

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI  
Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie  
Département de Mathématiques et Informatique

Numéro D'ORDRE : ... / ... / ...  
Numéro DE SÉRIE : ... / ... / ...

**THÈSE**  
Présentée Pour L'obtention Du Diplôme De:  
**DOCTORAT EN SCIENCES**

Thème

**Étude théorique et numérique des problèmes d'identification des systèmes  
gouvernés par des équations aux dérivées partielles**

Spécialité: Mathématiques  
Option: Mathématiques Appliquée

**Par: REZZOUG Imad**

Soutenu le 08/12/2014 à la salle de conférences de la faculté des sciences.  
Devant les membres du jury:

Mr	<b>MERAZGA Nabil</b>	Prof à l'université Larbi Ben M'Hidi, Oum el Bouaghi	<b>Président</b>
Mr	<b>AYADI Abdelhamid</b>	Prof à l'université Larbi Ben M'Hidi, Oum el Bouaghi	<b>Rapporteur</b>
Mr	<b>DJEZZAR Salah</b>	Prof à l'université de constantine .1.	<b>Examineur</b>
Mr	<b>REBIAI Salah Eddine</b>	Prof à l'université de Batna	<b>Examineur</b>
Me	<b>MILOUDI Yamina</b>	Maître de Conférences .A. à l'université d'Oran	<b>Examinatrice</b>

Année universitaire: 2014/2015

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>10</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
0.1 MODÈLE DISTRIBUÉ ABSTRAIT . . . . .	14
0.2 ANALYSE DES SYSTÈMES . . . . .	15
0.3 ANALYSE À TRAVERS LES ACTIONNEURS ET LES CAPTEURS . .	16
0.4 DE L'ANALYSE À L'ANALYSE RÉGIONALE . . . . .	16
0.5 PROBLÈMES INVERSESES . . . . .	18
0.6 LES PROBLÈMES MATHÉMATIQUES À DONNÉES INCOMPLÈTES .	20
0.7 CONTENU DU MÉMOIRE . . . . .	22
0.7.1 La première partie . . . . .	22
0.7.2 La deuxième partie . . . . .	23
<b>1 Analyse des systèmes distribués</b>	<b>25</b>
1.1 EQUATION D'ÉTAT . . . . .	25
1.1.1 Semi-groupes . . . . .	25
1.1.2 Transformation d'une EDP en équation d'état . . . . .	41
1.1.3 Equation d'état discrète . . . . .	45
1.2 CONTRÔLABILITÉ . . . . .	46
1.2.1 Description du système . . . . .	46
1.2.2 Un résultat préliminaire . . . . .	47
1.2.3 Contrôlabilité Exacte . . . . .	49
1.2.4 Contrôlabilité Faible . . . . .	52

1.2.5	Contrôlabilité faible à zéro . . . . .	56
1.2.6	Contrôlabilité aux Trajectoires . . . . .	57
1.2.7	Comparaison des différentes notions . . . . .	58
1.3	CONTRÔLABILITÉ RÉGIONALE . . . . .	59
1.3.1	Définition de la contrôlabilité régionale et caractérisation . . . . .	59
1.4	CONTRÔLE OPTIMAL . . . . .	64
1.5	CONTRÔLABILITÉ RÉGIONALE ET PÉNALISATION . . . . .	68
1.6	THÉORÈME DE PROLONGEMENT UNIQUE . . . . .	69
1.7	THÉORÈME DE HOLMGREN ET SES CONSÉQUENCES . . . . .	71
1.8	NOTION D'ACTIONNEUR . . . . .	72
1.8.1	Ponctuel fixe . . . . .	73
1.8.2	Ponctuel mobile . . . . .	73
1.8.3	Zone . . . . .	73
1.8.4	Filament . . . . .	74
1.8.5	Applications . . . . .	75
1.8.6	Actionneur stratégique . . . . .	77
1.9	DIFFICULTÉS . . . . .	78
1.9.1	Sur le choix de l'espace d'état . . . . .	78
1.9.2	Sur le nombre d'actionneurs . . . . .	79
1.10	CONTRÔLE ASSURANT LE TRANSFERT RÉGIONAL . . . . .	80
1.10.1	Approche générale . . . . .	81
1.11	OBSERVABILITÉ . . . . .	82
1.11.1	Observabilité exacte et faible . . . . .	84
1.11.2	Dualité . . . . .	85
<b>2</b>	<b>Les Sentinelles</b>	<b>88</b>
2.1	INTRODUCTION . . . . .	88
2.2	POSITION DES PREMIERS PROBLÈMES MODÈLES . . . . .	93
2.2.1	L'équation d'état . . . . .	93
2.2.2	Termes manquants et termes de pollutions . . . . .	93
2.2.3	Espace d'observation du Système . . . . .	94

2.3	MOINDRES CARRÉS . . . . .	97
2.4	MÉTHODE DES SENTINELLES . . . . .	98
2.5	SENTINELLE CONTINUE . . . . .	98
2.5.1	Etat Adjoint . . . . .	102
2.5.2	Construction de la sentinelle . . . . .	104
2.5.3	Furtivité . . . . .	112
2.6	SENTINELLE RÉGIONALE . . . . .	112
2.6.1	Informations fournie par la sentinelle . . . . .	114
2.6.2	Construction d'une sentinelle . . . . .	115
2.7	SENTINELLE PONCTUELLE (DISCRÈTE) . . . . .	122
2.8	SENTINELLE FAIBLE . . . . .	124
2.8.1	Présentation du problème . . . . .	124
2.8.2	Sentinelle faible . . . . .	125
2.9	SENTINELLE DISCRIMINANTE . . . . .	127

## **I Application des sentinelles à l'identification d'une partie de la frontière inconnue 132**

<b>3</b>	<b>Application des sentinelles à l'identification d'une partie de la frontière inconnue</b>	<b>133</b>
3.1	INTRODUCTION . . . . .	133
3.2	PRÉSENTATION DU PROBLÈME . . . . .	135
3.3	APPLICATION DE LA MÉTHODE DES SENTINELLES . . . . .	138
3.3.1	Etat Adjoint . . . . .	139
3.3.2	Construction de la sentinelle . . . . .	141
3.3.3	Usage d'une sentinelle: Identification d'une partie de la frontière inconnue . . . . .	145
3.4	RÉULTATS NUMÉRIQUES . . . . .	147

<b>4</b>	<b>Sentinelles faibles pour les systèmes distribués à termes de pollution</b>	
	<b>dans la frontière</b>	<b>152</b>
4.1	PRÉSENTATION DU PROBLÈME . . . . .	153
4.2	ÉTAT ADJOINT . . . . .	155
4.2.1	La condition “d’insensibilité” . . . . .	155
4.2.2	L’état adjoint . . . . .	156
4.3	CONSTRUCTION DE LA SENTINELLE FAIBLE . . . . .	157
4.3.1	Équivalence entre le problème de sentinelle faible et le problème de contrôlabilité faible . . . . .	157
4.4	EXISTENCE DE CONTRÔLE OPTIMAL . . . . .	161
4.5	ESTIMATION DU TERME DE POLLUTION . . . . .	164
<b>5</b>	<b>Sentinelles faibles pour les systèmes distribués à termes manquants ou</b>	
	<b>de pollution dans les conditions aux limites</b>	<b>167</b>
5.1	ENONCÉ DU PROBLÈME . . . . .	167
5.1.1	Observation de l’état . . . . .	168
5.2	CONSTRUCTION DES SENTINELLES . . . . .	169
5.2.1	Généralités . . . . .	169
5.2.2	Etat adjoint . . . . .	170
5.2.3	Nouveau problème de type contrôlabilité . . . . .	171
5.2.4	La méthode de Pénalisation . . . . .	173
5.2.5	Système d’optimalité ( $\vartheta \rightarrow 0$ ) . . . . .	173
5.2.6	Unicité et nouveaux espaces fonctionnels . . . . .	174
5.2.7	Construction des sentinelles . . . . .	176
5.3	ESTIMATION DU TERME DE POLLUTION . . . . .	176
<b>6</b>	<b>Domaines à données manquantes</b>	<b>178</b>
6.1	PRÉSENTATION DU PROBLÈME . . . . .	178
6.2	APPLICATION DE LA MÉTHODE DES SENTINELLES . . . . .	181
6.3	ÉTAT ADJOINT . . . . .	184

6.3.1	La condition d'insensibilité . . . . .	184
6.3.2	L'état adjoint . . . . .	184
6.4	SYSTÈME D'OPTIMALITÉ . . . . .	185
6.5	NOUVEAUX ESPACES FONCTIONNELS . . . . .	187
6.6	FURTIVITÉ . . . . .	190
<b>7</b>	<b>Sentinelles pour les systèmes de NAVIER-STOKES à l'identification des pollutions</b>	<b>192</b>
7.1	ORIGINES PHYSIQUES DU PROBLÈME DE STOKES . . . . .	192
7.2	ÉNONCÉ DU PROBLÈME . . . . .	193
7.2.1	Observation de l'état . . . . .	194
7.3	CONSTRUCTION DES SENTINELLES . . . . .	194
7.3.1	Généralités . . . . .	194
7.3.2	Etat adjoint . . . . .	196
7.3.3	Nouveau problème de type contrôlabilité . . . . .	196
7.3.4	Pénalisation . . . . .	197
7.3.5	Système d'optimalité ( $\vartheta \rightarrow 0$ ) . . . . .	198
7.3.6	Unicité et nouveaux espaces fonctionnels . . . . .	199
7.3.7	Construction des sentinelles . . . . .	200
7.4	ESTIMATION DU TERME DE POLLUTION . . . . .	201
	<b>Conclusion générale</b>	<b>202</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>204</b>

## DÉDICACE

Je dédie ce travail à ceux qui ont été toujours là avec leur patience et amour et qui sont mes symboles dans la vie.

