض  $f$  متزايداً و  $\sup_{x \in ]a, b[} f(x) = M < +\infty$  و لنبين أن  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = M$

لدينا  $\forall \varepsilon > 0; \exists \alpha \in ]a, b[: M - \varepsilon < f(\alpha) \leq M$  بوضع  $\delta = b - \alpha > 0$  و بما أن  $f$  متزايداً فإن

$$b - \delta < x < b \Rightarrow \alpha < x < b \Rightarrow f(\alpha) < f(x) \Rightarrow M - \varepsilon < f(\alpha) < f(x) \leq M < M + \varepsilon$$

إذن  $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0: -\delta < x - b < 0 \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$   $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = M$  أي أن  $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0: -\delta < x - b < 0 \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$

البرهان يكون بنفس الطريقة من أجل  $M = +\infty$  و كذلك نبرهن على أن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{x \in ]a, b[} f(x)$  في حالة  $f$  متناقصاً.

### نتائج:

(1) ليكن  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعاً رتيبياً، عندئذ فإن:

$$(أ) f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow b} f(x) \leq f(b)$$

$$(ب) f(b) \leq \lim_{x \rightarrow b} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq f(a)$$

(2) ليكن  $I$  مجالاً كفي من  $\mathbb{R}$  حده  $a$  و  $b$  ( $a < b$ ) و ليكن  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  تابعاً متزايداً عندئذ من أجل كل  $x_0$  حيث  $a < x_0 < b$  فإن:

$$(أ) -\infty < f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0) < +\infty$$

$$(ب) f(a) \leq f(a + 0) < +\infty$$

$$(ج) -\infty < f(b - 0) \leq f(b)$$

ملاحظة: نحصل على نتيجة مماثلة للنتيجة 2 في حالة  $f$  متناقص على المجال  $I$ .

### نظرية 14.3:

ليكن  $I$  مجال من  $\mathbb{R}$  و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  تابع رتيب عندئذ يكون  $f$  مستمر على  $I$  إذا، و فقط إذا كان  $f(I)$  مجالاً.

### البرهان:

الشرط اللازم: حسب القضية 2.3 إذا كان  $f$  مستمر فإن  $f(I)$  مجالاً.

الشرط الكافي: نفرض  $f$  متزايداً و  $f(I)$  مجالاً و نثبت أن  $f$  مستمر على  $I$ .

نفرض العكس و لتكن  $x_0$  نقطة تقطع لـ  $f$ ، بما أن  $f$  متزايد و استنادا الى النتيجة 2 فإن إحدى العلاقتين التاليتين على الأقل محققة:  $f(x_0) < f(x_0 + 0)$  ،  $f(x_0) < f(x_0 - 0)$ .

نفرض مثلاً أن  $f(x_0) < f(x_0 + 0)$  في هذه الحالة فإنه من أجل كل  $x$  من  $I$ :

$$]f(x_0), f(x_0 + 0)[ \cap f(I) = \emptyset \text{ أي } x \leq x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \text{ و } x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0 + 0)$$

ليكن  $x_1 \in I$  حيث  $x_1 > x_0$  عندئذ فإن  $f(x_0) \in f(I)$  و  $f(x_1) \in f(I)$  و منه  $[f(x_0), f(x_1)] \subset f(I)$  ( لأن

$f(I)$  مجال ) وبما أن  $f(x_1) > f(x_0 + 0)$  فإن  $[f(x_0), f(x_1)] \subset ]f(x_0), f(x_0 + 0)[$  أي أن

$$]f(x_0), f(x_0 + 0)[ \cap f(I) \neq \emptyset \text{ و هذا تناقض.}$$

### 4.3.3 التابع العكسي لتابع مستمر ورتيب تماماً:

### نظرية 15.3:

ليكن  $I$  مجال من  $\mathbb{R}$  و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  تابع

إذا كان  $f$  مستمر ورتيب تماماً على المجال  $I$  فإن  $f$  يكون تقابلاً من المجال  $I$  في المجال  $f(I)$  و بالتالي فهو يقبل تابعاً عكسياً نرمز له بـ  $f^{-1}$ ، يكون بدوره معرفاً و مستمراً و رتيباً تماماً على المجال  $f(I)$  و بنفس اتجاه تغير  $f$  ولدينا:

$$\forall x \in I; \forall y \in f(I): y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \dots (*)$$

ملاحظة: تستعمل الخاصية (\*) في إعطاء عبارة التابع  $f^{-1}$  إذا أمكن ذلك.

### البرهان:

- بما أن  $f$  رتيب تماماً على  $I$  فهو متباين و من تعريف المجموعة  $f(I)$  فهو غامر إذن  $f$  تقابل.

- بما أن  $f$  مستمر فإن  $f(I)$  مجال و لما كان  $f$  رتيب تماماً فإن  $f^{-1}$  كذلك و منه  $f^{-1}(f(I)) = I$  إذن  $f^{-1}(f(I))$  مجال و  $f^{-1}$  رتيب تماماً ينتج من النظرية 12.3 أن  $f^{-1}$  مستمر على  $f(I)$ .

**مثال 1:** ليكن التابع  $f$  المعرف على المجال  $I = [0; +\infty[$  بـ  $f(x) = x^2 + 3$ ، إن  $f$  مستمر ورتيب تماماً (متزايد تماماً) على المجال  $I = [0; +\infty[$  حيث  $f(I) = [3; +\infty[$  حسب النظرية (13.3) فإن  $f$  تقابل من المجال  $[0; +\infty[$  في المجال  $[3; +\infty[$  فهو يقبل تابع عكسي  $f^{-1}$  ولدينا:

$$\forall x \in [0; +\infty[; \forall y \in [3; +\infty[: y = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 = y - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y - 3} \\ \vee \\ x = -\sqrt{y - 3} < 0 \text{ (مرفوض)} \end{cases}$$

إذن  $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 3}$ ، بعد استبدال  $x$  بـ  $y$  فإن التعريف النهائي للتطبيق العكسي  $f^{-1}$  يكون كالآتي:

$$f^{-1}: [3; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[ \\ x \rightarrow \sqrt{x - 3}$$

### تطبيق\*:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{-x+1}{2x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ ليكن التابع } f \text{ المعرف على } \mathbb{R}$$

1. أثبت أن  $f$  مستمر ورتيب تماماً على  $\mathbb{R}$ .
2. استنتج أن  $f$  يقبل تابع عكسي  $f^{-1}$ ، عبر عن العبارة  $f^{-1}(x)$  بدلالة  $x$ .

### حل مختصر:

1. تؤول دراسة استمرار  $f$  على  $\mathbb{R}$  إلى دراسة استمراره عند 1

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x) = f(1) = 0$$

يمكن التحقق بسهولة منالنتائج التالية:  $f$  متناقص تماما على  $I = \mathbb{R}$ ;  $+\infty[$ ;  $-\frac{1}{2}$ ]

$$f^{-1}: ]-\frac{1}{2}; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} : f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x+1}{2x+1} & \text{si } -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$$

### 4.3 التوابع القابلة للاشتقاق:

### 1.4.3 العدد المشتق-الدالة المشتقة:

### تعريف 15.3:

- ليكن  $f$  تابع معرف على جوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$  نقول أن التابع  $f$  قابل للاشتقاق في النقطة  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت النسبة  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  تقبل نهاية محدودة عند  $x_0$  تسمى هذه النهاية بالعدد المشتق للتابع  $f$  عند  $x_0$  ونرمز له بـ  $f'(x_0)$  نستعمل أحيانا الرموز  $Df(x_0)$ ،  $\frac{df}{dx}(x_0)$ ،  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$  حيث  $y = f(x)$ .

### ملاحظات:

1. بوضع  $x - x_0 = h$  فإن النهاية السابقة تكتب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$
2. يكون التابع  $f$  قابلا للاشتقاق عند  $x_0$  إذا وفقط إذا وجد تابع  $\varepsilon$  معرف على جوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$  حيث

$$\forall x \in V_{x_0} : f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + \varepsilon(x))(x - x_0) \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

- إذا كانت النسبة  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  تقبل نهاية محدودة عند  $x_0$  من اليمين (من اليسار، على الترتيب) نقول أن التابع  $f$  يقبل الاشتقاق عند  $x_0$  من اليمين (من اليسار، على الترتيب)، ونرمز لها بالرمز  $f'(x_0 + 0)$  ( $f'(x_0 - 0)$ ، على الترتيب)

### نتيجة 5.3:

يكون التابع  $f$  قابل للاشتقاق عند  $x_0$  إذا وفقط إذا كان  $f'(x_0 - 0)$  و  $f'(x_0 + 0)$  موجودتين وكان

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$$

### مثال:

ليكن التابع  $f$  المعرف على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = |x^2 - 1|$  لندرس قابلية اشتقاق  $f$  عند النقطة  $x_0 = 1$  لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$

التابع  $f$  يقبل الاشتقاق من اليمين وكذلك من اليسار عند 1 لكنه لا يقبل الاشتقاق عند 1 لأن:

$$f'(1 + 0) \neq f'(1 - 0)$$

### التفسير الهندسي:

-إذا كان التابع  $f$  قابل للإشتقاق عند  $x_0$  فإن تمثيله البياني  $(C_f)$  يقبل مماسًا (T) في النقطة  $A(x_0; f(x_0))$  معامل توجيهه  $f'(x_0)$  وتكون للمستقيم (T) معادلة من الشكل :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .  
قابلية الاشتقاق من اليمين واليسار تفسر بوجود أنصاف مماسات.

-ليكن  $I$  مجال من  $\mathbb{R}$  إذا قبل التابع  $f$  للإشتقاق عند كل نقطة من المجال  $I$  نقول أن  $f$  يقبل الإشتقاق على المجال  $I$ .  
يسمى التابع الذي يرفق بكل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $I$  العدد المشتق  $f'(x)$  بـ التابع المشتق ونرمز له بـ  $f'$ .

### نظرية 16.3:

إذا كان التابع  $f$  قابلاً للإشتقاق عند  $x_0$  فإنه يكون مستمراً عند  $x_0$ .

البرهان: ليكن  $f$  قابل للإشتقاق عند  $x_0$  عندئذ يوجد جوار  $V_{x_0}$  حيث

$$\forall x \in V_{x_0} : f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + \varepsilon(x))(x - x_0) \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

و منه  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f'(x_0) + \varepsilon(x))(x - x_0) = 0$  أي أن  $f$  مستمر عند  $x_0$ .

### 2.4.3 المشتقات ذات الرتب العليا:

ليكن  $f$  تابع قابل للإشتقاق على المجال  $I$  إذا قبل  $f'$  بدوره الإشتقاق على المجال  $I$  فإننا نرمز لمشتقه بـ  $f''$  ويسمى المشتق الثاني وبنفس الطريقة نعرف المشتقات المتتالية للتابع  $f$  كما يلي:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' \text{ و } f^{(0)}(x) = f(x)$$

حيث نرمز للمشتق من الرتبة  $n$  للتابع  $f$  بـ  $f^{(n)}$  كما تستعمل أيضا الرموز  $\frac{d^n y}{dx^n}$ ,  $D_n y$ ,  $y^{(n)}$ , .....

مثال: (أثبت بالتراجع أن)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left[ \frac{1}{x} \right]^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad 2. \quad \cos^{(n)} x = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} n \right) \quad 1.$$

### تعريف 16.3:

- نقول عن تابع  $f$  معرف على المجال  $I$  أنه من الصنف  $C^n$  إذا، فقط إذا كان قابلاً للإشتقاق إلى المرتبة  $n$  وكان المشتق  $f^{(n)}$  مستمراً على  $I$  نرمز لمجموعة التوابع من الصنف  $C^n$  على المجال  $I$  بـ  $C^n(I)$ .
- لدينا تعريفاً:  $C^0(I) = C(I)$ .
- $C^\infty(I)$  يرمز لـ مجموعة التوابع القابلة للإشتقاق إلى ما لانهاية على المجال.

### 3.4.3 عمليات على التوابع القابلة للإشتقاق:

### نظرية 17.3:

- ليكن  $f$  و  $g$  توابع قابلة للإشتقاق على مجال  $I$  عندئذ فإن التوابع  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $\alpha f$ ,  $\frac{f}{g}$  (بـ  $g \neq 0$ ) تقبل الإشتقاق على  $I$  ولدينا:

$$(f + g)' = f' + g' \quad , \quad (\alpha f)' = \alpha f'$$

$$\left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad , \quad (fg)' = f'g + fg'$$

البرهان: لنبرهن على الحالة الأخيرة.

ليكن  $x_0$  من  $I$  لدينا:

$$\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)} = \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)}}{g(x)g(x_0)}$$

و لما  $x \rightarrow x_0$  فإن  $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} \rightarrow f'(x_0)$  و  $\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)} \rightarrow g'(x_0)$  و  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  و  $g(x) \rightarrow g(x_0)$

$$\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}{x-x_0} \rightarrow \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

**نظرية 18.3:** المشتقة النونية لـ جداء تابعين (دستور ليبنز)

$$\forall n \in \mathbb{N}: (fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^n C_n^p f^{(n-p)} g^{(p)}$$

**البرهان:** نستعمل البرهان بالتراجع و بملاحظة أن  $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$   $\forall n, p \in \mathbb{N} (1 \leq p \leq n-1)$ .

**نظرية 19.3:**

ليكن  $f$  و  $g$  تابع حيث  $f$  قابل للإشتقاق على المجال  $I$  و  $g$  قابل للإشتقاق على المجال  $f(I)$  عندئذ فإن التابع  $g \circ f$  يكون قابلاً للإشتقاق على المجال  $I$  و  $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$ .