A Mes Parents “ma mère, ma mère, ma mère, mon père”.

A mon épouse “Djihad” pour ses encouragements.

A mes frères et sœurs pour leur soutien moral.

A toute ma famille “Rezzoug et Khiari”.

A toutes mes amies et mes collègues, en particulier l'ingénieur Houhamdi Izzeddine.

## REMERCIEMENTS

Au début et avant tous, je rends grâce à dieu tous puissant qui m'a aider à terminer ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse le professeur AYADI Abdelhamid pour son aide précieuse et ses encouragements qui ont contribué à l'aboutissement de cette thèse et de m'avoir suivie dans mes recherches.

Je tiens à remercier le professeur MERAZGA Nabil pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse, qu'il soit assuré de notre profond respect.

Je remercie également MILOUDI Yamina et DJEZZAR Salah et REBIAI Salah Eddine d'avoir accepté d'être membre du jury.

Je remercie vivement toute personne qui a de près ou de loin contribué à l'élaboration de ce travail, en particulier le chercheur Zaher Amer et l'ingénieur Beghou Salah.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues du département de mathématiques de l'université d'oum el bouaghi et l'équipe du laboratoire des systèmes dynamiques et contrôle.

## ملخص

في الجزء الأول من المذكرة، نعتبر معادلة الحرارة في ميدان جزء من حافته مجهول، و منه الطريقة المتبعة من أجل التعرف على هذا الجزء المجهول من الحافة مؤسسة و مبنية على مفهوم جديد يعرف بطريقة الحارس و ذلك اعتمادا على نظرية المراقبة الجزئية لانتشار الحرارة داخل الميدان. إذا كان انتشار الحرارة يخضع لقانون غير خطي فإن استخدام طريقة النقطة الثابتة كطريقة مساندة للطريقة الأولى يؤدي إلى الحل المرغوب. كما أن خاصية التقلص لطريقة النقطة الثابتة تستخلص مباشرة من تعريف الحارس الجهوي و منه نتيجة التقارب المحلي لمسألة النقطة الثابتة تعرف الجزء المجهول من الحافة. و في الأخير، النتائج العددية مقدمة و معطاة.

في الجزء الثاني من المذكرة، تطرقنا إلى إدخال مفهوم الحارس في دراسة المسائل ذات المعطيات غير التامة. إن بناء هذا الحارس يتوقف على وجود وحدانية الحل للمسائل المرافقة التي تكون مراقبتها حقيقية. في هذا العمل تقترح إدخال مفهوم جديد للحارس (الحارس الضعيف) لدراسة المسائل التي تكون مراقبتها مراقبة ضعيفة. إن هذا المفهوم الجديد للحارس يسمح لنا بتقييم حد التلوث في المسائل التي تكون المعطيات الأولية فيها غير تامة. خلال هذا العمل لا نهتم ببرهنة الوجود و الوحدانية و الوسائل المرافقة.

الكلمات المفتاحية: الحارس، المراقبة الضعيفة، المسائل التوزيعية، حد التلوث.

## RÉSUMÉ

Dans la première partie, on considère l'équation de la chaleur dans un domaine dont une partie de la frontière est inconnue. Une méthode pour l'identification de cette partie inconnue à partir d'une observation partielle de la solution est présentée. Elle est basée sur la méthode des sentinelles. La méthode montre l'existence de sentinelles approchées sur le système linéarisé et construit une méthode de point fixe. Pour montrer l'existence des sentinelles linéarisée le problème d'identification est reformulé en un problème de contrôlabilité approchée dont la solution est obtenue par une technique d'analyse convexe. La propriété de contraction du point fixe découle directement de la définition des sentinelles. Enfin, des résultats numériques sont présentés.

Dans la deuxième partie, La modélisation des problèmes environnementaux conduit à des systèmes mathématiques à données manquantes. C'est le cas par exemple des problèmes de météorologie où l'on ne connaît jamais la donnée initiale. Nous sommes concernés dans ce travail, par l'identification des termes de pollution présents dans l'équation d'état d'un système dissipatif à donnée initiale incomplète. Dans ce but, la méthode des sentinelles de J. L. Lions [29]. Ces sentinelles sont construites à partir de l'existence de la contrôlabilité exacte du système adjoint. Dans ce travail, on se propose de définir la notion "des sentinelles faibles" pour étudier l'estimation de la source

(terme de pollution) du système parabolique faiblement contrôlable, indépendamment de la donnée initiale (terme manquant). Dans cette étude on se place dans un cadre fonctionnel assurant l'existence et l'unicité de l'état du système.

**Mots-clés:** Sentinelle, contrôlabilité faible, systèmes distribués, terme de pollution.

## ABSTRACT

In the first part, A method for the identification of a part of the boundary in a diffusion problem is proposed. It is based on sentinels. A linearization scheme is used and the local convergence is proved. The method defines and proves the existence of approximate sentinels for the linearized system and builds a fixed point method. To prove the existence of the linearized sentinels, the problem is reformulated as an approximate control problem and solved by a convex analysis method. The contraction property of the fixed point method follows straightforward from the definition of approximate the sentinels. Finally numerical examples are presented.

In the second part, Modelling environmental problems leads to mathematical systems with missing data. For instance, weather problems have generally missing initial conditions. The paper is concerned with identifying pollution terms arising in the state equation of some dissipative system with incomplete initial condition. To this aim the so-called sentinel method of J. L. Lions [29]. The construction of sentinel is based on the existence and uniqueness of the adjoint system solution which is exactly controllability. In this work we propose to given an author definition of the notion of sentinel (weakly sentinel) for studied the author system with incomplete data which the adjoint system is weakly controllable. Precisely this knew notion of sentinel permeated to estimate the pollution terms in the parabolic system independently of missing terms in data. In this work, we are not interested to prove the existence and uniqueness of the solution of system.

**Key words:** sentinel, weakly controllability, disturbed system, pollution term.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 93B05 (Controllability), 92D40 (Ecology), 93C20 (Control systems governed by PDE).

# Notations

$A$	Opérateur linéaire continue;
$B$	Opérateur linéaire continue;
$T$	Opérateur linéaire continue;
$\Delta$	Laplacien, $\left(\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$ ;
$\nabla$	Le gradient, $\left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right)$ ;
$g$	Opérateur de trace;
$\overline{A}$	Fermeture de $A$ ;
$I$	Opérateur identité;
$A^*$	Adjoint de $A$ ;
$A^c$	Complémentaire de $A$ ;
$A^\perp$	Orthogonale de $A$ ;
$A^{-1}$	Inverse de $A$ ;
$A \subset B$	C'est-à-dire $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ ;
$\Phi(t) \in \mathcal{SG}(M, \omega)$	Alors qui vérifie $\ \Phi(t)\  \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$ ;
$V, \mathcal{U}, E$	Sont des espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ ;
$\mathcal{L}(V, E)$	Espace des applications linéaires continues de $V$ dans $E$ ;
$\mathcal{L}(\mathcal{U})$	$= \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ ;
$E^*$	Dual topologique de $E$ ;
$L^2(\Omega)$	Espace des fonctions de carré intégrable sur $\Omega$ ;
$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$	C'est l'espace des fonctions à support compact dans $\Omega$ ;
$H_0^1(\Omega)$	Est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ ;
$H^{-1}(\Omega)$	Dual de $H_0^1(\Omega)$ ;

$H^m$	Espace de Sobolev. ( $m \in \mathbb{N}$ );
$\mathcal{C}_c(\Omega)$	Fonctions continues à support compact dans $\Omega$ ;
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Fonctions $k$ fois continûment différentiables sur $\Omega$ ( $k \in \mathbb{Z}_+$ );
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	$= \bigcap \mathcal{C}^k(\Omega)$ .telle que $k \geq 0$ ;
$\mathcal{C}_c^k(\Omega)$	$= \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$ ;
$\text{Im}(A)$	Image de $A$ ;
$\ker(A)$	Noyau de $A$ ;
$\rho(A)$	L'ensemble résolvante de $A$ ;
$I = [0, T]$	Intervalle de temps;
$\mathcal{Q}$	Le cylindre de $\Omega \times ]0, T[$ , $T$ fini;
$\Sigma = \Gamma \times ]0, T[$	La frontière latérale;
$\sigma(A)$	Spectre de $A$ ;
$\phi$	Ensemble vide;
$\mathcal{D}(A)$	Domaine de définition de $A$ ;
$\overline{\mathcal{D}(A)}$	L'adhérence de l'ensemble $\mathcal{D}(A)$ ;
$\mathcal{O}$	Observatoire, (une partie de $\Omega$ ).
$\Omega$	Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ , de frontière régulière;
$\Omega_\alpha$	La déformation du domaine $\Omega$ ;
$\partial\Omega = \Gamma$	Frontière de $\Omega$ ;
$\text{Supp}(g)$	Support de la fonction $g$ ;
$\mathcal{S}(\lambda, \tau)$	La sentinelle;
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	Dérivé normale extérieure de $u$ ;
$\chi$	Fonction caractéristique;
$D_i$	Dérivé au sens des distributions;
$D_\alpha S$	Le différentielle de $S$ ;
$F^*$	Fonction conjuguée de $F$ ;
$R(\lambda)$	La transformée de Laplace du semi groupe $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$ ;
$t$	Variable qui désigne le temps;
$x$	Vecteur de $\mathbb{R}^n$ ;
$\alpha$	Vecteur de $\mathbb{R}^n$ ;

## *Notations*

---

$\beta$	Multi indice de $\mathbb{N}^n$ ;
$\lambda\hat{\xi}$	Terme de pollution;
$\tau\hat{z}_0$	Terme de manquant;
$\eta$	La normale extérieure;
$p.p$	Presque partout;
$resp$	Respectivement;

# Introduction

Depuis la fin des années 70, les problèmes de l'environnement ont suscité l'attention de nombreux scientifiques et stimulé un grand nombre de recherches, la physique, la biologie, l'écologie et beaucoup d'autres. Dans les sciences de l'environnement il existe maintenant une large littérature dédiée (et motivée par) des processus qui ont des conséquences sur le réchauffement de la planète. Parmi les problèmes sérieux, ceux de la désertification, de la déforestation, de la pollution et des catastrophes dues à des risques technologiques ou naturels.

La modélisation dans le domaine de l'environnement constitue actuellement un domaine de recherche croissant rapidement, particulièrement pour les écologistes et les biologistes, et de nombreuses études ont été conduites ces dernières années. Le point essentiel dans la modélisation consiste en une meilleure compréhension du phénomène considéré, prenant en compte ses propres caractéristiques et visant la prédiction de l'état futur du système ainsi modélisé.

De nombreux problèmes relatifs à la dynamique des populations ont été modélisés par des systèmes d'équations différentielles; ce sont des systèmes dits localisés. Une telle description est utile pour certains objectifs qui concernent, en particulier, l'évolution de la population. Toutefois, de nombreuses applications, en particulier dans les sciences de l'environnement, nécessitent une approche qui prend en compte l'évolution spatio-temporelle du système. Ces systèmes sont alors modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP); ce sont les modèles dits à paramètres répartis ou distribués (SPR).

Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes dans lesquels les variables

et les divers paramètres peuvent dépendre du temps et de l'espace. Ils comportent des entrées et des sorties qui permettent au système de communiquer avec son environnement extérieur. Les entrées-sorties dépendent aussi des variables de temps et d'espace.

Un long chemin a été parcouru des systèmes localisés aux systèmes distribués, avec une abondante littérature concernant ces derniers.

Généralement on peut dire que la recherche en théorie des systèmes concerne, sommairement, une des étapes suivantes

$$\text{Modélisation} \rightarrow \text{Analyse} \rightarrow \text{Contrôle}$$

Mais il y a, évidemment, plusieurs autres aspects tels que les études mathématiques ou numériques, ou encore les problèmes d'implémentation ou de mise en œuvre sous-jacents à chacune de ces étapes.

## 0.1 MODÈLE DISTRIBUÉ ABSTRAIT

Les systèmes distribués linéaires sont généralement décrits par une équation opérationnelle, appelée équation d'état, qui peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} ; 0 < t < T \quad (0.1.1)$$

augmentée d'une équation (ou fonction) de sortie

$$y = Cz(t) \quad (0.1.2)$$

Ici  $z(t)$  désigne l'état du système à l'instant  $t$ ,  $z_0$  est l'état initial et  $u(t)$  est le contrôle. Les opérateurs  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sont donnés et décrivent respectivement la dynamique du système, les paramètres et les structures des entrées et des sorties du système.

L'étude de l'équation (0.1.1) augmentée de la sortie (0.1.2) nécessite la détermination du cadre fonctionnel adapté aux objectifs souhaités dans l'étude. Pour cela, avec (0.1.1) et (0.1.2), on doit choisir et considérer un espace d'état, un espace des contrôles et un espace des observations. En général, ce sont des espaces de Hilbert.

Contrairement au cas des systèmes localisés, ces espaces sont de dimension infinie. Nous considérons, plus loin, les hypothèses nécessaires assurant l'existence, l'unicité et la régularité des solutions de (0.1.1).

Les notions qui seront introduites dans les chapitres de thèse qui suivent seront finement explorées dans le cas des systèmes distribués gouvernés par (0.1.1) et (0.1.2).

## 0.2 ANALYSE DES SYSTÈMES

L'analyse des systèmes consiste en un ensemble de concepts permettant une classification des systèmes en vue d'une meilleure compréhension de leur fonctionnement. Dans le cas des systèmes distribués, de nombreux concepts ont été introduits et explorés, permettant de meilleures stratégies de contrôle pour ces systèmes.

Parmi ces concepts, ceux de la contrôlabilité, de l'observabilité ou encore de la stabilité ont généré une large littérature, essentiellement dans le cas des systèmes linéaires.

Rappelons qu'un système est dit contrôlable si, pour tout état désiré  $z_d$  dans l'espace d'état, il existe un contrôle  $u$  qui permet de transférer le système, depuis son état initial  $z_0$  à l'instant  $t = 0$  vers l'état désiré  $z_d$  à un instant final  $t = T$ .

Cette définition peut être exprimée par la surjectivité d'un opérateur de contrôlabilité. Il existe deux points importants relatifs à la contrôlabilité. Le premier concerne une caractérisation de l'exacte contrôlabilité par une inégalité qui peut être exploitée pour les applications. Le deuxième, une condition suffisante pour l'exacte contrôlabilité, concerne la compacité d'un certain opérateur qui caractérise la non-contrôlabilité du système. Un concept approché, la faible contrôlabilité, introduit pour les systèmes qui ne sont pas exactement contrôlables, est mieux adapté au cas des systèmes avec des espaces d'état de dimension infinie, comme c'est le cas des systèmes distribués. La faible contrôlabilité consiste à déterminer un contrôle qui transfère le système vers un état très voisin de l'état désiré. Ceci peut s'exprimer mathématiquement par le fait que l'image de l'opérateur de contrôle est partout dense dans l'espace d'état. Les notions d'exacte et de faible observabilité ont été explorées, de façon identique, par dualité. L'observabilité consiste à reconstruire, en temps fini, l'état du système à

partir de la donnée de la dynamique du système et de la fonction de sortie. Ceci se traduit mathématiquement par l'injectivité d'un certain opérateur d'observation. Comme pour la contrôlabilité, de nombreuses caractérisations et résultats ont été établis pour l'observabilité des systèmes. Dans le cas où l'horizon de temps est infini, le concept de détectabilité a été introduit et de nombreuses relations entre l'observabilité et la détectabilité ont été explorées. La théorie de l'observabilité a également été étendue au cas des systèmes distribués. Comme pour la contrôlabilité, en temps fini, la notion de stabilisabilité a été introduite et explorée. Elle consiste en l'existence d'un contrôle en contre-réaction (feedback) qui les résultats connus pour les systèmes localisés peuvent être étendus au cas des systèmes distribués. Toutefois il faut noter que, dans le cas distribué, la contrôlabilité n'implique pas en général la stabilisabilité, contrairement au cas localisé.

### **0.3 ANALYSE À TRAVERS LES ACTIONNEURS ET LES CAPTEURS**

Les actionneurs et les capteurs peuvent être caractérisés par leur localisation spatiale, leur distribution et leur nombre. Ceci fournit implicitement une certaine importance au fait qu'il existe des régions (sous-domaines) qui peuvent être importantes alors que d'autres le sont moins. Le concept de stabilisabilité est lui aussi connecté aux capteur et actionneurs pour certaines classes de systèmes distribués. Les concepts de stabilité et de rayon de stabilité ont également été connectés aux entrées-sorties, utilisant une approche fréquentielle. L'introduction des actionneurs et des capteurs dans l'analyse des systèmes distribués a considérablement enrichi les concepts et rendu l'analyse plus appropriée pour les applications.

### **0.4 DE L'ANALYSE À L'ANALYSE RÉGIONALE**

L'introduction des notions de capteurs et d'actionneurs a également contribué au développement de l'analyse des systèmes dans le sens suivant. La localisation et la

structure des capteurs et des actionneurs amènent à penser que la géométrie du domaine sur lequel est défini le système n'est pas uniforme, avec des zones d'actions et des zones de mesures. C'est ainsi que l'analyse elle-même peut être explorée d'un point de vue spatial en ne considérant pas la totalité du domaine mais seulement des régions privilégiées où un objectif doit être réalisé. Depuis le début des années 90 et suite à des motivations d'ordre pratique, Afifi, El Jai et Zerrik (voir [17]) ont introduit et étudié ce qui a été appelé l'analyse régionale. L'analyse régionale vise à explorer des concepts ou développer des contrôles sur un système distribué avec un objectif à réaliser seulement sur une région cible donnée. Ainsi le système est défini sur un domaine globale  $\Omega$ , alors que les objectifs sont à atteindre sur une région  $\omega$ , avec  $\omega \subset \Omega$ . La région  $\omega$  peut également être une partie de la frontière de  $\Omega$ ,  $\omega \subset \partial\Omega = \Gamma$ ; on parle alors d'analyse régionale frontière. Avec ces considérations, un nouveau champ de recherche a été ouvert. Les concepts usuels de contrôlabilité et d'observabilité ont été reconsidérés d'un point de vue régional, dans le cas des systèmes linéaires distribués. En effet, si l'on considère l'évolution spatiale d'un système distribué évoluant dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , et soit dans  $\omega, \omega \subset \Omega$ , un état désiré donné. La contrôlabilité régionale (ou  $\omega$ -contrôlabilité) consiste à transférer le système, à partir de son état initial, vers l'état désiré, avec l'objectif que cet état soit atteint dans  $\omega$ . Cette idée est importante puisqu'il a été montré qu'il existe des systèmes qui ne sont pas contrôlables mais seulement régionalement contrôlables. De plus, il est démontré que le transfert du système vers une cible régionale coûte moins cher que dans le cas global. De façon similaire au cas usuel, un concept plus faible, la contrôlabilité régionale faible, a été développé. Une approche duale a conduit à des résultats semblables pour l'observabilité.