**البرهان:** ليكن  $x_0$  من  $I$  بما أن  $f$  يقبل الاشتقاق عند  $x_0$  و  $g$  يقبل الاشتقاق عند  $y_0 = f(x_0)$  فإن:

$$f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + \varepsilon_1(x))(x - x_0) \text{ مع } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\text{أو } g(y) - g(y_0) = (g'(y_0) + \varepsilon_2(y))(y - y_0) \text{ مع } \lim_{y \rightarrow y_0} \varepsilon_2(y) = 0$$

من أجل  $y = f(x)$  فإن  $y \rightarrow y_0$  عندما  $x \rightarrow x_0$  (لأن  $f$  مستمر عند  $x_0$ ) و منه

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = (g'(f(x_0)) + \varepsilon_2(y))(f'(x_0) + \varepsilon_1(x))(x - x_0)$$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = (g'(f(x_0)) + \varepsilon_2(y))(f'(x_0) + \varepsilon_1(x))$$

لما  $x \rightarrow x_0$  فإن  $y \rightarrow y_0$  و منه  $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0$  و  $\varepsilon_2(y) \rightarrow 0$  إذن  $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0)$

**مثال:**

ليكن التابع  $h$  المعرف على  $\mathbb{R}$  بـ  $h(x) = \cos(3\sqrt{x} + x^2)$

التابع  $h$  هو مركب التابعين:  $f(x) = 3\sqrt{x} + x^2$  و  $g(x) = \cos x$  بهذا الترتيب حيث  $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 2x$  و  $g'(x) = -\sin x$  و منه فإن:

$$h'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x) = -\sin(3\sqrt{x} + x^2) \left( \frac{3}{2\sqrt{x}} + 2x \right)$$

$$h'(x) = -\left( \frac{3}{2\sqrt{x}} + 2x \right) \sin(\sqrt{x} + x^2)$$

**نظرية 20.3:**

إذا كان  $f$  تابع مستمر و رتيب تماما على المجال  $I$  و يقبل الاشتقاق عند النقطة  $x_0$  من  $I$  حيث  $f'(x_0) \neq 0$  فإن التابع العكسي  $f^{-1}$  يقبل الإشتقاق عند النقطة  $y_0 = f(x_0)$  من  $f(I)$  ولدينا :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}$$

### البرهان:

نفرض أن  $f$  يقبل الاشتقاق عند النقطة  $x_0$  حيث  $f'(x_0) \neq 0$  ولتكن النقطة  $y_0$  من  $f(I)$  حيث  $y_0 = f(x_0)$ ، من أجل كل  $y$  من  $f(I)$  يوجد عدد حقيقي وحيد  $x$  من  $I$  حيث  $y = f(x)$  و بما أن  $f$  مستمر و رتيب على  $I$  فإن  $f^{-1}$  مستمر و رتيب على  $f(I)$  (استنادا إلى النظرية 13.3) ينتج من ذلك أن  $x \neq x_0 \Rightarrow y \neq y_0$  و  $\forall y \in f(I)$  لما  $y \rightarrow y_0$  فإن  $x \rightarrow x_0$ .

نضع  $g = f^{-1}$  عندئذ فإن  $x_0 = g(y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$  و  $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$  و منه

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x - x_0}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{y - y_0}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

### مثال 1:

ليكن التابع  $f$  المعروف على المجال  $I = [0, +\infty[$  بـ  $f(x) = x^n$  (حيث  $n \geq 2$ )  
إن التابع  $f$  مستمر و متزايد تماما على المجال  $I$  و منه فإن  $f$  يقبل تابع عكسي  $f^{-1}$  معرف و مستمر و متزايد تماما على المجال  $I = [0, +\infty[$  يرمز له بالرمز  $\sqrt[n]{\cdot}$  (أو  $(\cdot)^{\frac{1}{n}}$ ) و يسمى تابع الجذر النوني و بما أن:

$$\forall x \in ]0, +\infty[: (x^n)' = nx^{n-1} \neq 0$$

فإن التابع  $f^{-1}$  يقبل الاشتقاق عند كل عدد  $y$  من المجال  $]0, +\infty[$  حيث  $y = x^n$  و لدينا:

$$(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n \left( (y)^{\frac{1}{n}} \right)^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

إذن التابع  $\sqrt[n]{x} \rightarrow x$  معرف و مستمر و متزايد تماما على المجال  $]0, +\infty[$  و يقبل الاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$

$$\text{و لدينا: } \forall x \in ]0, +\infty[: (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

### مثال 2:

ليكن التابع المعروف على المجال  $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  بـ  $h(x) = \tan x$

إن التابع  $h$  مستمر و متزايد تماما على المجال  $I$  حيث  $h(I) = \mathbb{R}$  و منه فإن التابع  $h$  يقبل تابع عكسي  $h^{-1}$  نرمز له بـ "arctan" وهو معرف و مستمر و متزايد تماما على  $\mathbb{R}$  ولدينا:

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[: (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \neq 0$$

إذن التابع  $h^{-1}$  يقبل الإشتقاق عند كل قيمة  $y$  من  $\mathbb{R}$  حيث  $y = \tan x$  و لدينا:

$$\forall y \in \mathbb{R} : (\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

باستبدال  $x$  بـ  $y$  نحصل على النتيجة التالية:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

### نظرية 21.3:

إذا كان لـ  $f$  قيمة حدية عند النقطة  $x_0$  وكان  $f$  يقبل الاشتقاق عند  $x_0$  فإن  $f'(x_0) = 0$ .

**البرهان:**

إن وجود  $f'(x_0)$  يستلزم وجود  $f'(x_0 + 0)$  و  $f'(x_0 - 0)$ .

و بفرض  $f(x_0)$  قيمة عظمى أي أنه يوجد جوار  $V_{x_0}$  للنقطة  $x_0$  حيث يكون  $f(x) \leq f(x_0)$   $\forall x \in V_{x_0}$  و منه

من أجل  $x > x_0$  فإن  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$  من أجل  $x < x_0$  فإن  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$  و منه

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \leq 0$$

إذن  $f'(x_0) = 0$ .

#### 4.4.3 نظرية التزايديات المنتهية - التزايديات المنتهية المعممة:

**نظرية 22.3:** (رول)

إذا كان  $f$  تابع مستمر على المجال  $[a; b]$  وقابل للاشتقاق على المجال  $]a; b[$  وكان  $f(a) = f(b)$  فإنه توجد على الأقل نقطة  $c$  من المجال  $]a; b[$  تحقق  $f'(c) = 0$ .

**التفسير الهندسي:**

توجد على الأقل نقطة من التمثيل البياني للتابع  $f$  فاصلتها  $c$  حيث  $a < c < b$  يكون المماس فيها للبيان موازيا لمحور الفواصل.

**البرهان:**

- إذا كان  $f$  ثابت على المجال  $[a; b]$  فإن  $f'(x) = 0$   $\forall x \in ]a; b[$ .

- إذا كان  $f$  غير ثابت على المجال  $[a; b]$  و بما أنه مستمر في هذا المجال فهو يقبل على الأقل قيمة حدية تختلف عن القيمتين  $f(a)$  و  $f(b)$  و لتكن هذه القيمة  $f(c)$  حيث  $a < c < b$  و كون  $f$  قابل للاشتقاق عند  $c$  ( لأنه قابل للاشتقاق على المجال  $]a; b[$  ) فإن  $f'(c) = 0$ .

**نظرية 23.3:** (لاغرانج)

إذا كان  $f$  تابع مستمر على المجال  $[a; b]$  وقابل للاشتقاق على المجال  $]a; b[$  فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  من المجال  $]a; b[$  يحقق:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \text{أو تكتب: } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

**البرهان:**

يكفي التحقق من أن التابع  $g$  المعرف على المجال  $[a; b]$  بـ  $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ ، يحقق شروط النظرية 19.3.

إذن يوجد على الأقل عدد  $c$  من المجال  $]a; b[$  يحقق  $g'(c) = 0$  و منه نحصل على العلاقة  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

**ملاحظة:**

تستعمل هذه النظرية في الحسابات التقريبية وفي إثبات الكثير من المتباينات.

**مثال:**

باستعمال نظرية التزايدات المنتهية أثبت أن  $\forall x \geq 0: \ln(x+1) \leq x$

بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على المجال  $[0; x]$  حيث  $x \geq 0$  نجد:

$$\forall x \geq 0 : \ln(x+1) - \ln 1 = f'(c)(x-0) ; f(x) = \ln(x+1)$$

$$\ln(x+1) = f'(c)x = \frac{1}{1+c} \cdot x ; 0 < c < x$$

$$c > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+c} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+c}x \leq x \text{ لدينا}$$

$$\forall x \geq 0 : \ln(x+1) \leq x \text{ ومنه}$$

**نظرية 24.3:** (كوشي)

إذا كان  $f$  و  $g$  تابعين مستمران على المجال  $[a; b]$  وقابلين للإشتقاق على المجال  $]a; b[$  وكان  $g'$  لا ينعدم على المجال  $]a; b[$  فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  من المجال  $]a; b[$  يحقق  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**البرهان:**

لدينا  $(\forall x \in ]a; b[: g'(x) \neq 0) \Rightarrow (g(b) \neq g(a))$  و منه يكفي التحقق من أن التابع  $\varphi$  المعرف على المجال  $]a; b[$   $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$  يحقق شروط النظرية 19.3.

إذن يوجد على الأقل عدد  $c$  من المجال  $]a; b[$  يحقق  $\varphi'(c) = 0$  و منه نحصل على العلاقة  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**نظرية 25.3:** (قاعدة لوبيتال)

إذا كان  $f$  و  $g$  تابعين مستمران على جوار  $V_a$  للنقطة  $a$  وقابلين للإشتقاق على  $V - \{a\}$  عندئذ إذا قبلت النسبة  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  نهاية عند  $a$  فإن النسبة  $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$  تقبل نفس النهاية عند  $a$  ، بمعنى آخر:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$$

وبالخصوص إذا كان  $f(a) = g(a) = 0$  فإن النتيجة السابقة نكتب :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

**البرهان:**

من أجل  $x > a$  نطبق النظرية 22.3 على المجال  $[a, x]$  نحصل على:

$$c \in ]a, x[ \text{ حيث } \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

عندما  $x \rightarrow a$  فإن  $c \rightarrow a$  ومنه  $\frac{f'(c)}{g'(c)} \rightarrow \ell$  وبالتالي فإن  $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \rightarrow \ell$

من أجل  $x < a$  نطبق النظرية 22.3 على المجال  $]x, a]$  نحصل على:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \rightarrow \ell \text{ و } \frac{f'(c)}{g'(c)} \rightarrow \ell \text{ ومنه } c \rightarrow a \text{ فإن } x \rightarrow a \text{ فإن } \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \rightarrow \ell$$

إذن عندما  $x \rightarrow a$  فإن  $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \rightarrow \ell$

### ملاحظات:

1. تبقى النتيجة السابقة صحيحة في حالة  $f$  و  $g$  غير معرفين عند  $a$  لكن يقبلان نهايتين محدودتين
2. يمكن تطبيق النتيجة 6.3 عدة مرات متتالية.
3. يمكن تطبيق النتيجة 6.3 في الحالات التالية:
  - أ.  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
  - ب.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$
  - ج.  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

### أمثلة:

1. حساب  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$  (حالة عدم تعيين من الشكل  $\frac{0}{0}$ ).
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{4}$$
2. حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$  (حالة عدم تعيين من الشكل  $\frac{0}{0}$ ).
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$
3. حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x^3 - x + 1}$  (حالة عدم تعيين من الشكل  $\frac{\infty}{\infty}$ ).
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x^3 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \frac{e^x + 1}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$
4. حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x+3} \ln \frac{x-1}{x+2}$  (حالة عدم تعيين من الشكل  $\infty \cdot 0$ ).
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x+3} \ln \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+2}}{\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+2}}{\frac{1}{x}} = \left( \frac{0}{0} \text{ تعح} \right)$$

و منه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \ln \frac{x-1}{x+2} \right)'}{\left( \frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{(x+2)(x-1)}}{-\frac{1}{x^2}} = -3$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x+3} \ln \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+2}}{\frac{1}{x}} = 2 \times (-3) = -6$$

## المحور الرابع: التوابع الأولية (fonctions élémentaires)

### 1.4 التوابع الدائرية العكسية: (fonctions circulaires réciproques)

#### 1.1.4 التابع: « arcsin »

**تعريف 1.4:** ليكن التابع  $f$  المعرف على المجال  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ، بما أن  $f(x) = \sin x$  مستمر و متزايد تمامًا على المجال  $I$  فهو يقبل تابع عكسي  $f^{-1}$  معرف و مستمر و متزايد تمامًا على المجال  $f(I) = [-1; 1]$  يرمز للتابع  $f^{-1}$  بالرمز  $\arcsin$ .

$$\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[; \forall y \in [-1; 1] : y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

المشتقة: باستعمال نظرية مشتق التابع العكسي لدينا:

$$\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ : (\sin x)' = \cos x \neq 0$$

و منه فإن التابع  $f^{-1} = \arcsin$  يقبل الاشتقاق عند كل عدد  $y$  من المجال  $]-1; 1[$  حيث  $y = \sin x$  ولدينا:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

إذن

$$\forall x \in ]-1; 1[ : (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

#### 2.1.4 التابع: « arccos »

**تعريف 2.4:** ليكن التابع  $g$  المعرف على المجال  $I = [0; \pi]$ ، بما أن  $g(x) = \cos x$  مستمر و متناقص تمامًا على المجال  $I$  فهو يقبل تابع عكسي  $g^{-1}$  معرف و مستمر و متناقص تمامًا على المجال  $g(I) = [-1; 1]$ ، يرمز للتابع  $g^{-1}$  بالرمز  $\arccos$ .

$$\forall x \in [0; \pi]; \forall y \in [-1; 1] : y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$$

المشتقة: بنفس الطريقة السابقة يمكن البرهان على أن:

$$\forall x \in ]-1; 1[ : (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

#### 3.1.4 التابع: « arctan »

**تعريف 3.4:** ليكن التابع  $h$  المعرف على المجال  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ، بما أن  $h(x) = \tan x$  مستمر و متزايد تمامًا على المجال  $I$  فهو يقبل تابع عكسي  $h^{-1}$  معرف و مستمر و متزايد تمامًا على المجال  $h(I) = \mathbb{R}$  يرمز للتابع  $h^{-1}$  بالرمز  $\arctan$ .

$$\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[; \forall y \in \mathbb{R} : y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$$

المشتقة: يبرهن على أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

#### 4.1.4 التابع: « arccotan »

**تعريف 4.4:** ليكن التابع  $k$  المعرف على المجال  $I = [0; \pi]$ ، بما أن  $k(x) = \cotan x$  مستمر و متناقص تمامًا على المجال  $I$  فهو يقبل تابع عكسي  $k^{-1}$  معرف و مستمر و متناقص تمامًا على المجال  $k(I) = \mathbb{R}$  يرمز للتابع  $k^{-1}$  بالرمز  $\arccotan$ .

لدينا:  $\forall x \in ]0; \pi[; \forall y \in \mathbb{R} : y = \cotan x \Leftrightarrow x = \operatorname{arccotan} y$

المشتقة: يبرهن على أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\operatorname{arccotan} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

#### 5.1.4 خواص:

$$1. \forall x \in [-1; 1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$2. \forall x \in [-1; 1] : \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$3. \forall x \in [-1; 1] : \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$4. \forall x \in \mathbb{R} : \arctan x + \operatorname{arccotan} x = \frac{\pi}{2}$$

$$5. \forall x > 0 : \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$6. \forall x < 0 : \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

البرهان:

$$(1) \text{ نضع } \forall x \in [-1; 1] : f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

$$\forall x \in ]-1; 1[ : f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

إذن التابع  $f$  ثابت على المجال  $[-1; 1]$  و منه  $\forall x \in [-1; 1] : f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$

(2) لدينا  $\forall x \in [-1; 1] : \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  و منه  $\cos(\arcsin x) \geq 0$  و بالتالي فإن:

$$\forall x \in [-1; 1] : \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$(6) \text{ نضع } \forall x < 0 : f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

$$\forall x < 0 : f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = 0$$

إذن التابع  $f$  ثابت على المجال  $]-\infty; 0[$  و منه  $\forall x < 0 : f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

**ملاحظة:** إن خواص التوابع العكسية للتوابع الدائرية تستنتج من خواص التوابع الدائرية، على سبيل المثال فإن الخاصية

1 تستنتج من الخاصية:  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$  و هو ما سنوضحه لاحقاً.

لدينا  $\alpha \in [0; \pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  ، بوضع  $\cos \alpha = x$  فإن  $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow \alpha \in [0; \pi]$  و منه

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin x \dots (*)$$

و لدينا من جهة أخرى  $\cos \alpha = x \Leftrightarrow \alpha = \arccos x$  بالتعويض في (\*) نحصل على الخاصية 1.

#### 2.4 التوابع الزائدية وتوابعها العكسية (fonctions hyperboliques et leurs inverse)

##### 1.2.4 التوابع الزائدية: (fonctions hyperboliques)

• التابع "cosinus hyperboliques" يرمز له بـ ch معرف بـ  $\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- التابع "sinus hyperboliques" يرمز له بـ sh معرف بـ  $\forall x \in \mathbb{R}: \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- التابع "tangente hyperboliques" يرمز له بـ th معرف بـ  $\forall x \in \mathbb{R}: \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$
- التابع "cotangente hyperboliques" يرمز له بـ coth معرف بـ  $\forall x \in \mathbb{R}^*: \text{coth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$

**2.2.4 خواص:** من أجل كل عددين حقيقيين  $x, y$  لدينا:

1.  $\text{sh}(-x) = -\text{sh } x$  ،  $\text{ch}(-x) = \text{ch } x$
2.  $1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$  ،  $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
3.  $\text{ch}(x + y) = \text{ch } x \text{ch } y + \text{sh } x \text{sh } y$
4.  $\text{sh}(x + y) = \text{ch } x \text{sh } y + \text{sh } x \text{ch } y$
5.  $\text{th}(x + y) = \frac{\text{th } x + \text{th } y}{1 + \text{th } x \text{th } y}$
6.  $(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$  ،  $(\text{sh } x)' = \text{ch } x$  ،  $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$

### 3.2.4 التوابع الزائدية العكسية: (fonctions hyperboliques réciproques)

- ليكن التابع  $f$  المعرف على المجال  $I = [0; +\infty[$  بـ  $f(x) = \text{ch } x$  ، بما أن  $f$  مستمر ومتزايد تمامًا على المجال  $I$  فهو يقبل تابع عكسي  $f^{-1}$  مستمر ومتزايد تمامًا على المجال  $f(I) = [1; +\infty[$  نرمز للتابع  $f^{-1}$  بالرمز "arg ch".

لدينا:  $\forall x \geq 0; \forall y \geq 1: y = \text{ch } x \Leftrightarrow x = \arg \text{ch } y$  ومنه

$$y = \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \left( y + \sqrt{y^2 - 1} \right) \\ x = \ln \left( y - \sqrt{y^2 - 1} \right) \end{cases}$$

ومنه  $x = \ln \left( y + \sqrt{y^2 - 1} \right)$  (لأن  $\ln \left( y - \sqrt{y^2 - 1} \right) \leq 0$ )

إذن  $\forall x \geq 1: \arg \text{ch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

**المشتقة:**  $\forall x \in ]1; +\infty[ : (\arg \text{ch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- ليكن التابع  $g$  المعرف على المجال  $I = \mathbb{R}$  بـ  $g(x) = \text{sh } x$  ، بما أن  $g$  مستمر ومتزايد تمامًا على المجال  $I = \mathbb{R}$  فهو يقبل تابع عكسي  $g^{-1}$  مستمر ومتزايد تمامًا على المجال  $g(I) = \mathbb{R}$  ، نرمز للتابع  $g^{-1}$  بالرمز "arg sh" حيث:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \arg \text{sh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

**المشتقة:**  $\forall x \in \mathbb{R} : (\arg \text{sh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

- ليكن التابع  $h$  المعرف على المجال  $I = \mathbb{R}$  بـ  $h(x) = \text{th } x$  ، بما أن  $h$  مستمر ومتزايد تمامًا على المجال  $I$  فهو يقبل تابع عكسي  $h^{-1}$  مستمر ومتزايد تمامًا على المجال  $h(I) = ]-1; 1[$  ، نرمز للتابع  $h^{-1}$  بالرمز "arg th" حيث:

$$\forall x \in ]-1; 1[ : \arg \text{th } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

**المشتقة:**  $\forall x \in ]-1; 1[ : (\arg \text{th } x)' = \frac{1}{1-x^2}$

# جزء التمارين

---

## تمارين حول المحور الأول (الأعداد الحقيقية)

### تمرين 01:

أثبت مايلي:

$$(1) \forall x; y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x + y|$$

$$(2) \forall x; y \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : xy \leq \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}y^2 \text{ (تسمى هذه المترجحة بمتراجحة كوشي مع } \varepsilon).$$

$$(3) (\forall \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon) \Rightarrow (x = 0)$$

$$(4) \forall x; y \in \mathbb{R} : |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$$

$$(5) (|x + y| = |x| + |y|) \Leftrightarrow (xy \geq 0)$$

$$*\6) \forall x_1; x_2 \dots; x_n; y_1; y_2; \dots; y_n \in \mathbb{R} : (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2) (\sum_{i=1}^n y_i^2)$$

(تسمى هذه المترجحة بمتراجحة كوشي شوارتز).

### تمرين 02:

1/ اثبت ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n \in \mathbb{N}^* : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ /أ}$$

$$\forall x; y \in \mathbb{R} : (x < y) \Rightarrow (E(x) \leq E(y)) \text{ ب)}$$

$$\forall x; y \in \mathbb{R} : E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1 \text{ /ج*}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq E(x) + E(-x) \leq 0 \text{ /د}$$

$$\text{هـ/ } \text{Min}(x; y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} ; \text{Max}(x; y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$$

$$\text{و-} \forall n \in \mathbb{N}^* ; \forall x \in \mathbb{R} : E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

2/ حدد إن أمكن  $Min, Max, inf, Sup$  لكل مجموعة من المجموعات التالية:

$$\text{أ/ } A = \left\{ \frac{2n+1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ /ج* } C = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} ; n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$\text{ب/ } B = \left\{ \frac{1}{x^2+1} ; x \in \mathbb{R} \right\} \text{ /د* } D = \left\{ -2 < x + \frac{1}{2x} < 2 ; x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

### تمرين 03:

(1) أثبت أن:

أ) إذا كان العدد الطبيعي  $n$  ليس مربعًا تامًا فإن العدد  $\sqrt{n}$  غير ناطق.

ب) إذا كان  $x \notin \mathbb{Q}$  و  $r \in \mathbb{Q}$  فإن  $r + x \notin \mathbb{Q}$ .

ج) إذا كان  $x \notin \mathbb{Q}$  و  $r \in \mathbb{Q}^*$  فإن  $rx \notin \mathbb{Q}$ .

د) هل العدد  $\sqrt{15} + \sqrt{12}$  ناطق (علل).

\*2) لتكن المجموعة  $A$  المعرفة كمايلي:  $A = \{1 < x < \sqrt{8} ; x \in \mathbb{Q}\}$

أثبت أن  $A$  تقبل حدا أدنى ولا تقبل حدا أعلى في  $\mathbb{Q}$ .

#### تمرين 04:

(1) لتكن  $E$  و  $F$  مجموعتين غير خاليتين و محدودتين في  $\mathbb{R}$  ، أثبت أن :

$$(أ) (E \subseteq F) \Rightarrow (InfF \leq InfE \leq SupE \leq SupF)$$

$$(ب) Sup(E \cup F) = Max\{SupE, SupF\}$$

$$*ج) Inf(E \cup F) = Min\{InfE, InfF\}$$

(2) نضع  $-F = \{-x; x \in F\}$  و  $E - F = \{x - y; x \in E \text{ و } y \in F\}$

أثبت أن:

$$(أ) Sup(E - F) = SupE - InfF$$

$$(ب) Inf(E - F) = InfE - SupF$$

$$*ج) Sup(-F) = -InfF$$

$$*د) Inf(-F) = -SupF$$

(3) نفرض  $E \subset \mathbb{R}_+^*$  ، نضع  $\frac{1}{E} = \{\frac{1}{x}; x \in E\}$  ، أثبت أن :

$$(أ) Inf \frac{1}{E} = \frac{1}{SupE}$$

$$(ب) * إذا كان  $InfE \neq 0$  فإن  $Sup \frac{1}{E} = \frac{1}{InfE}$$$

#### تمرين 05\*:

أثبت أن:

$$(1) \forall x; y; z \in \mathbb{R}_+^* (: x + y + z = 1) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9\right)$$

$$(2) \forall x; y \in \mathbb{R}: \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

(3) المعادلة  $x^3 - x + 1 = 0$  لا تقبل حولا في  $\mathbb{Q}$ .

(4) العدد  $\frac{\ln 5}{\ln 6}$  غير ناطق.

$$(5) \forall x; y \in \mathbb{R}: E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(2x) + E(2y)$$

$$(6) \forall n \in \mathbb{N}: E(\sqrt{n} + \sqrt{n + 1}) = E(\sqrt{4n + 2})$$

## حلول تمرين المحور الأول

### تمرين 01:

أثبت مايلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x| = |x + y - y| \leq |x - y| + |-y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x + y| \quad (1)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}: |y| = |y + x - x| \leq |y - x| + |-x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x + y|$$

$$\forall x; y \in \mathbb{R}: -|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y| \quad \text{ومنه}$$

$$\forall x; y \in \mathbb{R}: ||x| - |y|| \leq |x + y| \quad \text{أو}$$

$$\forall a; b \in \mathbb{R}: (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (2)$$

من أجل  $\varepsilon > 0$  بوضع  $a = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon^2}}$  و  $b = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} y$  نحصل على المتباينة:

$$\forall x; y \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0: xy \leq \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} y^2$$

(3) نستعمل البرهان بالعكس النقيض

$$\text{يكفي إثبات أن: } (\exists \varepsilon > 0: |x| \geq \varepsilon) \Rightarrow (x \neq 0)$$

إن القضية  $(\exists \varepsilon > 0: |x| \geq \varepsilon)$  صحيحة، يكفينا اختيار  $\varepsilon = |x|$ .

$$(4) \text{ لدينا } |a - b| \leq |a| + |b| \text{ و } |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\text{ومنه } |a + b| + |a - b| \leq 2|a| + 2|b|$$

بوضع  $a = \frac{x+y}{2}$  و  $b = \frac{x-y}{2}$  نحصل على المتباينة المطلوبة.

$$(5) \text{ لدينا } (|x + y| = |x| + |y|) \Leftrightarrow (|x + y|^2 = (|x| + |y|)^2) \Leftrightarrow (xy \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2|xy|)$$

$$\Leftrightarrow xy = |xy|$$

$$\Leftrightarrow xy \geq 0$$

### تمرين 02:

$$(أ) \text{ بوضع } x = \varepsilon \text{ و } y = 1 \text{ في مسلمة أرخميدس } (\forall x \in \mathbb{R}_+^*; \forall y \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N}^*: y < nx)$$

نحصل على  $\forall \varepsilon > 0; \exists n \in \mathbb{N}^*: 0 < 1 < \varepsilon n$  و منه المتباينة المطلوبة.

(ب) لدينا  $(E(x) \leq x < y) \Rightarrow (x < y) \Rightarrow (E(x) \leq x < y)$  و بما أن  $E(y)$  هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي  $y$  فإن  $E(x) \leq E(y)$ .

(ج) بوضع  $y = -x$  في المتباينة (ب) نحصل على:

$$\forall x \in \mathbb{R}: E(x) + E(-x) \leq E(0) \leq E(x) + E(-x) + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq E(x) + E(-x) \leq 0 \quad \text{أو} \quad \forall x \in \mathbb{R}: 0 \leq -E(x) - E(-x) \leq 1$$

$$\begin{cases} x + y = \text{Max}(x; y) + \text{Min}(x; y) \\ |x - y| = \text{Max}(x; y) - \text{Min}(x; y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Max}(x; y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \\ \text{Min}(x; y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \end{cases} \text{ هـ/ لدينا}$$

2/ حدد إن أمكن  $Min, Max, inf, Sup$  لكل مجموعة من المجموعات التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: 3 \geq 2 + \frac{1}{n} > 2 \text{ ومنه } \forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \text{ أ/}$$

بما أن 3 حد من الأعلى للمجموعة  $A$  و  $3 \in A$  فإن  $3 \in \text{Max}A = \text{Sup}A$

لدينا 2 حد من الأسفل للمجموعة  $A$  و  $2 \notin A$ ، لنبرهن أن  $2 \in \text{inf}A$

حسب مسلمة أرخميدس فإن  $\forall \varepsilon > 0; \exists n \in \mathbb{N}^*: 1 < \varepsilon n$  ومنه

$$\forall \varepsilon > 0; \exists a \in A: \varepsilon + 2 > a \text{ أو } \forall \varepsilon > 0; \exists n \in \mathbb{N}^*: \varepsilon + 2 > \frac{2n+1}{n}$$

$$\text{ب/ لدينا } \forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

بما أن 1 حد من الأعلى للمجموعة  $B$  و  $1 \in B$  فإن  $1 \in \text{Max}B = \text{Sup}B$

لدينا 0 حد من الأسفل للمجموعة  $B$  و  $0 \notin B$ ، لنبرهن أن  $0 \in \text{inf}B$

$$\text{علينا إثبات أن: } \forall \varepsilon > 0; \exists a \in B: \varepsilon + 0 > a \text{ أو } \forall \varepsilon > 0; \exists x \in \mathbb{R}: \varepsilon + 0 > \frac{1}{x^2+1}$$

$$\text{لدينا من جهة أخرى } x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{x^2+1} \text{ ومنه}$$

- إذا كان  $\varepsilon \geq 1$  يكفي اختيار  $x \in \mathbb{R}^*$

$$\text{- إذا كان } \varepsilon < 1 \text{ فإن } \left( x < -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1} \text{ أو } x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1} \right) \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \text{ في هذه الحالة يكفي اختيار } x \text{ من إحدى}$$

$$\text{المجالين } \left[ -\infty, -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1} \right[ \text{ أو } \left] \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}, +\infty \right[$$

### تمرين 03:

(1) نفرض  $n$  عدد طبيعي ليس مربعاً تماماً أي أن:  $\forall m \in \mathbb{N}: n \neq m^2$  و نبرهن بالخلف أن  $\sqrt{n}$  عدد غير ناطق.