L'analyse régionale, en relation avec les actionneurs et les capteurs, a conduit à l'introduction et à l'étude de nouveaux concepts. C'est le cas des sources et de leur détection qui a été explorée par L. Afifi [17] dans un cadre régional dans le même livre. La détermination de sources inconnues, basée sur l'utilisation de capteurs, dits espions, a été considérée; source et capteur ayant une existence régionale. Ceci a alors conduit naturellement au concept de remédiabilité qui consiste en une compensation spatiale, quand le contrôle agit dans une région  $\mathcal{D}_1$  pour compenser l'effet d'une perturbation

agissant dans une région  $\mathcal{D}_2$  connue ou inconnue.

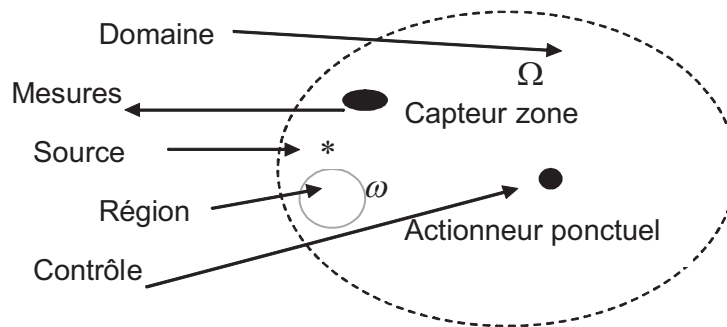


Fig (0.1.1): Région, source, actionneur et capteur

## 0.5 PROBLÈMES INVERSES

L'analyse mathématique et numérique des problèmes inverses dans les équations différentielles et aux dérivées partielles ainsi que leurs applications aux problèmes socio-économiques et industrielles, constitue le cœur du thème de recherche "Problèmes Inverses". Une recherche qui se concentre sur l'analyse mathématique et numérique des systèmes gouvernées par des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. Cette recherche se focalise sur les problématiques liées aux problèmes inverses (identifiabilité, identification numérique, stabilité). Ce sujet est en plein essor tant au niveau national qu'international. De nombreux problèmes de la physique, chimie, de la biologie et de la géophysique sont modélisés par des systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles qui décrivent le comportement temporel ou spatio-temporel des inconnues du modèle. La résolution de ces équations constitue ce que l'on appelle le problème direct. Cela ne peut se faire que si tous les paramètres du système sont connus: les conditions initiales et aux limites, les coefficients intervenant dans les équations, ainsi que le domaine spatial.

Dans la pratique certains paramètres sont inconnus ou partiellement connus (coefficients des cinétiques de modèles biochimiques ou aérodynamiques, coefficients de diffusion dans des équations paraboliques, fissures ou obstacles dans des problèmes elliptiques comme l'électro-encéphalographie (EEG) **ou dans des équations paraboliques**

**de pollution de rivière, certaines conditions initiales en météorologie, certaines conditions aux limites**, etc). La détermination de ces paramètres à partir de données expérimentales constitue ce que l'on appelle le problème inverse. Sa résolution fournit une information primordiale à l'expérimentateur qui, en général, possède un modèle de son système, mais avec une large incertitude sur les paramètres.

La difficulté principale du problème inverse est qu'il est mal posé dans le sens d'Hadamard. Principalement les deux points suivants lui font défaut:

- L'unicité de la solution: identifiabilité.
- Sa dépendance continue par rapport aux données: stabilité.

L'absence de la stabilité est problématique, en particulier en vue d'une résolution numérique. Ce qui implique des méthodes dites de régularisation. La non-unicité est un problème sérieux. Dans le cas de plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires. Les thèmes abordés sont:

\* Identifiabilité structurelle de modèles paramétriques représentés par des systèmes d'équations différentielles non-linéaires ou non, éventuellement avec retard.

\* Estimation numérique des paramètres des modèles précédents, extension aux équations aux dérivées partielles.

- \* Méthode des équations intégrales et application.
- \* Problèmes inverses de sources.
- \* Optimisation de forme et problème inverse de conductivité.
- \* Contrôle actif de dispositifs de transport de fluides.

**Les domaines d'application sont:**

- Biomédical: localisation de sources épileptiques en EEG, ...
- **Environnement: identification de sources de pollution.**
- **Aérospatiale: identification de sources de bruit.**
- **Aéronautique: identification de coefficients aérodynamiques.**
- **Pharmacocinétique: identification de coefficients.**
- Energie: calcul d'écoulements de pétrole dans un réservoir avec puits.

Les techniques utilisées par les chercheurs pour s'attaquer à ces problèmes vont de

l'analyse appliquée à l'analyse numérique.

## 0.6 LES PROBLÈMES MATHÉMATIQUES À DONNÉES INCOMPLÈTES

La modélisation de ces problèmes conduit à des systèmes mathématiques à données incomplètes. Par données, nous entendons les conditions initiales, le second membre et éventuellement les conditions aux limites. Dans presque tous les problèmes de la météorologie ou d'océanographie, on connaît jamais les données initiales, on a une grande variété de possibilités quand au choix de l'instant initiale. Même chose pour les problèmes des pollutions dans un lac, une rivière, un estuaire,...

Les conditions aux limites peuvent aussi être inconnues ou seulement partiellement connues sur une partie de la frontière qui peut par exemple être inaccessible aux mesures qu'il s'agisse des situations biomédicales ou des situations correspondantes à des accidents. Il en va de même pour les termes sources qui peuvent être d'accès difficiles, même chose pour la structure du domaine qui peut aussi être imparfaitement connue, comme par exemple dans la gestion de puits de pétrole où une partie de la frontière du domaine est inconnue. Naturellement ces problèmes sont classiques et l'idée la plus habituelle est celle de "moindres carrée<sup>(1)</sup>", cette méthode revient à considérer les inconnues comme des variables de contrôles où on cherche à minimiser la fonction de coût qui est l'écart entre l'état mesuré sur une partie du domaine et l'état calculé par la résolution du système considéré. Cela conduit à des problèmes de contrôle optimal pour des systèmes distribués. Dans ce type de méthode les inconnues jouent le même rôle en cherchant à déterminer les uns et les autres, cependant, il y a la possibilité de ne pas pouvoir séparer ces rôles.

Sans négliger cette méthode fondamentale, qui demeure de loin la plus importante pour ce type de problèmes, il peut être utile de tenter celle dite " La méthode des sentinelles<sup>(2)</sup>".

---

<sup>(1)</sup>A la fin des années 80.

<sup>(2)</sup>J.L.Lions [29]; publié en 1992.

Une sentinelle est une forme linéaire agissant sur les observations qui doit vérifier des conditions de sensibilité à certains paramètres du système et d'insensibilité à d'autres. Donc l'idée des sentinelles semble un peu différente. On imagine alors qu'avec un ensemble convenable de sentinelle on pourra identifier les inconnues intéressantes et s'affranchir les autres.

Supposons par exemple que l'équation du système décrive la cinétique d'un polluant dans une rivière ou un lac et que la source soit des pollueurs éventuels, ce qui est intéressant dans ce cas est évidemment de connaître ce que les pollueurs ont déversé dans la rivière et non l'état du lac à l'instant initial.

La méthode des sentinelles nous permettra donc de reconstituer un paramètre ou une approximation de ce dernier indépendamment des autres données qu'on ne veut pas identifier, les sentinelles sont donc "une méthode d'identification de paramètres". Les problèmes d'identification possèdent de nombreuses motivations liées à des problèmes physiques importants, le champs applicatif des méthodes d'identification des paramètres est donc extrêmement vaste et la littérature sur le sujet est abondante.

Les sentinelles ont été introduites par J. L. Lions, publié un livre [29]. De nombreux types de systèmes sont abordés et l'auteur étudie l'existence des sentinelles insensibles aux perturbations sans contraintes de sensibilité aux données intéressantes. L'étude de leur existence conduit à la résolution du problème de contrôlabilité de systèmes distribués.

De nombreux résultats théoriques et numériques existent ainsi que des nombreuses applications à des problèmes physiques réels motivées par les chercheurs et les industrielles, on peut citer à titre d'exemple les travaux de G. Chavent. Il est également l'auteur d'un travail sur les sentinelles traitant notamment la relation entre sentinelle et moindre carrés. Aussi les travaux de O. Nakoulima. On peut se référer également aux travaux de l'équipe de J. P. Kernevez pour le traitement numérique de problèmes d'identification de pollutions dans les systèmes distribués, la détection de pollution dans un aquifère, la détermination des paramètres manquantes dans un lac et la recherche de pollution dans une rivière. Depuis lors, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'aspect numérique de cette méthode. On peut se référer aux travaux de A. Traore, dans lequel

il présente des sentinelles adaptées à la détermination de pollution en environnement avec une étude numérique sur la diffusion des polluants dans un milieu fluide.

La thèse de B. E. Ainseba comporte un chapitre sur l'identification de sources de pollution dans une rivière à partir d'une observation. Les sources sont décomposées sous la forme d'une amplitude inconnue multipliée par une fonction connue de  $L^2(0, T)$ .

Une sentinelle devra encore être insensible aux perturbations, mais aussi insensible à tous les paramètres devant être identifier sauf un. Pour ce dernier on impose au contraire une contrainte de sensibilité, on est alors conduit à résoudre des problèmes de contrôlabilité.

## **0.7 CONTENU DU MÉMOIRE**

Le mémoire est organisé comme suit: il contient une liste de notations, une table des matières, un chapitre d'introduction, quatre chapitres, conclusion, une bibliographie. Alors, ce travail est organisé de la façon suivante:

### **0.7.1 La première partie**

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notation préliminaires d'analyse fonctionnelle et topologie, les théorèmes et les propositions nécessaire et utiles pour aborder les autres chapitres, ainsi que, les espaces fonctionnelles dans lesquels l'existence locale des solutions on a lieu. Et on rappelle quelques propriétés de la théorie des semi groupes et technique de résolution des problèmes d'évolution par semi groupe, et nous donnons quelques définitions et propriétés du système contrôlable qui soit la base de la théorie des sentinelles. Pour cela on expose les notions de contrôlabilité exacte, faible et régionale avec quelques théorèmes nécessaires. Le chapitre 2, introduit la problématique des systèmes distribuées à données manquantes et la mise sous forme de problème de contrôlabilité à zéro. Nous rappelons le principe de la méthode des sentinelles par un exemple sur la détection de pollution dans un milieu fluide puis on étudie l'existence et la construction de la sentinelle et on parle des différents type de la sentinelle: régionale, discrète et faible.

Au troisième chapitre, la méthode des sentinelles est appliquée à l'identification d'une frontière d'un domaine dans lequel évolue une équation aux dérivées partielles parabolique. Il faut noter que la relation de causalité, entre la forme de la frontière et l'observation, n'est pas linéaire. Des simulations numériques sont présentées et montrent la viabilité des sentinelles dans un cas non-linéaire.

## 0.7.2 La deuxième partie

Dans une seconde partie, on étudie la contrôlabilité (exacte et faible) pour les problèmes distribués. On trouve ce type de problèmes dans l'étude des sentinelles (exacte et faible) qui sont des outils d'analyse mathématique de systèmes à données manquantes que l'on rencontre dans des problèmes de pollution. La notion des sentinelles a été introduite dans l'étude des problèmes à données incomplètes par J.L.Lions [29]. Ces sentinelles sont construites à partir de l'existence de la contrôlabilité exacte du système adjoint. Dans ce travail, nous avons introduit les **sentinelles faibles** pour:

**CHAPITRE 04:** Étudier l'estimation de la pollution des systèmes distribués à données manquantes sont dans les conditions initiales, et que la pollution apparaît au bord.

**CHAPITRE 05:** Étudier l'estimation de la pollution des systèmes distribués à données manquantes sont dans les conditions initiales et aux limites, et que la pollution apparaît au bord.

Et les **sentinelles exactes** pour:

**CHAPITRE 06:** Étudier l'estimation de la pollution des systèmes distribués dans les domaines avec des données manquantes, et que la pollution apparaît au bord.

Enfin, un cas particulier du système à données incomplètes a été étudié dans le dernier chapitre, qui est le système de Navier-Stokes où les conditions sont partiellement connues. En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui sont censées décrire le mouvement des fluides « newtoniens » (liquide et gaz visqueux ordinaires) dans l'approximation des milieux continus. La résolution de ces équations modélisant un fluide comme un milieu continu à une seule phase incompressible, si elle est possible, est ardue. La

cohérence mathématique de ces équations non linéaires n'est pas démontrée. Mais elles permettent souvent par une résolution approchée de proposer une modélisation des courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, la simulation numérique du comportement des gratte-ciel ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et ingénieurs, des avions, trains ou voitures à grandes vitesses pour leurs bureaux d'études concepteurs, mais aussi le trivial écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides.

Elles sont nommées d'après deux scientifiques, le mathématicien et ingénieur des Ponts, Henri Navier, et le physicien George Gabriel Stokes, le choix oubliant le rôle intermédiaire du physicien Barré de Saint-Venant. Pour un gaz peu dense, il est possible de dériver ces équations à partir de l'équation de Boltzmann, décrivant un comportement moyen des particules dans le cadre de sa théorie cinétique des gaz.

Dans ce travail, nous considérons un système de Navier-Stokes pour lequel au terme source est ajouté un terme de pollution et à la donnée initiale est affectée une incertitude ou terme manquant. Nous montrons qu'une sentinelle distribuée, peut-être associée à ce système et permet alors de caractériser cette pollution. Ainsi, nous revoyons une étude abordée par Lions dans [29]

Cette partie a fait l'objet d'un article paru [22, 23, 24, 25].

# Chapitre 1

## Analyse des systèmes distribués

### 1.1 EQUATION D'ÉTAT

Les systèmes à paramètres distribués (SPR) sont des systèmes dans lesquels les variables peuvent évoluer dans les temps et dans l'espace. Ces systèmes sont augmentés par des entrées et des sorties qui peuvent également évoluer dans le temps et dans l'espace et sont caractérisés par leur espace d'état qui est de dimension infinie. Ils sont gouvernés par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui peuvent être mises sous la forme d'une équation d'état au sens habituel.

#### 1.1.1 Semi-groupes

On s'intéresse ici aux équations d'état linéaires définies par des semi-groupes. Considérons une équation d'état de la forme

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) & ; 0 < t < T \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Cette équation peut être étudiée en utilisant une approche abstraite dépendant des propriétés de l'opérateur  $A$ . On peut aussi l'étudier en considérant les propriétés de sa solution  $z$ . Cette seconde approche exprime, pour un état initial  $z_0$  à l'instant  $t_0$ , la solution à l'instant  $t + s$ , qui peut être obtenue indifféremment à partir de:

- l'état  $z_0$ , et son évolution jusqu'à l'instant  $t + s$ , ou

• l'état  $z_0$ , et son évolution jusqu'à l'instant  $t$ , ensuite à partir de l'état à l'instant  $t$  jusqu'à l'état à l'instant  $t + s$ .

Ceci conduit naturellement à considérer l'approche semi-groupe. Etant donné un espace de Hilbert  $Z$  représentant l'espace d'état, on considère la définition suivante.

**Définition 1.1.1** On appelle semi-groupe fortement continu une famille  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  d'opérateurs de  $\mathcal{L}(Z)$  satisfaisant les propriétés suivantes:

1.  $\Phi(0) = I$
2.  $\Phi(t + s) = \Phi(t)\Phi(s)$ , pour tout  $t, s \geq 0$ .
3.  $\|\Phi(t)z - z\| \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$ , pour tout  $z \in Z$ .

Ainsi  $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(Z)$  associe, pour chaque  $t \geq 0$ , un opérateur  $\Phi(t) : Z \rightarrow Z$ .

La famille d'opérateurs  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  dépend évidemment de la dynamique  $A$  du système. De plus, on a la définition suivante.

**Définition 1.1.2** le générateur infinitésimal du semi-groupe  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  est l'opérateur linéaire non borné  $A$  défini par

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)z - z}{t} \quad (1.1.2)$$

lorsque cette limite existe.

le domaine de  $A$ , noté  $\mathcal{D}(A)$ , est l'ensemble des  $z$  dans  $Z$  tels que cette limite existe.

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ z \in Z / \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)z - z}{t} \text{ existe} \right\} \quad (1.1.3)$$

Des propriétés immédiates des semi-groupes sont données dans les propositions suivante.

**Proposition 1.1.1** Soient  $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$  et  $A$  son générateur infinitésimal. Si  $z \in \mathcal{D}(A)$ , alors  $\Phi(t)z \in \mathcal{D}(A)$  et on a l'égalité:

$$\Phi(t)Az = A\Phi(t)z; (\forall) t \geq 0.$$

**Lemme 1.1.1 Preuve.** On pose  $\Phi(\sigma) = S'(\sigma)$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(\sigma)z d\sigma &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S'(\sigma)z d\sigma = \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S'(\sigma) d\sigma \right] z \\ &= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} S(\sigma) \Big|_t^{t+h} \right] z = \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \right] z = S'(t)z = \Phi(t)z. \blacksquare \end{aligned}$$

**Remarque 1.1.1** On voit que:

$$\Phi(t)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A); (\forall) t \geq 0.$$

**Lemme 1.1.2** Soit  $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe alors:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(\sigma)z d\sigma = \Phi(t)z$$

quels que soient  $z \in Z$  et  $t \geq 0$ .

**Preuve.** L'égalité de l'énoncé résulte de l'évaluation:

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(\sigma)z d\sigma - \Phi(t)z \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\Phi(\sigma) - \Phi(t))z d\sigma \right\| \leq \sup_{\sigma \in [t, t+h]} \|\Phi(\sigma)z - \Phi(t)z\|$$

et de la continuité de l'application  $[0, \infty) \ni t \mapsto \Phi(t)z \in Z$ . ■

**Proposition 1.1.2** (voir: [42])

Soient  $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$  et  $A$  son générateur infinitésimal. Si  $z \in \mathcal{D}(A)$ , alors  $\int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma \in \mathcal{D}(A)$  et on a l'égalité:

$$A \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma = \Phi(t)z - z; (\forall) t \geq 0.$$

**Théorème 1.1.1** (voir: [42])

Soient  $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$  et  $A$  son générateur infinitésimal. alors  $z \in \mathcal{D}(A)$  et  $Az = y$  si et seulement si

$$\Phi(t)z - z = \int_0^t \Phi(\sigma)y d\sigma; (\forall) t \geq 0.$$

**Proposition 1.1.3**  $\forall z \in \mathcal{D}(A); \Phi(t)z \in \mathcal{D}(A)$  et  $\frac{d}{dt}\Phi(t)z = A\Phi(t)z = \Phi(t)Az$

**Preuve.** Remarquons que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t+h)z - \Phi(t)z}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)\Phi(h) - \Phi(t)}{h}z \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)(\Phi(h) - I)}{h}z \\ &= \Phi(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(h) - I}{h}z = \Phi(t)Az \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(h) - I}{h} \Phi(t)z = A\Phi(t)z; \forall t \geq 0.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t-h)z - \Phi(t)z}{-h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t-h)z - \Phi(t-h+h)z}{-h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t-h)z - \Phi(t-h)\Phi(h)z}{-h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \Phi(t-h) \frac{I - \Phi(h)}{-h} z = \Phi(t)Az
 \end{aligned}$$

Donc:  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(h) - I}{h} \Phi(t-h)z = A\Phi(t)z$ . ■

**Proposition 1.1.4**  $\mathcal{D}(A)$  est un sous espace vectorielle dense dans  $Z$  ( $\overline{\mathcal{D}(A)} = Z$ ).