نفرض  $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$  حيث  $p, q$  عدنان طبيعيان غير معدومان و أوليان فيما بينهما.

لدينا

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = nq^2$$

$$\Rightarrow q^2 \mid p^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 1$$

$$\Rightarrow p^2 = n$$

أي أن  $n$  مربع تام وهذا يناقض الفرض.

(ب) نفرض  $x \notin \mathbb{Q}$  و  $r \in \mathbb{Q}$  و نبرهن بالخلف أن:  $r + x \notin \mathbb{Q}$

نفرض  $r + x \in \mathbb{Q}$  ولدينا  $-r \in \mathbb{Q}$  ومنه  $-r + r + x \in \mathbb{Q}$  أي أن  $x \in \mathbb{Q}$  وهذا يناقض الفرض

(ج) بنفس الطريقة

(د) العدد  $\sqrt{15} + \sqrt{12}$  غير ناطق

نفرض  $\sqrt{15} + \sqrt{12} \in \mathbb{Q}$  ومنه  $(\sqrt{15} + \sqrt{12})^2 = 27 + 2\sqrt{180} \in \mathbb{Q}$  وهذا تناقض لأن

180 ليس مربعا تاما وبالتالي:  $\sqrt{180} \notin \mathbb{Q}$  ومنه  $27 + 2\sqrt{180} \notin \mathbb{Q}$

### تمرين 04:

(1 أ) لدينا  $\forall x \in F: x \geq \text{Inf}F$  وبما أن  $E \subseteq F$  فإن  $\forall x \in E: x \geq \text{Inf}F$  أي أن العدد  $\text{Inf}F$  حاد أدنى للمجموعة  $E$  وبما أن  $\text{Inf}E$  هو أكبر الحواد الدنيا للمجموعة  $E$  فإن  $\text{Inf}F \leq \text{Inf}E$ .

لدينا  $\forall x \in F: x \leq \text{Sup}F$  وبما أن  $E \subseteq F$  فإن  $\forall x \in E: x \leq \text{Sup}F$  أي أن العدد  $\text{Sup}F$  حاد أعلى للمجموعة  $E$  وبما أن  $\text{Sup}E$  هو أصغر الحواد العليا للمجموعة  $E$  فإن  $\text{Sup}E \leq \text{Sup}F$ .

إذا  $(E \subseteq F) \Rightarrow (\text{Inf}F \leq \text{Inf}E \leq \text{Sup}E \leq \text{Sup}F)$

(ب) لدينا  $x \in F$  أو  $x \in E \cup F \Leftrightarrow x \in E \cup F$  ومنه  $x \leq \text{Sup}E$  أو  $x \leq \text{Sup}F$  ومنه  $\forall x \in E \cup F: x \leq \text{Sup}E$  ومنه  $\text{Sup}(E \cup F) \leq \text{Max}\{\text{Sup}E, \text{Sup}F\}$  إذا  $F: x \leq \text{Max}\{\text{Sup}E, \text{Sup}F\}$

من جهة أخرى

$$\begin{cases} E \subseteq E \cup F \Rightarrow \text{Sup}E \leq \text{Sup}(E \cup F) \\ F \subseteq E \cup F \Rightarrow \text{Sup}F \leq \text{Sup}(E \cup F) \end{cases} \Rightarrow \text{Max}\{\text{Sup}E, \text{Sup}F\} \leq \text{Sup}(E \cup F)$$

و منه  $\text{Sup}(E \cup F) = \text{Max}\{\text{Sup}E, \text{Sup}F\}$

$$\text{Sup}E = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E: x \leq m \dots \dots \dots (1) \\ \forall \varepsilon > 0; \exists a \in E: a \geq m - \frac{\varepsilon}{2} \dots \dots \dots (2) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Inf}F = n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in F: y \geq n \\ \forall \varepsilon > 0; \exists b \in F: b \leq n + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in F: -y \leq -n \dots \dots \dots (3) \\ \forall \varepsilon > 0; \exists b \in E: -b \geq -n - \frac{\varepsilon}{2} \dots \dots \dots (4) \end{cases}$$

بالجمع بين (1) و (3) و (2) و (4) نحصل على:

$$\begin{cases} \forall x \in E; \forall y \in F: x - y \leq m - n \\ \forall \varepsilon > 0; \exists a \in E; \exists b \in F: a - b \geq m - n - \varepsilon \end{cases}$$

ومنه  $\text{Sup}(E - F) = n - m = \text{Sup}E - \text{Inf}F$

(ج) نضع  $E = \{0\}$  في الخاصية أ) نحصل على:

$$\text{Sup}(-F) = -\text{Inf}F \text{ ومنه } \text{Sup}(\{0\} - F) = \text{Sup}\{0\} - \text{Inf}F$$

(لأنه حسب تعريف  $E - F$  فإن  $\{0\} - F = -F$ .)

(3 أ) لدينا  $\forall x \in E: x \leq \text{Sup}E \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\text{Sup}E}$  أي أن  $\forall \frac{1}{x} \in \frac{1}{E}: \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\text{Sup}E}$  وبما أن  $\text{Inf} \frac{1}{E}$ ، حسب التعريف، هو أكبر الحواد الدنيا للمجموعة  $\frac{1}{E}$  فإن  $\text{Inf} \frac{1}{E} \geq \frac{1}{\text{Sup}E}$  ..... (\*)

لدينا من جهة أخرى:  $\forall x \in E: x \leq \frac{1}{\inf \frac{1}{x}}$  أو  $\forall x \in E: \frac{1}{x} \geq \inf \frac{1}{x}$  لكن  $Sup E$  هو أصغر الحواد العليا للمجموعة  $E$   
 إذا  $Sup E \leq \frac{1}{\inf \frac{1}{x}}$  أو  $\inf \frac{1}{x} \leq \frac{1}{Sup E}$  ..... (\*\*).  
 من (\*) و (\*\*). نستنتج أن:  $\inf \frac{1}{x} = \frac{1}{Sup E}$ .

## تمارين حول المحور الثانى (المتتاليات الحقيقية)

### تمرين 01:

أدرس رتبة المتتاليات التالية:

$$*f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad k_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (\alpha \in \mathbb{R}) w_n = \alpha n + (-1)^n, \quad v_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2n}, \quad *u_n = \frac{3n+4}{2n-1}$$

( $\forall n \in \mathbb{N}; \forall a > -1: (1+a)^n \geq 1+na$  برنولي متراجحة نستعمل متراجحة برنولي و ( $f_n$ ) و ( $k_n$ ) بالنسبة للمتتاليتين)

### تمرين 02:

أحسب نهاية كل متتالية من المتتاليات التالية:

$$(|a| < 1; |b| < 1) * c_n = \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}, \quad b_n = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n^2+n}, \quad a_n = \frac{3^n+(-1)^n}{2^n+2(-1)^n}$$

$$.g_n = \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{2^n}, \quad (a \in \mathbb{R}) * f_n = \left(\frac{n+a}{n+1}\right)^n, \quad (p \in \mathbb{N}^*) * e_n = \sqrt[n]{n^p}, \quad d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

### تمرين 03:

(1) باستعمال الحصر أحسب نهاية كل متتالية من المتتاليات التالية:

$$(x \in \mathbb{R})(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}: v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx) \quad (ب) \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}: u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \quad (أ)$$

$$. (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}: w_n = \frac{n!}{n^n} \quad (ج)$$

(2) مستعملاً التعريف أثبت أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1 \quad (أ) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{2n^2+n} = \frac{1}{2} \quad (ب) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0 \quad (أ)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+(-1)^n}{2^n} = 1 \quad (و) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2 \quad (هـ) \quad (a > 1) \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty \quad (د)$$

(3) أثبت أن المتتالية ( $u_n$ ) متباعدة في كل حالة من الحالات التالية:

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{4n}\pi\right) \quad (ب) \quad u_n = (-1)^n \frac{n+2}{n} \quad (أ)$$

### تمرين 04:

لتكن ( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة بـ  $u_0 = 1$  و  $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ .

(1) أثبت أن  $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq 1$ .

(2) نرمز بـ  $a$  للحل الموجب للمعادلة  $x = 1 + \frac{1}{x}$ .

$$(أ) \text{ أثبت أن } \forall n \in \mathbb{N}: |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{a} |u_n - a| \text{ وأن } \forall n \in \mathbb{N}: |u_0 - a| \leq \frac{1}{a^n} |u_0 - a|.$$

(ب) ماذا تستنتج؟

### تمرين 05:

(1) أثبت أنه إذا كانت المتتاليتين الجزئيتين ( $u_{2n}$ ) و ( $u_{2n+1}$ ) متقاربتين نحو  $l$  فإن المتتالية ( $u_n$ ) تكون متقاربة نحو  $l$ .

(2) (تطبيق 1) لتكن ( $u_n$ ) متتالية حيث:  $\forall p \in \mathbb{N}^*; \forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ .

أثبت أن ( $u_n$ ) متقاربة نحو 0.

(3) **تطبيق 2** لتكن  $(v_n)$  متتالية متناقصة و متقاربة نحو 0، ولتكن المتتالية  $(S_n)$  المعرفة كما يلي:

$$S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i v_i$$

أثبت أن المتتاليتين الجزئيتين  $(S_{2n})$  و  $(S_{2n+1})$  متجاورتان، ماذا تستنتج ؟  
( التطبيق 2 هو برهان لنظرية ليبنتز في السلاسل العددية ).

### تمرين 06:

ليكن  $b, a$  عددين حقيقيين حيث  $0 < a < b$ .

نعرف المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  كما يلي:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n \cdot v_n} , v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} , v_0 = b , u_0 = a$$

أثبتما يلي:

(1)  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < v_n$  (2) المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  رتبتان.

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) \quad (4) \quad \forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n) \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 \quad (5) \quad \text{ماذا تستنتج ؟}$$

### تمرين 07:

(1) لتكن  $(u_n)$  متتالية حيث  $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - u_n| \leq a^n$  حيث  $(0 < a < 1)$

أثبت أن  $(u_n)$  متتالية كوشية.

(2\*) لتكن  $(v_n)$  متتالية حيث  $(0 < K < 1) : |v_{n+1} - v_n| \leq K |v_n - v_{n-1}|$  ،  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ، أثبت أن  $(v_n)$  متتالية كوشية.

### تمرين 08\*:

ليكن  $\alpha$  عدد حقيقي و  $(u_n)_{n \geq 1}$  المتتالية الحقيقية المعرفة بـ  $u_1 = \alpha$  و

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2} u_n + \frac{2(n^2 + n + 1)}{(n+1)^2}$$

(1) أ) أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  رتبية ومحدودة (ب) أحسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  (نرمز لهذه النهاية بـ  $\ell$ ).

(2) أ) أوجد علاقة بسيطة بين  $u_{n+1} - \ell$  و  $u_n - \ell$  (ب) استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$ .

### تمرين 09\*:

(1) لتكن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  و  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متتاليتين حيث  $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$  ،  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

أثبت ما يلي:

أ) إذا كانت  $(u_n)$  رتبية فإن  $(v_n)$  رتبية ولها نفس اتجاه تغير  $(u_n)$ .

ب) إذا كانت  $(u_n)$  متقاربة نحو  $\ell$  فإن  $(v_n)$  متقاربة نحو  $\ell$ .

(2) لتكن  $a_1, a_2, \dots, a_m$  أعداد حقيقية موجبة ليست كلها معدومة حيث  $m \in \mathbb{N}^*$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i$$

## تمارين المحور الثاني حلول

### تمرين 01:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{\sqrt{n+2}}{2n+2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\frac{\sqrt{n+2}}{n+1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n}} \right) \left( \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{n+1}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\frac{\sqrt{n+2}}{n+1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n}} \right) \left( -\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2(n+1)^2} \right) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (\alpha(n+1) + (-1)^{n+1}) - (\alpha n + (-1)^n) = \alpha - 2(-1)^n \\ &= \begin{cases} \alpha - 2 & \text{si } n = 2k \\ \alpha + 2 & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

\* إذا كان  $\alpha \leq -2$  فإن  $\alpha + 2 \leq 0$  و  $\alpha - 2 < 0$  ومنه  $w_{n+1} - w_n \leq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

\* إذا كان  $\alpha \geq 2$  فإن  $\alpha + 2 > 0$  و  $\alpha - 2 \geq 0$  ومنه  $w_{n+1} - w_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

\* إذا كان  $2 < \alpha < -2$  فإن  $(w_n)$  ليست رتيبة.

$$\begin{aligned} \frac{k_{n+1}}{k_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+1}{n} \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} \geq \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{n+1}{n^2 + 2n + 1}\right) \\ &\geq \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq 1 \end{aligned}$$

### تمرين 02:

$$a_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2^n + 2(-1)^n} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n} \Rightarrow \lim a_n = +\infty$$

$$b_n = \frac{\frac{n}{2}(1 + 2n - 1)}{n^2 + n} = \frac{n^2}{n^2 + n} \Rightarrow \lim(b_n) = 1$$

$$\lim(\ln d_n) = \lim \left( n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \lim \left( \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right) = 1 \Rightarrow \lim(d_n) = e$$

$$g_n = \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim(g_n) = 2$$

### تمرين 03:

$$(x \in \mathbb{R})(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}: v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx) \quad (\text{ب})$$

لدينا  $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}: E(kx) \leq kx < E(kx) + 1$  ومنه

$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}: kx - 1 < E(kx) \leq kx$  ومنه

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \sum_{k=1}^n (kx - 1) < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq \sum_{k=1}^n kx$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{n}{2}(x - 1 + nx - 1) < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq \frac{n}{2}(x + nx)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{x-2}{2n} + \frac{x}{2} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx) \leq \frac{x}{2n} + \frac{x}{2}$$

$$\lim \left( \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx) \right) = \frac{x}{2} \text{ فإن } \lim \left( \frac{x-2}{2n} + \frac{x}{2} \right) = \lim \left( \frac{x}{2n} + \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2} \text{ بما أن}$$

$$\cdot (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}: w_n = \frac{n!}{n^n} \text{ (ج)}$$

لدينا  $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \{2, 3, \dots, n\}: n \geq k$

و منه  $n^{n-1} \geq n! \text{ أو } \prod_{k=2}^n (n) \geq \prod_{k=2}^n (k)$

إذا  $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$  أي أن  $0 \leq w_n \leq \frac{1}{n}$  و بما أن  $\lim \frac{1}{n} = 0$  فإن  $\lim w_n = 0$

(2) التعريف:  $(\lim u_n = l) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$

$$\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0 \text{ (أ)}$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ لدينا}$$

ليكن  $\varepsilon > 0$  حيث  $|u_n - 0| < \varepsilon$

$$|u_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2} \text{ لدينا و } \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \text{ يكفي أخذ } \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

إذا يكفي اختيار  $N = E\left(\frac{1}{4\varepsilon^2}\right) + 1$  حتى تكون القضية

صحيحة.  $(\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon)$

$$\lim \frac{n^2-1}{2n^2+n} = \frac{1}{2} \text{ (ب)}$$

$$|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n+2}{2n^2+n} < \varepsilon \text{ لدينا ، } |u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon \text{ حيث } \varepsilon > 0$$

$$\text{بما أن } \frac{n+2}{2n^2+n} < \frac{4n+2}{2n^2+n} = \frac{2}{n} \text{ يكفي أخذ } \frac{2}{n} < \varepsilon \text{ و لدينا } \frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} \text{ إذا يكفي اختيار } N = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + 1$$

$$(a > 1) \lim a^n = +\infty \text{ (د)}$$

التعريف:  $(\lim u_n = +\infty) \Leftrightarrow (\forall A > 0 \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow u_n > A)$

بما أن  $a > 1$  نضع  $a = 1 + \alpha$  حيث  $\alpha > 0$ ، حسب متباينة برنولي فإن  $a^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

ليكن  $A > 0$  حيث  $u_n > A$

لدينا  $u_n > A \Leftrightarrow a^n > A$  و بما أن  $a^n \geq 1 + n\alpha$  يكفي أخذ  $1 + n\alpha > A$  ومنه

$$1 + n \alpha > A \Leftrightarrow n > \frac{A-1}{\alpha}$$

$$N = E\left(\left\lceil \frac{A-1}{\alpha} \right\rceil\right) + 1 \text{ أو } N = E\left(\left\lceil \frac{A-1}{\alpha} \right\rceil\right) + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+(-1)^n}}{2^n} = 1 \text{ (و)}$$

حسب متباينة برنولي فإن  $\forall n \in \mathbb{N}: 2^n = (1+1)^n \geq 1+n$  أو  $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{1+n}$

$$\text{ليكن } \varepsilon > 0 \text{ حيث } |u_n - 1| < \varepsilon \text{، لدينا } \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow |u_n - 1| < \varepsilon$$

بما أن  $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{1+n}$  يكفي أخذ  $\frac{1}{1+n} < \varepsilon$  ولدينا  $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n < \frac{1}{\varepsilon}$ ، إذا يكفي اختيار

$$N = E\left(\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil\right) + 1$$

(3) لإثبات أن متتالية  $(u_n)$  متباعدة يكفي استخراج منها متتالية جزئية متباعدة أو استخراج متتاليتين جزئيتين منها متقاربتين لكن لهما نهايتين مختلفتين.

$$u_n = (-1)^n \frac{n+2}{n} \text{ (أ)}$$

لتكن المتتاليتين الجزئيتين  $(u_{2n})$  و  $(u_{2n+1})$  حيث  $u_{2n+1} = -\frac{2n+3}{2n+1}$  و  $u_{2n} = \frac{2n+2}{2n}$  و  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

لدينا  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = -1$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = 1$  إذا  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1}$  ومنه فإن المتتالية  $(u_n)$  متباعدة.

#### تمرين 04:

$$(1) \text{ فرض } u_0 = 1 \geq 1 \text{ و } u_n \geq 1 \text{ و نبرهن أن } u_{n+1} \geq 1.$$

$$\text{لدينا } 1 < 1 + \frac{1}{u_n} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{u_n} \leq 1 \Rightarrow 0 < u_n \geq 1 \text{ إذا } u_{n+1} \geq 1.$$

$$(2) \text{ الحل الموجب للمعادلة } x = 1 + \frac{1}{x} \text{ هو } a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ لاحظ أن } a > 1.$$

$$\text{لدينا } |u_{n+1} - a| = \left| 1 + \frac{1}{u_n} - \left(1 + \frac{1}{a}\right) \right| = \frac{1}{au_n} |u_n - a| \leq \frac{1}{a} |u_n - a| \text{ (أ)}$$

$$P(0) : |u_0 - a| \leq |u_0 - a| \Leftrightarrow |u_0 - a| \leq \frac{1}{a^0} |u_0 - a| \text{ محققة.}$$

$$\text{فرض } |u_n - a| \leq \frac{1}{a^n} |u_0 - a| \text{ و نبرهن أن } |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{a^{n+1}} |u_0 - a|.$$

$$\text{لدينا } |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{a} |u_n - a| \Rightarrow |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{a} \frac{1}{a^n} |u_0 - a| \leq \frac{1}{a^{n+1}} |u_0 - a|$$

(ب) الاستنتاج: بما أن  $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < |u_n - a| \leq \frac{1}{a^n} |u_0 - a|$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} |u_0 - a| = 0$  فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - a| = 0 \text{ ومنه نستنتج أن } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a.$$

#### تمرين 05:

$$(1) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = \ell \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \ell \right) \Leftrightarrow \left( \forall \varepsilon > 0; \begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N}: n > N_1 \Rightarrow |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}: n > N_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon \end{cases} \right)$$

باختيار  $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$  ليكن  $n$  عدد طبيعي حيث  $n > N$

- إذا كان  $n = 2k$  فإن  $n > N \geq 2N_1 \Rightarrow 2k > 2N_1 \Rightarrow k > N_1$  ومنه فإن

$n > N \Rightarrow k > N_1 \Rightarrow |u_{2k} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$   
 - إذا كان  $n = 2k + 1$  فإن  $n > N \geq 2N_2 + 1 \Rightarrow 2k + 1 > 2N_2 + 1 \Rightarrow k > N_2$  ومنه فإن

$$.n > N \Rightarrow k > N_2 \Rightarrow |u_{2k+1} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

إذا  $(N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)) \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$ .

$$(2) \text{ (تطبيق 1)} (u_n) \text{ متتالية حيث: } \forall p \in \mathbb{N}^*; \forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$$

بوضع  $p = n$  ثم  $p = n + 1$  على التوالي في المتباينة السابقة نحصل على  $\forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq u_{2n} \leq \frac{2}{n}$  و

$$\text{فإن } \lim \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = 0 \text{ و } \lim \frac{2}{n} = 0 \text{ و بما أن } \forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

و منه نستنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو 0.

$$(3) \text{ (تطبيق 2)} (v_n) \text{ متتالية متناقصة و متقاربة نحو 0، و } (S_n) \text{ معرفة كما يلي: } S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i v_i$$

أولاً: بما أن  $(v_n)$  متتالية متناقصة فإن

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{i=0}^{2n+2} (-1)^i v_i - \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i v_i = \sum_{i=2n+1}^{2n+2} (-1)^i v_i = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{i=0}^{2n+3} (-1)^i v_i - \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i v_i = \sum_{i=2n+2}^{2n+3} (-1)^i v_i = v_{2n+2} - v_{2n+3} \geq 0$$

ثانياً: بما أن  $(v_n)$  متتالية متقاربة نحو 0 فإن

$$\lim (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim v_{2n+1} = 0$$

إذا المتتاليتين  $(S_{2n+1})$  و  $(S_{2n})$  متجاورتان.

، نستنتج أن المتتالية  $(S_n)$  متقاربة.

### تمرين 06:

$$0 < u_0 < v_0 \Leftrightarrow 0 < a < b \quad (1)$$

نفرض  $0 < u_n < v_n$  و نبهن أن  $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$ .

$$\text{لدينا } u_{n+1} = \sqrt{u_n \cdot v_n} > 0$$

و من جهة أخرى  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2}{2} > 0$  إذا  $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$

$$\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0 \quad (2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \quad (3)$$

$$(4) \quad v_0 - u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 (b - a) \Leftrightarrow b - a \leq (b - a) \text{ محققة.}$$

نفرض  $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$  و نبهن أن  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a)$ .

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a) \text{ و } v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

$$(5) \text{ بما أن } \lim (v_n - u_n) = 0 \text{ فإن } \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) = 0$$

نستنتج أن المتتاليتين  $(v_n)$  و  $(u_n)$  متجاورتان.

### تمرين 07:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \forall p \in \mathbb{N}: |u_{n+p} - u_n| = |u_{n+p} - u_{n+p-1} + u_{n+p-1} - u_{n+p-2} + \dots + u_{n+1} - u_n| \quad (1)$$

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \dots + |u_{n+1} - u_n|$$

$$|u_{n+p} - u_n| \leq a^{n+p-1} + a^{n+p-2} + \dots + a^{n+1} + a^n = a^n \frac{1 - a^p}{1 - a} \leq \frac{a^n}{1 - a}$$

$$\cdot |u_{n+p} - u_n| \leq \frac{a^n}{1-a} \text{ و } a^{n+p-1} + a^{n+p-2} + \dots + a^{n+1} + a^n = a^n \frac{1-a^p}{1-a} \leq \frac{a^n}{1-a} \text{ لدينا}$$

$$\text{بما أن } 0 < a < 1 \text{ فإن } \frac{a^n}{1-a} \rightarrow 0 \text{ إذا } \frac{a^n}{1-a} < \varepsilon \text{ و } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow \frac{a^n}{1-a} < \varepsilon \text{ و منه}$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; \forall p \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

## تمارين حول المحورين الثالث والرابع (التوابع الحقيقية والتوابع الأولية)

**تمرين 01:** حدد ميدان تعريف التابع  $f$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$\begin{aligned} & , f(x) = \sqrt{\frac{x}{6-x}} \text{ } (^{\circ}4 , f(x) = \sqrt{|x-1|} \text{ } (^{\circ}3 , f(x) = \sqrt{3x-x^3} \text{ } (^{\circ}2 , f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \text{ } (^{\circ}1 \\ & , f(x) = \frac{x^2+1}{E(x)} \text{ } (^{\circ}7 , f(x) = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+1} \text{ } (^{\circ}6 , f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}} \text{ } (^{\circ}5 \\ & .f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x} \text{ } (^{\circ}10 , f(x) = \ln(-\ln(x^2 - 5x + 5)) \text{ } (^{\circ}9 , f(x) = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{2+x} \text{ } (^{\circ}8 \end{aligned}$$

**تمرين 02:** باستعمال التعريف أثبت أن:

$$\begin{aligned} & . \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{-x+1} = -\infty , \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = +\infty , \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 , \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{4}{5} \\ & . * \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+x+1}{1-3x} = +\infty , * \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-2}{x^2-x} = -\infty , * \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+1}{x^2-3x} = 2 , * \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+2} = 2 \end{aligned}$$

**تمرين 03:** أحسب النهايات التالية:

$$\begin{aligned} & , \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x) , * \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}} \right) , \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) \\ & . \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{E(x)+1} , * \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^{2x+1} , \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2} , * \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2-1}) \end{aligned}$$

**تمرين 04:** بين أن الدالة  $f$  لا تقبل نهاية عند  $x_0$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$.x_0 = \infty \text{ و } f(x) = x - E(x) \text{ } (^{\circ}3 , x_0 = \infty \text{ و } f(x) = \cos x \text{ } (^{\circ}2 , x_0 = 0 \text{ و } f(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ } (^{\circ}1$$

$$.u(x) = x \cos \frac{1}{x} \text{ و } v(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \text{ حيث } x_0 = 0 \text{ و } f = v \circ u \text{ } (^{\circ}4$$

**تمرين 05:** هل يمكن تمديد التابع  $f$  بالاستمرار عند  $x_0$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$.x_0 = 0 \text{ و } f(x) = 1 - x \sin \frac{1}{x} \text{ } (^{\circ}3 , x_0 = 1 \text{ و } f(x) = \frac{x^2-x}{\sin(x-1)} \text{ } (^{\circ}2 , x_0 = -1 \text{ و } f(x) = \frac{x^3+5x+6}{x^5+1} \text{ } (^{\circ}1$$

**تمرين 06:** عين  $a$  و  $b$  حتى يكون التابع  $f$  مستمر على ميدان تعريفه، في كل حالة من الحالات التالية:

$$.f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ } (^{\circ}2 , f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \text{ } (^{\circ}1$$

**تمرين 07:** بتطبيق نظرية التزايد المتناهية أثبت ما يلي:

$$\forall x \in ]0; 1[ : 1 + x < e^x < \frac{1}{1-x} \text{ } /^{\circ}1$$

$$\forall x \geq 0 : 2 \leq \sqrt{4+x^2} \leq 2 + \frac{x^2}{2} \text{ } /^{\circ}2^*$$

**تمرين 08:** باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهايات التالية:

$$, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \text{ } (^{\circ}4 , \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{2x+1}{x^2}} - 1 \right) \text{ } (^{\circ}3 , \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2 \cos x} \text{ } (^{\circ}2 , \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \text{ } (^{\circ}1$$

$$, \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \pi \cotan \pi x \right) \text{ } (^{\circ}7 , \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x} \right) \right] \text{ } (^{\circ}6 , \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x^3 - 3x^2 + x - 1)}{2x-1} \text{ } (^{\circ}5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) \text{ *}(\circ 10, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2} - (\cos x + \sin x)^3}{1 - \sin 2x} \text{ } (\circ 9, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} \text{ } (\circ 8$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ \ln \frac{2x^2+1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ تمرين 09: ليكن التابع } f \text{ المعرف على } \mathbb{R} \text{ بـ}$$

1/ أدرس استمرارية  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

2/ هل  $f$  يقبل الاشتقاق عند  $0$  ؟

3/ أكتب عبارة  $f'(x)$  بدلالة  $x$ .