*Preuve.*  $\mathcal{D}(A)$  sous espace vectorielle vérifie facilement.

$\overline{\mathcal{D}(A)} = Z$  ?

Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma = z ; \forall z \in Z$$

Donc il suffit de démontrer que

$$\forall z \in Z \quad \forall t > 0; \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma \in \mathcal{D}(A)?$$

En effet

$$\begin{aligned}
 \frac{\Phi(h) - I}{h} \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma &= \frac{1}{h} \int_0^t \{\Phi(h+\sigma)z - \Phi(\sigma)z\} d\sigma \\
 &= \frac{1}{h} \int_0^t \Phi(h+\sigma)z d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma \\
 &= \frac{1}{h} \int_h^{h+t} \Phi(\sigma)z d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma \\
 &= \frac{1}{h} \int_h^0 \Phi(\sigma)z d\sigma + \frac{1}{h} \int_0^{t+h} \Phi(\sigma)z d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma \\
 &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(\sigma)z d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h \Phi(\sigma)z d\sigma = \Phi(t)z - z
 \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(h) - I}{h} \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma = \Phi(t)z - z$$

D'où

$$\int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma \in \mathcal{D}(A)$$

Ou a donc aussi  $\frac{1}{t} \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma \in \mathcal{D}(A)$

Et comme  $z = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma$ . On en déduit que  $\overline{\mathcal{D}(A)} = Z$

Et  $A \int_0^t \Phi(\sigma)z d\sigma = \Phi(t)z - z$ .

Et en plus  $\int_0^t \Phi(\sigma)Az d\sigma = \Phi(t)z - z$ . ■

**Proposition 1.1.5** *L'opérateur  $A$  est fermé.*

**Preuve.**  $\forall z_n \in \mathcal{D}(A)$  telle que  $z_n \rightarrow z$  et  $Az_n \rightarrow y$

Est-ce que  $z \in \mathcal{D}(A)$  et  $Az = y$  ?

En effet, supposons que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$(z_n)_n \in D(A) \quad \text{et} \quad z_n \rightarrow z_0 \quad \text{et} \quad Az_n \rightarrow y_0 \quad \text{dans } Z$$

D'après la démonstration précédente

$$\int_0^t \Phi(\sigma)y_0 d\sigma = \Phi(t)z_0 - z_0$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)z_0 - z_0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(\sigma)y_0 d\sigma$$

On en déduit que  $z_0 \in \mathcal{D}(A)$  et  $Az_0 = y_0$ . Ainsi l'opérateur  $A$  qui fermé. ■

### Propriété de la croissance exponentielle de semi-groupe

**Lemme 1.1.3** *Soit  $\Phi(t)$  un semi groupe fortement continue alors il existe  $M \geq 1$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  telle que*

$$\|\Phi(t)\| \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0$$

**Preuve.** Considérons le compact  $[0, 1]$

Comme  $\Phi(t)$  est fortement continue alors  $\forall z \in Z; t \rightarrow \Phi(t)z$  est continue. Alors du compact  $[0, 1]$  par cette application est borné.

Alors

$$\exists M_z \text{ telle que } \|\Phi(t)z\| \leq M_z ; \forall t \in [0, 1]$$

D'après **Banach-Steinhaus**

$$\exists M \text{ telle que } \|\Phi(t)\| \leq M ; \forall t \in [0, 1]$$

Comme  $\Phi(0) = I \Rightarrow M \geq 1$ .

Si  $t \notin [0, 1]$ ; on peut écrire  $t$  sous le forme

$t = n + \sigma$  ou  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\sigma \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \Phi(n + \sigma) = \Phi(n)\Phi(\sigma) = \Phi(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}})\Phi(\sigma) \\ &= \{\Phi(1)\}^n \Phi(\sigma)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)\| &= \|\{\Phi(1)\}^n\| \|\Phi(\sigma)\| \leq \|\Phi(1)\|^n \|\Phi(\sigma)\| \\ \|\Phi(t)\| &\leq M^n M = M e^{n \log M} = M e^{n\omega}\end{aligned}$$

Donc  $\|\Phi(t)\| \leq M e^{t\omega}$  telle que  $\omega = \log M$ . ■

**Proposition 1.1.6** Si  $\Phi(t)$  est un semi groupe fortement continue à l'origine est la majoration

$$\|\Phi(t)\| \leq M e^{\omega t}$$

Alors  $\Phi(t)$  est fortement continue en un point  $s > 0$ .

**Preuve.** Soit  $\Phi(t)$  un semi groupe fortement continue à l'origine pour tout

$$z \in Z; \|\Phi(t)z - z\| \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{0}$$

Montrons la continuité forte en un point  $s > 0$  ?

Montrons que

$$\forall z \in Z; \|\Phi(t+s)z - \Phi(s)z\| \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{0}$$

Considérons sont d'abord le cas  $t > 0$

$$\|\Phi(t+s)z - \Phi(s)z\| = \|\Phi(t)\Phi(s)z - \Phi(s)z\| = \|\Phi(t)y - y\| \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{0}$$

Grâce à la continuité forte à l'origine. La continuité à droite. (1)

Le cas  $t < 0$

$$\begin{aligned}
 \|\Phi(t+s)z - \Phi(s)z\| &= \|\Phi(t+s)z - \Phi(t-t+s)z\| \\
 &= \|-\Phi(t+s)(\Phi(-t)z - z)\| \\
 &\leq \|\Phi(t+s)\| \|(\Phi(-t)z - z)\| \\
 &\leq Me^{\omega(t+s)} \|(\Phi(-t)z - z)\|
 \end{aligned}$$

On a

$$\|\Phi(-t)z - z\| \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 0 \quad (\text{car } t < 0 \text{ alors } -t > 0)$$

Donc la continuité à gauche. (2)

D'après (1) et (2) alors  $\Phi(t)$  fortement continue. ■

### Type d'un semi-groupe

**Définition 1.1.3** On appelle type d'un semi groupe  $\Phi(t)$  le nombre  $\omega_0$  définie par

$$\omega_0 = \inf \{ \omega \in \mathbb{R}; \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que } \Phi(t) \leq Me^{\omega t} \text{ pour } t \geq 0 \}$$

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log \|\Phi(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log \|\Phi(t)\|}{t}$$

On a semi groupe important.

Si  $\forall t \geq 0$  on a  $\|\Phi(t)\| \leq M$  le semi groupe  $\Phi(t)$  est dit borné.

Si  $\forall t \geq 0$  on a  $\|\Phi(t)\| \leq 1$  le semi groupe  $\Phi(t)$  est dit contraction.

### La transformé de Laplace d'un semi-groupe

Dans la suite, pour  $\omega \geq 0$  nous désignerons par  $A_\omega$  l'ensemble

$$A_\omega = \{ \lambda \in \mathbb{C}; \text{Re } \lambda > \omega > \omega_0 \}$$

Soit  $\lambda \in A_\omega$  et  $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$  nous avons

$$\|\Phi(t)\| \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0.$$

Et on voit que

$$\|e^{-\lambda t}\Phi(t)x\| \leq e^{-\operatorname{Re}\lambda t} \|\Phi(t)\| \|z\| \leq Me^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t} \|z\|; \forall z \in Z$$

Définissons l'application  $R_\lambda : Z \rightarrow Z$  Par

$$R_\lambda z = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t)z dt$$

Il est clair que  $R_\lambda$  est un opérateur linéaire. De plus on a

$$\|R_\lambda z\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}\Phi(t)z\| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|z\|; \forall z \in Z$$

D'où il résulte que  $R_\lambda$  est un opérateur linéaire borné.

**Définition 1.1.4** L'opérateur  $R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t)dt$

S'appelle la transformée de Laplace du semi groupe  $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Théorème 1.1.2** Si  $\lambda$  est telle que

$$\operatorname{Re}\lambda > \omega_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log \|\Phi(t)\|}{t}$$

Alors  $\lambda \in \rho(A)$  et l'intégrale  $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t)dt$  existe.

Et:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t)z dt = R(\lambda, A)z$$

**Preuve.** Si  $\omega_0 < \omega < \operatorname{Re}\lambda$  on a  $\|\Phi(t)\| \leq Me^{\omega t}$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t)dt \right\| &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}\Phi(t)\| dt = \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| \|\Phi(t)\| dt \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}\lambda t} e^{\omega t} dt = M \int_0^\infty e^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)t} dt \end{aligned}$$

Ainsi si  $\omega_0 < \operatorname{Re}\lambda$  alors l'intégrale  $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t)dt$  existe.