4/ بين أن  $f$  يقبل تابع عكسي  $f^{-1}$ . يطلب تحديد مجموعة تعريفه وكذلك تعيين عبارة  $f^{-1}(x)$  بدلالة  $x$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{si } x < 0 \\ e^{bx} - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ تمرين 10* : ليكن التابع } f \text{ المعرف على } \mathbb{R} \text{ بـ}$$

حيث  $a, b$  عددين حقيقيين

أ/ عين  $a$  حتى يكون  $f$  مستمر عند  $0$ .

ب/ عين قيمة  $b$  حتى يكون  $f$  قابلاً للاشتقاق عند  $0$ .

تمرين 11: أثبت ما يلي:

$$\forall x \in ]-1, 1[ : \tan \text{Arc} \sin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (1)}$$

$$\forall x \in [-1, 0[ \cup ]0, 1] : \tan \text{Arc} \cos x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ * (2)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos \text{Arc} \tan x = \sin \text{Arc} \cotan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ (3)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin \text{Arc} \tan x = \cos \text{Arc} \cotan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ * (4)}$$

$$\forall x \geq 0 : \text{Arc} \tan(x+1) - \text{Arc} \tan x = \text{Arc} \tan \frac{1}{1+x+x^2} \text{ (5)}$$

$$\forall x \in [-1, 1] : \text{Arc} \cos x + \text{Arc} \cos(-x) = \pi \text{ * (6)}$$

تمرين 12: باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهايات التالية:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} \text{ *}(\circ 4, \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \text{ } (\circ 3, \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \text{Arc} \tan x} - \frac{1}{x^2} \right) \text{ *}(\circ 2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \text{Arc} \sin x^2}{x \cos x - \sin x} \text{ (1} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \text{Arc} \tan x}{\ln \frac{x-1}{x+1}} \text{ *}(\circ 7, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x - x^2}{x^6} \text{ } (\circ 6, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2 \cos x} \text{ } (\circ 5 \end{aligned}$$

## حلول تمارين المحورين الثالث والرابع

**تمرين 01:** ميدان تعريف التابع  $f$

$$D_f = \mathbb{R} \quad (^\circ 1)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \geq 0\} = \mathbb{R} \quad (^\circ 3)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -x \geq 0 \text{ و } 2 + x > 0\} = ]-2, 0] \quad (^\circ 5)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : E(x) \neq 0\} = ]-\infty, 0[ \cup [1, +\infty[ \quad (^\circ 7)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 + x \geq 0, 1 - x > 0, \ln(1 - x) \neq 0\} = [-2, 0[ \cup ]0, 1[ \quad (^\circ 8)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ و } \sin \pi x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ و } \pi x \neq \frac{\pi k}{k} \in \mathbb{Z}\right\} \quad (^\circ 10)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ و } x \neq k/k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}_+^* - \mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} ]n, n+1[$$

**تمرين 02:** النهاية بالتعريف

**(1) التعريف:**

$$\left( \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*; \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in V_{x_0} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \right) \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$$

ليكن  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  و  $V_3 = ]2, 4[$  جوار للعدد 3 لدينا:

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \frac{4}{5} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{5} \left| \frac{x^2 - 9}{x^2 + 1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{5} \frac{|(x+3)|}{x^2 + 1} |x - 3| < \varepsilon$$

لدينا من جهة أخرى  $\forall x \in V_3 : \frac{|(x+3)|}{x^2 + 1} < \frac{7}{5}$  و منه  $\frac{1}{5} \frac{|(x+3)|}{x^2 + 1} |x - 3| < \frac{7}{5} |x - 3| < \varepsilon$

و منه  $|x - 3| < \frac{25}{7} \varepsilon$  إذن يكفي اختيار  $\delta = \frac{25}{7} \varepsilon$ .

**(2) التعريف:**

$$\left( \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*; \exists B \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in V_{+\infty} : x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \right) \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \right)$$

$$\left( \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*; \exists B \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in V_{-\infty} : x < -B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \right) \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

ليكن  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  و  $V_{+\infty} = ]1, +\infty[$  جوار ل  $+\infty$  لدينا:

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{2}{x^2 + 1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

لدينا من جهة أخرى  $\forall x \in V_{+\infty} : x^2 + 1 > x^2 > \frac{2}{\varepsilon}$  و منه  $x^2 + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$

$$.B = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \text{ إذن يكفي اختيار } x^2 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

ليكن  $V_{-\infty} = ]-\infty, -1[$  جوار لـ  $-\infty$  لدينا:  $x^2 + 1 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon$  و  $x^2 + 1 > x^2$

$$.B = -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \text{ إذن يكفي اختيار } x^2 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$$

(3) **التعريف:**

$$\left( \forall A \in \mathbb{R}_+^*; \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in V_{x_0}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A \right) \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = +\infty$$

ليكن  $V_1 = ]0, 2[$  و  $A \in \mathbb{R}_+^*$  جوار للعدد 1 لدينا:  $\frac{(x-1)^2}{x+2} < \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{x+2}{(x-1)^2} > A$  و  $\frac{1}{x+2} < \frac{1}{2}$

$$\text{لدينا من جهة أخرى } \frac{1}{2}(x-1)^2 < \frac{1}{A} \Leftrightarrow |x-1| < \sqrt{\frac{2}{A}} \text{ إذن يكفي اختيار } \delta = \sqrt{\frac{2}{A}}$$

(4) **التعريف:**

$$\left( \forall A \in \mathbb{R}_-^*; \exists B \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in V_{+\infty}: x > B \Rightarrow f(x) < A \right) \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{-x+1} = -\infty$$

ليكن  $A \in \mathbb{R}_-^*$  و  $V_{+\infty} = ]1, +\infty[$  جوار لـ  $+\infty$  لدينا:  $\frac{x^2+x+1}{-x+1} = -x - \frac{3}{x-1} - 2$  و منه

$$\forall x \in V_{+\infty}: x + \frac{3}{x-1} + 2 > x + 2 \text{ و } f(x) < A \Leftrightarrow -x - \frac{3}{x-1} - 2 < A \Leftrightarrow x + \frac{3}{x-1} + 2 > -A$$

لدينا من جهة أخرى  $x + 2 > -A \Leftrightarrow x > -2 - A$  إذن يكفي أخذ  $B = -2 - A$  ( $-2 - A \in \mathbb{R}_+^*$ ).

**تمرين 03:** حساب النهايات

$$(1) \text{ ح.ع.ت } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2+x-2}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -1$$

$$(2) \text{ ح.ع.ت } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x) = +\infty - \infty$$

لدينا

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x)(\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{-2x(x - \sqrt{x^2+2x} + 1)}{\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x} \\ & = \frac{-2x(x - \sqrt{x^2+2x} + 1)(x + \sqrt{x^2+2x} + 1)}{(\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x)(x + \sqrt{x^2+2x} + 1)} \\ & = \frac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x)(x + \sqrt{x^2+2x} + 1)} \end{aligned}$$

$$x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x) = \frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x+2\sqrt{x^2+x+x}})(x+\sqrt{x^2+2x+1})} = \text{ومنه}$$

$$\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+1}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}}\right)}$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+1}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}}\right)} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = 1^\infty \text{ ت.ع.ح (3)}$$

$$\ln(f(x)) = x^2 \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right) \text{ منه و } f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} \text{ نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2-2} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)}{\frac{3}{x^2-2}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = e^3 \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{E(x)+1} \text{ (4)}$$

لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R} : 1 + x \geq E(x) + 1 > x \text{ ومنه } \forall x \in \mathbb{R} : E(x) \leq x < E(x) + 1$$

$$1 + x \geq E(x) + 1 > x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{E(x)+1} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \leq \frac{x}{E(x)+1} < 1 \text{ فإن } x > 0$$

$$1 + x \geq E(x) + 1 > x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{E(x)+1} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \geq \frac{x}{E(x)+1} > 1 \text{ فإن } x < -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{E(x)+1} = 1 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

**تمرين 04:** تبين أن الدالة  $f$  لا يقبل نهاية عند  $x_0$

$$x_0 = 0 \text{ و } f(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ (°1)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : x'_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \text{ و } x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{6}} \text{ حيث } (x'_n) \text{ و } (x_n)$$

$$\text{لدينا من جهة } 0 \lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \text{ و من جهة أخرى}$$

$$f(x'_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ و } f(x_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \text{ أي أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) = 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \frac{1}{2}$$

إذن التابع  $f$  لا يقبل نهاية عن 0.

$$u(x) = x \cos \frac{1}{x} \text{ و } v(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \text{ حيث } x_0 = 0 \text{ و } f = v \circ u \text{ (°4)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \text{ لدينا في السؤال السابق، لتكن } (x'_n) \text{ و } (x_n)$$

$$\text{و لدينا من جهة أخرى } \forall n \in \mathbb{N} : u(x_n) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{6}} \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\pi n + \frac{\pi}{6}} \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0 \text{ ومنه } \forall n \in \mathbb{N}: f(x_n) = v(u(x_n)) = 0$$

$$\text{و } \forall n \in \mathbb{N}: f(x_n) = v(u(x'_n)) = 1 \text{ أن } \forall n \in \mathbb{N}: u(x'_n) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ ومنه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) = 1 \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) \text{ إذن التابع } f \text{ لا يقبل نهاية عن } 0.$$

**تمرين 05:** التمديد بالاستمرار عند  $x_0$

$$x_0 = -1 \text{ و } f(x) = \frac{x^3 + 5x + 6}{x^5 + 1} \text{ (} \circ 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x + 6}{x^5 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x + 6)(x + 1)}{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x + 6)}{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)} = \frac{8}{5}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq -1 \\ \frac{8}{5}, & x = -1 \end{cases} \text{ و منه } f \text{ يقبل تمديدا بالاستمرار عند } -1 \text{ حيث}$$

$$x_0 = 0 \text{ و } f(x) = 1 - x \sin \frac{1}{x} \text{ (} \circ 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{ و } \forall x \in \mathbb{R}^*: 0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| < |x| \text{ لدينا}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ يقبل تمديدا بالاستمرار عند } 0 \text{ حيث}$$

**تمرين 06:** تعيين  $a$  و  $b$  حتى يكون التابع  $f$  مستمر على ميدان تعريفه

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \text{ (} \circ 1$$

$f$  مستمر عند 1 معناه:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + ax + b = 1 \Leftrightarrow a + b = 0$$

$f$  مستمر عند -1 معناه:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + ax + b = -1 \Leftrightarrow -a + b = -2$$

$$\text{إذن } \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -2 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

**تمرين 07:** تطبيق نظرية التزايد المتناهية في الحصر

**النظرية:** إذا كان التابع  $f$  مستمر على المجال  $[a; b]$  و قابل للاشتقاق على المجال  $]a; b[$  فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  من المجال  $]a; b[$  يحقق:  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

$$\forall x \in ]0; 1[ : 1 + x < e^x < \frac{1}{1-x} \text{ /} \circ 1$$

بتطبيق النظرية السابقة على التابع  $f(x) = e^x$  و المجال  $[a; b] = ]0; 1[$  حيث  $x \in ]0; 1[$

$$\exists c \in ]0; x[ : e^x - e^0 = e^c(x - 0) \Leftrightarrow \exists c \in ]0; x[ : e^x - 1 = e^c x$$

لدينا

$$0 < c < x \Rightarrow e^0 < e^c < e^x \Rightarrow x < e^c x < x e^x \Rightarrow x < e^x - 1 < x e^x$$

لدينا من جهة

$$. e^x - 1 < x e^x \Rightarrow e^x(1 - x) < 1 \Rightarrow e^x < \frac{1}{(1 - x)}$$

و من جهة أخرى

$$. x < e^x - 1 \Rightarrow x + 1 < e^x$$

$$\forall x \in ]0; 1[ : 1 + x < e^x < \frac{1}{1-x} \quad \text{إن}$$

**تمرين 08:** قاعدة لوبيتال

$$. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad ({}^{\circ}1 \text{ حالة عدم التعيين من الشكل } \frac{0}{0})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left( \frac{0}{0} \text{ ت.ع.ح} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left( \frac{0}{0} \text{ ت.ع.ح} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \end{aligned}$$

$$. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x} \quad ({}^{\circ}2 \text{ حالة عدم التعيين من الشكل } \frac{0}{0})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(\sin(x - \frac{\pi}{3}))'}{(1 - 2 \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x - \frac{\pi}{3})}{2 \sin x} = \frac{\cos(0)}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{2x+1}{x^2}} - 1 \right) \quad ({}^{\circ}3 \text{ حالة عدم التعيين من الشكل } 0 \cdot \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{2x+1}{x^2}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( e^{\frac{2x+1}{x^2}} - 1 \right)}{x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \text{ ت.ع.ح} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( e^{\frac{2x+1}{x^2}} - 1 \right)'}{\left( \frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} - \frac{2x + 2 e^{\frac{2x+1}{x^2}}}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 2x^2}{x^3} e^{\frac{2x+1}{x^2}} = 2e^0 = 2$$

$$. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x} \right) \right] \quad ({}^{\circ}6 \text{ حالة عدم التعيين من الشكل } 0 \cdot \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x} \right) \right]}{\frac{1}{x}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \text{ ت.ع.ح} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x} \right) \right] \right)'}{\left( \frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi \left( \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x} \right) + 1 \right)}{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x} \right)} = \frac{\pi \left( \tan^2 \frac{\pi}{4} + 1 \right)}{\tan \frac{\pi}{4}} = 2\pi$$

$$. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} \quad ({}^{\circ}8 \text{ حالة عدم التعيين من الشكل } \frac{0}{0})$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 \tan 4x - 12 \tan x)'}{(3 \sin 4x - 12 \sin x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{4}{\cos^2 4x} - 12 \frac{1}{\cos^2 x}}{3(4 \cos 4x) - 12 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 4x}{\cos^2 x \cos^2 4x (\cos 4x - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{(\cos 4x + \cos x)}{\cos^2 x \cos^2 4x} = -2\end{aligned}$$

(ملاحظة: استبدال  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  بـ  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  في السؤال).  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2} - (\cos x + \sin x)^3}{1 - \sin 2x}$  (حالة عدم التعيين من الشكل  $\frac{0}{0}$ ).

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2} - (\cos x + \sin x)^3}{1 - \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(2\sqrt{2} - (\cos x + \sin x)^3)'}{(1 - \sin 2x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{3(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2}{2 \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} \frac{3(\cos x + \sin x)^2}{2}\end{aligned}$$

لدينا

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{3(\cos x + \sin x)^2}{2} = \frac{3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \left(\frac{0}{0} \text{ ن.ع.ت. } \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)'}{(\cos 2x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos x - \sin x}{-2 \sin 2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و منه

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2} - (\cos x + \sin x)^3}{1 - \sin 2x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

**تمرين 09:** التابع العكسي

$$f \text{ معرف على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ \ln \frac{2x^2+1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1/ دراسة استمرارية  $f$  على  $\mathbb{R}$  تؤول إلى دراسة الاستمرار عند 0

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x+2} = 0 = f(0)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 0 = f(0)$  ومنه فإن  $f$  مستمر عند 0.

2/ دراسة قابلية اشتقاق  $f$  عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-x^2}{x+2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x+2} = 0 = f'_d(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow x \rightarrow 0^-} \frac{\ln \frac{2x^2+1}{x^2+1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x \rightarrow 0^-} \frac{\left(\ln \frac{2x^2+1}{x^2+1}\right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{2x^4+3x^2+1} = 0 = f'_g(0)$$

و منه  $f$  يقبل الاشتقاق عند 0 حيث  $f'(0) = 0$ .

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2+4x}{(x+2)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{2x}{2x^4+3x^2+1} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad :f'(x) \text{ بدلالة } x$$

°4 / لدينا  $\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) < 0$  أي أن  $f$  متناقص تماما على  $\mathbb{R}$  و بما أنه مستمر على  $\mathbb{R}$  فإن  $f$  يقبل تابع عكسي  $f^{-1}$  معرف و مستمر على  $] -\infty; \ln 2[$  ( نحصل على  $f(\mathbb{R}) = ] -\infty; \ln 2[$  من جدول تغيرات  $f$ ).

-تعيين عبارة  $f^{-1}(x)$  بدلالة  $x$ :

لدينا  $f(\mathbb{R}_+) = ] -\infty; 0]$  و  $f(\mathbb{R}_-) = ] 0; \ln 2[$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ ; \forall y \in ] -\infty; 0]: y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{-x^2}{x+2}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sqrt{y(y-8)} \text{ أو } x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\sqrt{y(y-8)} \text{ (مرفوض)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_- ; \forall y \in ] 0; \ln 2[: y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = -\sqrt{-\frac{e^y-1}{e^y-2}} \text{ أو } x = \sqrt{-\frac{e^y-1}{e^y-2}} \text{ (مرفوض)}$$

و منه

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x(x-8)} & \text{si } x \in ] -\infty; 0] \\ -\sqrt{-\frac{e^x-1}{e^x-2}} & \text{si } x \in ] 0; \ln 2[ \end{cases}$$

**تمرين 11:** التوابع الأولية

$$\forall x \in ] -1, 1[ : \tan \text{Arc} \sin x = \frac{\sin \text{Arc} \sin x}{\cos \text{Arc} \sin x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1)$$

$$(3) \text{ لدينا } \sin^2 \alpha = \frac{1}{1+\cotan^2 \alpha} \text{ من أجل } \alpha \in ] 0, \pi[ \text{ فإن } \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\cotan^2 \alpha}} \text{ و منه}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin \text{Arcco} \tan x = \sqrt{\frac{1}{1+\cotan^2 \text{Arcco} \tan x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 \alpha}} \text{ من أجل } \alpha \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \text{ فإن } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} \text{ و منه}$$

$$\forall x \geq 0 : \text{Arc} \tan(x+1) - \text{Arc} \tan x = \text{Arc} \tan \frac{1}{1+x+x^2} \quad (5)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow \alpha - \beta = \text{Arctan} \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{لدينا}$$

بوضع  $\alpha = \text{Arc tan}(x + 1)$  و  $\beta = \text{Arc tan } x$  نحصل على

$$\forall x \geq 0 : \text{Arc tan}(x + 1) - \text{Arc tan } x = \text{Arctan} \frac{x + 1 - x}{1 + (x + 1)x} = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

**تمرين 12:** تطبيق قاعدة لوبيتال على دوال أولية

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \text{Arc sin } x^2}{x \cos x - \sin x} \quad \text{(حالة عدم التعيين من الشكل } \frac{0}{0} \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \text{Arc sin } x^2}{x \cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \text{Arc sin } x^2)'}{(x \cos x - \sin x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc sin } x^2 + \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}}{-x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Arc sin } x^2}{-x \sin x} + \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^4}}}{-\frac{\sin x}{x}} \right)$$

لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Arc sin } x^2}{-x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{(\text{Arc sin } x^2)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^4}}}{-\frac{\sin x}{x}} \right) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \text{Arc sin } x^2}{x \cos x - \sin x} = -3 \quad \text{إذن}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{(حالة عدم التعيين من الشكل } 1^\infty \text{)}$$

نضع  $f(x) = (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$  ومنه  $\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(e^x + x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \left( \frac{0}{0} \text{ت.ع.ح} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(e^x + x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2$$

و منه

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2 \cos x} \quad \text{(حالة عدم التعيين من الشكل } \infty^0 \text{)}$$

نضع  $g(x) = (\tan x)^{2 \cos x}$  ومنه  $\ln g(x) = 2 \cos x \ln(\tan x)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \text{ت.ع.ح} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\ln(\tan x))'}{\left( \frac{1}{\cos x} \right)'} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x \tan x}}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = -2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x \sin x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2 \cos x} = e^0 = 1. \quad \text{و منه}$$

جزء

الامتحانات

المحلولة

## الامتحان الأول

التمرين الأول: أجب بـ صحيح أو خطأ مع التعليل.

(1)  $(0.75+0.5)$  كل متتالية محدودة هي متتالية متقاربة.

(2)  $(0.75+0.5)$  إذا كانت  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متناقصة على  $\mathbb{N}$  و متقاربة نحو العدد  $l$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = l$ .

(3)  $(0.75+0.5)$  إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l > 0$  فإن:

$$(\exists \delta > 0; \forall x \in ]a - \delta, a[ \cup ]a, a + \delta[: f(x) > 0)$$

(4)  $(0.75+0.5)$  إذا كان التابع  $f$  مستمر عند  $0$  فإن التابع  $g: x \rightarrow xf(x)$  يقبل الاشتقاق عند  $0$ .

التمرين الثاني: (الهدف في هذا التمرين هو إثبات تباعد متتالية تراجعية، باستخدام متتاليتين جزئيتين).

(1) ليكن  $f$  التابع المعرف على المجال  $I = [0; 1]$  كما يلي:  $f(x) = 1 - x^2$ .

نعرف المتتالية التراجعية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  حيث  $u_0 = \frac{1}{2}$  و  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$ .

أ- (1 نقطة) أدرس اتجاه تغير التابع  $f$  على  $I$  ثم استنتج أن:  $\forall x \in I : 0 \leq f(x) \leq 1$ .

ب- (1.5 نقطة) بين أن  $f \circ f(x) = -x^4 + 2x^2$ ، ثم حل في المجال  $I$  المعادلة:  $x = f \circ f(x)$ ، إذا علمت أن  $1$  حل لها.

ج- (2 نقطة) أحسب  $u_1, u_2, u_3$ ، ثم بين أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  محدودة.

(2) لتكن المتتاليتين  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ،  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  حيث:  $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{2n-1}$  و  $\forall n \in \mathbb{N}^* : w_n = u_{2n}$ .

أ- (1 نقطة) بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = f \circ f(v_n)$  و  $\forall n \in \mathbb{N}^* : w_{n+1} = f \circ f(w_n)$ .

ب- (1 نقطة) بين أن المتتاليتين  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ،  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  رتيبيتين و متقاربتين.

ج- (1.5 نقطة) أحسب نهايتي  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ، ماذا تستنتج؟

التمرين الثالث: ليكن التابع  $f$  المعرف بـ

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{x^2+1}}, & x \geq 0 \\ \frac{3(x - \arctan x)}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$$

(1) (0.5 نقطة) عين مجموعة تعريف التابع  $f$ .

(2) أ- (2 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$ .

ب- (1.5 نقطة) استنتج أن  $f$  يقبل الاشتقاق عند  $0$ .

3) أ - (2 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال احسب النهاية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x e^{\frac{x}{x^2+1}} - x \right)$ .

ب - (1 نقطة) استنتج أن المنحنى البياني  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار  $+\infty$  يتطلب تعيين معادلة له.

## الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط

|      |  |
|------|--|
| 0.5  | <b>التمرين الأول (5 نقاط):</b>   |
| 0.25 | (1) خطأ.....<br>التعليل: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث $u_n = (-1)^n$ ، لدينا $\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq u_n \leq 1$  |
| 0.5  | أي أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة، لكنها متباعدة لأن المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ و $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربتين نحو نهايتين مختلفتينهما 1 و -1 على الترتيب.   |
| 0.5  | (2) صحيح.....  |
| 0.5  | التعليل: بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ فإن<br>(1)..... $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$<br>لنبرهن بالخلف أن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq l$<br>نفرض أن $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} < l$ و منه $l - u_{n_0} > 0$ ، بوضع $\varepsilon = l - u_{n_0}$ في (1) نحصل على<br>$\exists n_1 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow u_{n_0} < u_n$<br>و بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة فإن $n > n_0 \Rightarrow u_n \leq u_{n_0}$<br>من أجل $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ فإن $u_{n_0} < u_n$ و $u_{n_0} \geq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N} : n > n_2 \Rightarrow$ وهذا تناقض.<br>بوضع $n = N_1 = N + 1$ في (1) نحصل على $\forall \varepsilon > 0; \exists N_1 \in \mathbb{N} : u_{N_1} < l + \varepsilon$ . |
| 0.5  | (3) صحيح.....<br>نفرض $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l > 0$ أي أن:<br>$\varepsilon = 3$ نحصل على $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 <  x - a  < \delta \Rightarrow  f(x) - l  < \varepsilon$   |
| 0.25 | $\exists \delta > 0 : 0 <  x - a  < \delta \Rightarrow  f(x) - l  < l$<br>$\Rightarrow 0 < f(x) < 2l$<br>إذن $\exists \delta > 0; \forall x \in ]a - \delta, a[ \cup ]a, a + \delta[ : f(x) > 0$   |
| 0.5  | (4) صحيح.....  |
| 0.25 | إذا كان التابع $f$ مستمر عند 0 فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ و منه فإن:   |
| 0.5  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$   |
| 0.5  | <b>التمرين الثاني (8 نقاط):</b>  |
| 0.5  | (1) أ) $f'(x) = -2x < 0$ ، $\forall x \in [0; 1]$ متناقص تماما على المجال $[0; 1]$ .   |
| 0.5  | لدينا: $x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(0) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$  |
| 0.5  | ب) $\forall x \in [0; 1] : f \circ f(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = -x^4 + 2x^2$   |
| 0.5  | $x = f \circ f(x) \Leftrightarrow x = -x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1)$<br>$\Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$  |

|        |  |
|--------|--|
| 1      | $\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = 1 \text{ أو } x = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \text{ أو } x = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ <p>و منه <math>\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \notin I\right). S = \left\{0, 1, \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right\}</math></p> <p>(ج) <math>u_3 = \frac{207}{256} = 0.80859</math> ، <math>u_2 = \frac{7}{16} = 0.4375</math> ، <math>u_1 = \frac{3}{4}</math></p> <p>نستعمل البرهان بالتراجع: <math>0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1</math></p>   |
| 3(0.5) | <p>فرض <math>0 \leq u_n \leq 1</math> و منه <math>f(1) \leq f(u_n) \leq f(0)</math> أي أن <math>0 \leq u_{n+1} \leq 1</math>.</p> <p>(أ) <math>\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n)</math></p> <p>(ب) بما أن <math>f</math> متناقص فإن <math>f \circ f</math> متزايد إذن المتتاليتين <math>(v_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> و <math>(w_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> رتبتين تماما.</p> <p>بما أن المتتاليتين <math>(v_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> و <math>(w_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> رتبتين و محدودتين فهما متقاربتين.</p> <p>(ج) إن نهايتي <math>(v_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> و <math>(w_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> هما حلتي المعادلة <math>x = f \circ f(x)</math> و منه</p> |
| 0.5    | $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \leftarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \leftarrow (v_1 = u_2 = \frac{7}{16} < v_0 = u_0 = \frac{1}{2})$   |
| 0.5    | $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$   |
| 0.5    | <p>بما أن المتتاليتين الجزئيتين <math>(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}</math> و <math>(u_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}</math> متقاربتين نحو نهايتين مختلفتينهما 0 و 1 على الترتيب فإن المتتالية <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> متباعدة.</p>   |
| 0.5    | <p><b>التمرين الثالث (7 نقاط):</b></p> <p><math>D_f = \mathbb{R}</math> (1)</p>  |
| 0.5    | <p>(أ) (2) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x^2+1}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(x^2+1)} = \frac{1}{3}</math></p>   |
| 2      | <p>(ب) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{\frac{x}{x^2+1}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{x^2+1}} = 1</math></p>  |
| 0.5    | <p><math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(x - \arctan x) - 0}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = 1</math></p>  |
| 0.5    | <p>إذن <math>f'(0 - 0) = f'(0 + 0) = 1</math> و منه <math>f</math> يقبل الاشتقاق عند 0.</p>  |
| 0.5    | <p>(أ) (3) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{x}{x^2+1}} - x) = +\infty - \infty</math> ح تع</p>  |
| 2      | $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{x}{x^2+1}} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{x^2+1}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{\frac{x}{x^2+1}} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$  |
| 0.75   | $= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x^2+1}} \frac{x^4 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 1$   |
| 0.25   | <p>(ب) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1)) = 0</math></p>  |

0.25 | و منه فإن المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب للمنحنى البياني  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

## الامتحان الثاني

التمرين الأول: (12 نقطة)

(1) ليكن  $f$  تابع معرف على المجال  $I = ]\frac{1}{2}; 2]$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$

(أ) (1.5+1 نقطة) ادرس اتجاه تغير التابع  $f$  ثم استنتج أن:  $\forall x \in I : f(x) \in I$ .