Notons par  $R(\lambda)$  l'opérateur défini pour chaque  $z \in Z$  par

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\Phi(t)z dt$$

Tout d'abord on va montrer que

$$\forall z \in Z; R(\lambda)z \in \mathcal{D}(A)?$$

En effet  $\forall z \in Z$  on a

$$\frac{\Phi(h) - I}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) z dt = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} [\Phi(t+h)z - \Phi(t)z] dt$$

On pose  $t+h = \sigma$  alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(h) - I}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) z dt &= \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(\sigma-h)} \Phi(\sigma) z d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\sigma} \Phi(\sigma) z d\sigma \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\sigma} \Phi(\sigma) z d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(\sigma-h)} \Phi(\sigma) z d\sigma \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} R(\lambda) z - e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda\sigma} \Phi(\sigma) z d\sigma \end{aligned}$$

Si  $h \rightarrow 0$ ; on obtient

$$AR(\lambda)z = \lambda R(\lambda)z - z \Rightarrow (\lambda - A)R(\lambda)z = z; \forall z \in Z$$

Alors  $R(\lambda)$  est l'inverse à gauche de l'opérateur  $(\lambda I - A)$ .

L'inverse à droite ?

Pour montrer que c'est un inverse à droite de  $(\lambda I - A)$  il suffit de montrer que

$$AR(\lambda) = R(\lambda)A$$

On a en effet. Si  $z \in \mathcal{D}(A)$ ; on a

$$\begin{aligned} AR(\lambda)z &= A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) z dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(h) - I}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) z dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\Phi(h) - I}{h} \Phi(t) z dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) \frac{\Phi(h) - I}{h} z dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(h) - I}{h} z dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) Az dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) dt Az = R(\lambda)Az. \end{aligned}$$

Ainsi on a déduire que  $R(\lambda)(\lambda I - A)z = z$

D'où  $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ . C'est-à-dire  $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ . ■

**Remarque 1.1.2** On voit que pour tout  $\lambda \in A_\omega$  on a:

$$\text{Im}R(\lambda, A) = \text{Im}R(\lambda) \subseteq \mathcal{D}(A) \text{ et: } R(\lambda, A)\mathcal{D}(A) = R(\lambda)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

### Étude de la croissance de la Résolvante

On a que  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  telle que  $\operatorname{Re} \lambda > \omega > \omega_0$ .

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) z dt$  est convergente.

$$e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \|\Phi(t) z\| \leq \|z\| M_\varepsilon e^{(-\operatorname{Re} \lambda + \omega_0 + \varepsilon)t} \text{ où } \varepsilon > 0$$

De cette manière on peut définir l'opérateur borné

$$R(\lambda) : Z \longrightarrow Z; R(\lambda) z = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) z dt \text{ telle que } \operatorname{Re} \lambda > \omega_0 + \varepsilon.$$

Et que

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{\operatorname{Re} \lambda - \omega_0 - \varepsilon}$$

D'autre part on a  $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \leq \omega_0\}$ .

Et en générale  $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > \omega_0\}$ .

Et on a

$$R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \Phi(t) dt \text{ et } \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_0}{\operatorname{Re} \lambda - \omega_0}.$$

#### Proposition 1.1.7

$$(R(\lambda, A))^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{n-1} \Phi(t) dt$$

*Preuve.* Tout d'abord on remarque que

L'on a  $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$  identité des résolvante de Hilbert (à démontrer facile).

$$\begin{aligned} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} &= -R(\lambda, A) R(\mu, A) \\ \implies \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} &= \lim_{\lambda \rightarrow \mu} (-R(\lambda, A) R(\mu, A)) \\ \frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) &= -(R(\lambda, A))^2 \end{aligned}$$

Pour récurrence on peut démontrer facilement que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! (R(\lambda, A))^{n+1}$$

Alors:

$$(R(\lambda, A))^n = \frac{1}{(-1)^{n-1} (n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)$$

$$(R(\lambda, A))^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{n-1} \Phi(t) dt ; \forall \lambda \in \rho(A)$$

Donc:

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} \lambda - \omega)t} t^{n-1} dt$$

On obtient:  $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}$ . ■

### L'approximation généralisée de Yosida

**Lemme 1.1.4** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset Z \rightarrow Z$  un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes

- ◆  $A$  est un opérateur fermé et  $\overline{\mathcal{D}(A)} = Z$ .
- ◆ Il existe  $\omega \geq 0$  et  $M \geq 1$  tel que  $A_\omega \subset \rho(A)$  et pour  $\lambda \in A_\omega$ ; on a

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Alors pour tout  $\lambda \in A_\omega$ ; nous avons  $\lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A) z = z; \forall z \in Z$

et:  $\lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty} \lambda A R(\lambda, A) z = A z; \forall z \in \mathcal{D}(A)$

**Remarque 1.1.3** On peut dire que les opérateurs bornés  $\lambda A R(\lambda, A)$  sont des approximations pour l'opérateur non borné  $A$ . C'est le motif pour lequel on introduit le théorème suivant.

**Théorème 1.1.3** La famille  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in A_\omega}$ ; où

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$$

S'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur  $A$ .

**Preuve.** On a  $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I \implies (\lambda I - A) R(\lambda, A) = I$   
 $\implies \lambda R(\lambda, A) - A R(\lambda, A) = I \implies \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda A R(\lambda, A) = \lambda I$   
 $\implies \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I = \lambda A R(\lambda, A) = A_\lambda$ . ■

### Théorème de Hille-Yosida

**Théorème 1.1.4** *Un opérateur linéaire  $A : \mathcal{D}(A) \subset Z \longrightarrow Z$  est le générateur infinitésimal d'un semi groupe  $\Phi(t)_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$  si et seulement si:*

(i)  *$A$  est un opérateur fermé et  $\overline{\mathcal{D}(A)} = Z$ .*

(ii) *Il existe  $\omega \geq 0$  et  $M \geq 1$  tel que  $A_\omega \subset \rho(A)$  et pour  $\lambda \in A_\omega$ ; on a*

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

**Preuve.** ( $\implies$ ) *Sa démontre déjà.*

( $\impliedby$ ) *Dans ce but introduisant tout d'abord la notion d'approchant yosida ■*

**Définition 1.1.5** *pour  $\lambda > \omega$  on définit les approchant yosida de  $A$  par:*

$$A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I = \lambda A R(\lambda, A).$$

**Lemme 1.1.5** *On a:  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda z = Az ; \forall z \in \mathcal{D}(A)$ .*

**Preuve.** soit  $z \in \mathcal{D}(A) : \|\lambda R(\lambda, A)z - z\| = \|AR(\lambda, A)z\|$

$$= \|R(\lambda, A)Az\| \leq \|R(\lambda, A)\| \|Az\| \leq \frac{M}{\lambda - \omega} \|Az\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

D'après Banach-Steinhaus:

$$\lambda R(\lambda, A)z \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0; \forall z \in \mathcal{D}(A)$$

$$\text{Or: } \overline{\mathcal{D}(A)} = Z : \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M\lambda}{\lambda - \omega} \leq c$$

Alors d'après Banach-Steinhaus:  $\lambda R(\lambda, A)z \rightarrow z : \forall z \in Z$

Ainsi :  $A_\lambda z \rightarrow Az ; \forall z \in \mathcal{D}(A)$

$$\{A_\lambda z = \lambda R(\lambda, A)Az \rightarrow Az\} \quad \blacksquare$$

**Lemme 1.1.6** *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires fermés telle que*

$$A \subset B \text{ et } \rho(A) \cap \rho(B) = \emptyset.$$

*Alors  $A = B$ .*

**Preuve.** soit  $z \in \mathcal{D}(B)$  et  $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$  posons :  $Bz - \lambda_0 z = y$  et

$$x = (A - \lambda_0 I)^{-1}y$$

$$\implies x \in \mathcal{D}(A) \text{ et de plus } Ax - \lambda_0 x = y$$

$$\implies x \in \mathcal{D}(B) : Bx - \lambda_0 x = y$$

$$\implies x = (B - \lambda_0 I)^{-1} y = (B - \lambda_0 I)^{-1} (B - \lambda_0 I) z = z$$

$$\implies z \in \mathcal{D}(A)$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) \implies A = B$$

Ainsi le lemme est démontré. ■

### Démonstration de la Suffisance de théorème de Hille -Yosida:

**Preuve.** Pour chaque  $\lambda > w$  : soit  $A_\lambda = \lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I \implies A_\lambda \in \mathcal{L}(Z)$ ; on peut alors construire le semi- groupe:

$$\Phi_t^\lambda = e^{A_\lambda t} = e^{\lambda^2 t (\lambda I - A)^{-1} - \lambda t}$$

$$\Phi_t^\lambda = e^{A_\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} (\lambda I - A)^{-1}$$

On va montrer que la limite de Semi- groupe  $\Phi_t^\lambda$  existe quand  $\lambda \rightarrow +\infty$  et que de Semi- groupe chercher  $\Phi_t$ .