(ب) (1 نقطة) بين أن:  $\forall x \in I : f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x}{x+2} \left(x - \frac{1}{2}\right)$ .

(ج) (1.5 نقطة) استنتج أن:  $\forall x \in I : f(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)$ .

(2) لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  حيث:  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = f(u_n) \forall n \in \mathbb{N}$ .

(أ) (1 نقطة) أحسب  $u_1, u_2$ . (ب) (1 نقطة) أثبت أن:  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} < u_n \leq 2$ .

(ج) (1 نقطة) استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ . (د) (1+1 نقطة) بين أن  $(u_n)$  متقاربة ثم احسب نهايتها  $l$ .

(3) (أ) (0.5 نقطة) بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(u_n - \frac{1}{2}\right)$ .

(ب) (1+0.5 نقطة) استنتج أن:  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم عين أصغر عدد طبيعي  $n$  حيث:  $u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1000}$ .

التمرين الثاني: (8 نقاط) (الأسئلة 1 و 2 و 3 مستقلة).

(1) (1.5 نقطة) باستعمال نظرية التزايد المتناهية أثبت أن:  $\forall x > 0 : \ln(x+1) < x$ .

(2) ليكن التابع  $f$  حيث  $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - \sin x}{x \ln(x+1)}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

(أ) (1 نقطة) عين مجموعة تعريف  $f$ .

(ب) (2+0.5 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{x \ln(x+1)}$ ، هل  $f$  مستمر عند 0؟

(3) ليكن التابع  $g$  المعرف على  $]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$  بـ  $g(x) = x^2 \ln \frac{x+1}{x}$  وليكن  $(C_g)$  تمثيله البياني.

(أ) (2 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال بين أن:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}$ .

(ب) (1 نقطة) استنتج أن  $(C_g)$  يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار  $\infty$  يطلب تعيين معادله له.

## الإجابة النموذجية مع سلم التقييط

|  |  |
|--|--|
| 0.5  | <b>التمرين الأول:</b>  |
| 0.5  | $f'(x) = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$ (أ) (1)   |
| 0.5  | منه $x^2 + 4x - 1 = 0$ , $\Delta = 20$ , $x_1 = -\sqrt{5} - 2$ , $x_2 = \sqrt{5} - 2$  |
| 0.5  | لدينا $\forall x \in I: f'(x) > 0$ أي أن $f$ متزايد تماما على المجال $I$ .   |
| 0.5  | لدينا $x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < f(x) \leq f(2) \Rightarrow \frac{1}{2} < f(x) \leq 2$  |
| 0.5  | $\frac{5}{4} \leq 2$   |
| 1  | $\Rightarrow f(x) \in I$   |
| 1  | (ب) $f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^2+1}{x+2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}x}{x+2} = \frac{x}{x+2} \left(x - \frac{1}{2}\right)$   |
| 1  | (ج) لدينا $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$ و منه  |
| 1  | $\frac{1}{2} < x \leq 2 \Rightarrow 1 - \frac{2}{\frac{1}{2}+2} < 1 - \frac{2}{x+2} \leq 1 - \frac{2}{2+2} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{x}{x+2} \leq \frac{1}{2}$                             |
| 2(0.5)   | (أ) (2) $u_2 = \frac{41}{52}$ , $u_1 = \frac{5}{4}$  |
| 0.5  | (ب) $\frac{1}{2} < u_0 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 2 \leq 2$  |
| 0.5  | $\frac{1}{2} < u_n \leq 2 \xrightarrow{\text{من السؤال (1) أ}} \frac{1}{2} < f(u_n) \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 2$   |
| 1  | (ج) بما أن $f$ متزايد تماما و $u_1 < u_0$ فإن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.   |
| 1  | (د) بما أن $(u_n)$ متناقصة تماما و محدودة من الأدنى فهي متقاربة.   |
| 1  | نفرض أن $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ ، $\ell$ هي حل للمعادلة $f(x) = x$ .  |
| 0.5  | $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+2} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$   |
| 0.5  | (3) (أ) من السؤال (1) (ج) لدينا  |
| 0.5  | $u_{n+1} - \frac{1}{2} = f(u_n) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(u_n - \frac{1}{2}\right)$   |
| 0.5  | (ب) $0 < u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  |
| 0.5  | $\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$   |
| 0.5  | $0 < u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ |
| 0.5  | حتى يكون $u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1000}$ يكفي اختيار $\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{1000}$ و منه   |
| 0.5  | $\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n > \frac{\ln^3 + \ln 1000}{\ln 2} \cong 10.55$   |
| 0.5  | أصغر قيمة لـ $n$ هي 11.  |
| <b>التمرين الثاني (8 نقاط):</b>  |  |
| (1) بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على التابع $f(x) = \ln(x+1)$ و المجال $[0, x]$ حيث $x > 0$ . |  |

|        |  |   |
|--------|--|---|
| 0.5    | $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$ و منه   | $0 < c < x$   |
| 0.5    | $\ln(x + 1) = \frac{1}{c+1}x$  | $0 < c < x$   |
| 2(0.5) | $\ln(x + 1) < x$ و منه $c > 0 \Rightarrow \frac{1}{c+1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{c+1}x < x$ لدينا أيضا   |   |
| 1      |  | $.D_f = ]-1, +\infty[$ (أ) (2)  |
| 1+1    | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{x \ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)e^x - \cos x}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)e^x + \sin x}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}} = 1$ (ب)   |   |
| 0.5    |  | بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ فإن $f$ غير مستمر عند 0. |
| 4(0.5) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2}$ (أ) (3) |   |
| 0.5    | $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( g(x) - \left( x - \frac{1}{2} \right) \right) = 0$ (ب)   |   |
| 0.5    | ومنه فإن المستقيم ذو المعادلة $y = x - \frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى البياني $(C_g)$ بجوار $+\infty$   |   |

## الامتحان الثالث

التمرين الأول: (4 نقطة) أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل.

$$(1) \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\} = 1$$

(2) المعادلة  $x^2 + x - 1 = 0$  تقبل على الأقل حلا ناطقا.

(3) إذا كانت المتتاليتين  $(u_{2n})$  و  $(u_{2n+1})$  متجاورتان فإن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

(4) إذا كان  $f$  تابع مستمر على المجال  $[a, b]$ ، فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  من المجال  $[a, b]$  يحقق:

$$\forall x \in [a, b] : f(x) \leq f(c)$$

التمرين الثاني: (10 نقاط)

لتكن المتتاليتين  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفتين كما يلي:

$$0 < \text{حيث} \begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases} \quad a < b$$

(1) أثبت ما يلي:

$$(أ) \forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < v_n$$

(ب) المتتاليتين  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  رتبيتين.

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n - u_n \leq (د) \quad \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

(هـ) ماذا تستنتج؟

(2) نضع  $a = 1$  و  $b = 4$ .

(أ) أحسب  $u_1, v_1, u_2, v_2$ .

(ب) عين أصغر عدد طبيعي  $n$  حيث  $v_n - u_n \leq \frac{1}{100}$ .

التمرين الثالث: (6 نقاط)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1) - \sin x}{3x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ \frac{\sin x - x}{x^2} & , x < 0 \end{cases} \quad \text{ليكن التابع } f \text{ المعروف بـ}$$

(1) حدد مجموعة تعريف التابع  $f$ .

(2) باستعمال قاعدة لوبيتال احسب النهايتين  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \sin x}{x^2}$

(3) أدرس قابلية اشتقاق  $f$  عند  $0$ ، هل  $f$  مستمر عند  $0$  (علل).

## الإجابة النموذجية مع سلم التقييط

|     |  |
|-----|--|
| 0.5 | <p style="text-align: right;"><b>التمرين الأول(4 نقاط):</b></p> <p>(1) صحيح .....</p> <p><b>التعليل:</b> المتتالية <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> حيث <math>u_n = 1 - \frac{1}{n}</math> ، <math>\forall n \in \mathbb{N}^*</math> ، متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو <math>\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}</math> و منه فإن <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}</math></p> |
| 0.5 | <p>1.</p> <p>أي أن <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> محدودة، لكنها متباعدة لأن المتتاليتين الجزئيتين <math>(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}</math> و <math>(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}</math> متقاربتين نحو نهايتين مختلفتين هما 1 و -1 على الترتيب.</p>  |
| 0.5 | <p>(2) خطأ .....</p> <p><b>التعليل:</b> نفرض أن المعادلة تقبل حلا ناطقا أي من الشكل <math>x = \frac{p}{q}</math> حيث <math>p \in \mathbb{Z}</math> و <math>q \in \mathbb{N}^*</math> والعددان <math>p</math> و <math>q</math> أوليان فيما بينهما، بالتعويض في المعادلة نحصل على</p>  |
| 0.5 | $q = 1 \text{ أي } q \setminus p^2 \text{ و } \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} - 1 = 0 \Leftrightarrow q(q - p) = p^2$ <p>بالتعويض في المعادلة نحصل على <math>p^2 + p - 1 = 0</math> أو <math>p(1 + p) = 1</math> و هذا تناقض لأن العدد <math>p(1 + p)</math> زوجي.</p>  |
| 0.5 | <p>(3) صحيح .....</p> <p><b>التعليل:</b> بما أن المتتاليتين الجزئيتين <math>(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}</math> و <math>(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}</math> متجاورتين فهما متقاربتين نحو نهاية مشتركة <math>\ell</math> أي أن المتتالية <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> متقاربة ونهايتها <math>\ell</math>.</p>  |
| 0.5 | <p>(4) صحيح .....</p> <p>لأن كل تابع <math>f</math> مستمر على مجال مغلق <math>[a, b]</math> يدرك حده الأعلى مرة على الأقل على المجال <math>[a, b]</math> أي أنه</p>  |
| 0.5 | $\exists c \in [a, b]; \forall x \in [a, b] : f(x) \leq f(c)$ <p style="text-align: right;"><b>التمرين الثاني(10 نقاط):</b></p>  |
| 0.5 | <p>(1) أ) لدينا <math>u_0 &gt; 0</math> و <math>v_0 &gt; 0</math></p> <p>نفرض <math>u_n &gt; 0</math> و <math>v_n &gt; 0</math></p>  |
| 0.5 | <p><math>u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} &gt; 0</math> و <math>v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) &gt; 0</math></p> <p>لدينا أيضا <math>a &lt; b \Rightarrow u_0 &lt; v_0</math></p>  |
| 1   | <p>نفرض <math>u_n &lt; v_n</math> ولنبرهن أن <math>u_{n+1} &lt; v_{n+1}</math></p>   |
| 1   | $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - \sqrt{u_n v_n} = \frac{1}{2}(u_n - v_n)^2 > 0$ <p>(ب) <math>u_n \leftarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) &gt; 0</math> متزايدة تماما.</p>   |
| 1   | <p>تماما.</p> $u_n \leftarrow v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - v_n = \frac{1}{2}(u_n - v_n) < 0$ <p>تماما.</p>   |
| 1.5 | $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - \sqrt{u_n v_n} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) + u_n - \sqrt{u_n v_n} \rightarrow$ $= \frac{1}{2}(v_n - u_n) + \sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$ $\leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \quad (\text{لأن } \sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} < 0)$   |

|        |   |
|--------|---|
| 1      | <p>(د) لدينا <math>v_0 - u_0 = b - a \leq b - a</math></p> <p>نفرض <math>v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)</math> ونبرهن أن <math>v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a)</math>.</p>   |
| 1      | $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq \frac{1}{2} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a)$   |
| 4(0.5) | <p>(هـ) بما أن <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) \right) = 0</math> فإن <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0</math> نستنتج أن المتتاليين <math>(v_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> و <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> متجاورتين.</p> <p>(أ) <math>v_2 = \frac{9}{4}</math>, <math>u_2 = \sqrt{5}</math>, <math>v_1 = \frac{5}{2}</math>, <math>u_1 = 2</math></p> |
| 1      | <p>(ب) حتى يكون <math>v_n - u_n \leq \frac{1}{100}</math> يكفي أخذ <math>\left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - 1) &lt; \frac{1}{100}</math> و منه <math>n &gt; \frac{\ln 300}{\ln 2} = 8.22</math></p> <p>أصغر قيم <math>n</math> هي 9.</p> <p><u>التمرين الثالث (6 نقاط):</u></p>  |
| 1      | $D_f = \mathbb{R} \quad (1)$  |
| 1      | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} + \sin x}{2} = -\frac{1}{2} \quad (2)$   |
| 1      | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$   |
| 1      | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x - x}{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} = f'(0 - 0) \quad (3)$   |
| 1      | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \sin x}{3x^2} = -\frac{1}{6} = f'(0 + 0)$   |
| 1      | <p>إذن <math>f'(0 - 0) = f'(0 + 0) = -\frac{1}{6}</math> و منه <math>f</math> يقبل الاشتقاق عند 0.</p>  |

## قائمة المراجع

• سلسلة الرياضيات في الجامعة، التحليل، الجزء الثاني، ع. حميدة و ع. بيبي، مطبعة SPECTRAL، جبل الوحش- قسنطينة.

- Y. Bougrov et S. Nikolski, Cours de Mathématiques Supérieures, Editions Mir, Moscou, 1983.
- J.-M. Monier, Analyse PCSI-PTSI, Dunod, Paris 2003.
- N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Tome 1, Editions Mir, Moscou, 1980.
- K. Allab, Eléments d'Analyse, OPU, Alger, 1984.
- B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Cours d'analyse, Librairie Armand Colin, Paris, 1976.
- J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, tome 2, Edition Dunod, 1978.
- E. Azoulay et J. Avignant, Mathématiques. Tome1, Analyse. McGraw-Hill, 1983.
- S. Balac et F. Sturm, Algèbre et analyse: cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Presses Polytechniques et Universitaires, 2003.