Notons que :

$$\begin{aligned} \|\Phi_t^\lambda\| &\leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \frac{M}{(\lambda - w)^n} \\ &= M \exp\left(\frac{\lambda w t}{\lambda - w}\right) \end{aligned}$$

Il facile de voir que:  $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$  (vue que:  $R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A)$ ) est que:  $A_\lambda \Phi_t^\mu = \Phi_t^\mu A_\lambda$

Soit  $z \in \mathcal{D}(A)$  on a:

$$\begin{aligned} \Phi_t^\lambda z - \Phi_t^\mu z &= \int_0^t \frac{d}{ds} (\Phi_{t-s}^\mu \Phi_s^\lambda) ds \\ &= \int_0^t \Phi_{t-s}^\mu (A_\lambda - A_\mu) \Phi_s^\lambda ds \\ &= \int_0^t \Phi_{t-s}^\mu \Phi_s^\lambda (A_\lambda - A_\mu) z ds \end{aligned}$$

$$\implies \|\Phi_t^\lambda z - \Phi_t^\mu z\| \leq M^2 \exp\left(\frac{\mu w t}{\mu - w}\right) \|(A_\lambda - A_\mu)z\| \int_0^t \exp\left(-\frac{(\lambda - \mu)w^2 s}{(\mu - w)(\lambda - w)}\right) ds$$

Choisi:  $\lambda > \mu$

$$\|\Phi_t^\lambda z - \Phi_t^\mu z\| \leq M^2 \exp\left(\frac{\mu w t}{\mu - w}\right) t \underbrace{\|(A_\lambda - A_\mu)z\|}_{\rightarrow 0}$$

(Puisque  $A_\lambda z \rightarrow Az$  car  $\lambda, \mu \rightarrow \infty$ )

Donc  $\Phi_t^\lambda z$  converge fortement vers une limite qu'on note par:  $\Phi_t z$ .

Il reste que  $\Phi_t$  est un  $C^0$ -Semi-groupe dans le générateur infinitésimal  $A$ .

$$\blacklozenge \Phi_{t+s} z = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi_{t+s}^\lambda z = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi_t^\lambda \Phi_s^\lambda z = \Phi_t \Phi_s z; \forall z \in Z; \forall t, s \geq 0$$

$$\blacklozenge \Phi_0 z = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi_0^\lambda z = Iz = z \implies \Phi_0 = I$$

$\blacklozenge$  la continuité forte est une conséquence directe de la continuité uniforme sur le compacte.

$A$  est le générateur infinitésimal de  $\Phi_t$ ?

Soit  $z \in \mathcal{D}(A)$

$$\Phi(t)z - z = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{A_\lambda t} z - z) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda ds = \int_0^t \Phi(s)Az ds$$

Soit  $B$  le générateur de  $\Phi(t)$  et soit  $z \in \mathcal{D}(A)$

$$\implies \frac{\Phi(t)z - z}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(s)Az ds$$

$$\implies z \in \mathcal{D}(B); Bz = Az$$

$$\implies B \supseteq A$$

Si  $\lambda > w$  on a tout d'abord  $\lambda \in \rho(A)$  et  $\lambda \in \rho(B)$  d'après de condition nécessaire de Hille- Yosida alors d'après le lemme précédente:  $A = B$ .

Ainsi le théorème est démontré. ■

Le semi-groupe joue un rôle important dans la détermination de la solution d'une équation différentielle abstraite. En particulier, la solution de (2.1.1) est donnée par:

$$z(t) = \Phi(t)z_0, \text{ pour tout } z_0 \in \mathcal{D}(A) \text{ et } t \geq 0$$

Lorsque le système (2.1.1) n'est pas autonome et qu'il est excité par un contrôle  $u$ , alors le système devient

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + u(t) & ; 0 < t < T \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

et sa solution est donnée, pour tout  $z_0 \in \mathcal{D}(A)$  et  $t \geq 0$ , par

$$z(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)u(\tau) d\tau \quad (1.1.5)$$

Maintenant, on considère le problème qui consiste à savoir sous quelles conditions l'opérateur  $A$  peut être générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu. Lorsque  $A \in \mathcal{L}(Z)$  ( $A$  est borné), on peut définir  $\Phi(t)$  par

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

Mais dans le cas non borné,  $A$  doit être fermé et son domaine doit satisfaire  $\overline{\mathcal{D}(A)} = Z$ . Plus précisément, le théorème de Hille-Yosida.

**Théorème 1.1.5** *Si un opérateur  $A$  est fermé, à domaine  $\mathcal{D}(A)$  dense dans  $Z$ , et satisfait*

(i)  $(\lambda I - A)^{-1}$  existe pour  $\lambda > \omega$

(ii)

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}; \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1.1.6)$$

alors  $A$  engendre un semi-groupe continu  $\Phi(t)$  satisfaisant

$$\|\Phi(t)\| \leq M e^{\omega t}, t > 0 \quad (1.1.7)$$

En particulier, si  $A$  admet un système complet de fonctions propres  $(\varphi_{m_j})$  orthonormées dans  $Z$  associées aux valeurs propres  $(\lambda_m)$ , avec  $\lambda_m$  de multiplicité  $r_m$ , alors le semi-groupe  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  engendré par  $A$  est donné, pour  $t > 0$  et  $z \in Z$ , par

$$\Phi(t)z = \sum_m e^{\lambda_m t} \sum_{j=1}^{r_m} \langle z, \varphi_{m_j} \rangle \varphi_{m_j} \quad (1.1.8)$$

**Propriété 1.1.1** *L'opérateur  $A^*$ , engendre le semi-groupe adjoint  $(\Phi^*(t))_{t \geq 0}$  de  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  qui est fortement continu sur le dual  $Z'$  de  $Z$ .*

*Si  $\mathcal{D}(A)$  est dense dans  $Z$ ,  $\mathcal{D}(A^*)$  est dense dans  $Z'$ .*

**Exemple 1.1.1** *Si on considère le système de diffusion où l'opérateur  $A$  est le Laplacien*

$$Az = \Delta z \quad (1.1.9)$$

pour  $z \in \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , alors

1.  $A$  admet un système complet de fonctions propres  $(\varphi_{m_j})$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $j = 1, \dots, r_m$ , associées aux valeurs propres  $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$  où  $r_m$  est la multiplicité de  $\lambda_m$ ,

2.  $\lambda_m < 0$  pour tout  $m$ ,

3.  $A$  engendre un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  donné, pour tout  $z \in \mathcal{D}(A)$ ,

par

$$\Phi(t)z = \sum_m e^{\lambda_m t} \sum_{j=1}^{r_m} \langle z, \varphi_{m_j} \rangle \varphi_{m_j} \quad (1.1.10)$$

Dans le cas particulier où  $\Omega = ]0, \omega[$ , avec une condition aux limites homogène de Dirichlet sur  $\partial\Omega$ , alors

$$\varphi_m(x) = \frac{2}{\sqrt{\omega}} \sin \frac{m\pi x}{\omega}; m \in \mathbb{N} \quad (1.1.11)$$

et

$$\lambda_m = -\frac{m^2 \pi^2}{\omega^2}; m \in \mathbb{N} \quad (1.1.12)$$

et le semi-groupe est donné, pour tout  $z \in L^2(0, \omega)$ , par

$$\Phi(t)z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \pi^2}{\omega^2} t} \langle z, \sin \frac{m\pi x}{\omega} \rangle \sin \frac{m\pi x}{\omega} \quad (1.1.13)$$

On considère maintenant la définition d'un semi-groupe stable dans le sens suivant.

**Définition 1.1.6** Un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  sur  $Z$  est dit exponentiellement stable, s'il existe deux constantes  $M > 0$  et  $\alpha < 0$  telles que, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq M e^{\alpha t} \quad (1.1.14)$$

En théorie de contrôle, on considère, dans le cas des systèmes linéaires, un système régi par une équation d'état de type

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) & ; 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad (1.1.15)$$

La solution de cette équation est notée indifféremment, selon l'objet de l'étude,  $z(\cdot)$  ou  $z(\cdot, u)$  ou encore  $z_u(\cdot)$ .

Les contrôles en boucle fermée (feedback) sont souvent sous la forme

$$u = Kz$$

Ainsi en remplaçant ce contrôle dans (1.1.15), on a le système

$$\begin{cases} z'(t) = (A + BK)z(t) & ; 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad (1.1.16)$$

dont l'opérateur dynamique devient, dans ce cas,  $A + BK$ . si on pose  $D = BK$ , le générateur du semi-groupe est donc  $A + D$  et peut être considéré comme opérateur résultant d'une perturbation de  $A$ . Dans ce cas, on a le théorème suivant.

**Théorème 1.1.6** *Si  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  tel que  $\|\Phi(t)\| \leq Me^{\omega t}$  ( $M > 0$  et  $\omega < 0$ ), et si  $D$  est borné sur  $Z$ , alors l'opérateur  $A + D$  engendre un semi-groupe fortement continu  $(\Psi(t))_{t \geq 0}$  tel que*

$$\|\Psi(t)\| \leq Me^{(\omega + M\|D\|)t} \quad (1.1.17)$$

Ce résultat donne une condition qui assure que le système excité par le contrôle  $u = Kz$  est exponentiellement stable.

### 1.1.2 Transformation d'une EDP en équation d'état

Dans cette partie, on montre comment une équation aux dérivées partielles linéaires peut être écrite sous forme d'une équation d'état ordinaire.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\partial\Omega$  assez régulière et soit  $]0, T[$  un horizon de temps fini. on considère le système décrit par l'équation aux dérivées partielles abstraite suivante

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = My(t) + \sum_{i=1}^p g_i u_i(t) \\ y(t_0) = y_0 \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (1.1.18)$$

où

1. La solution  $y$  est supposée être dans l'espace  $W$  défini par

$$W = \left\{ y/y \text{ et } \frac{dy}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \right\} \quad (1.1.19)$$

2. L'opérateur  $M$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$ , à domaine défini par

$$\mathcal{D}(M) = \left\{ y \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) / My \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } Ly = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \quad (1.1.20)$$

où l'opérateur  $L$  contient uniquement des dérivées spatiales. L'opérateur  $M$  peut aussi être représenté par des dérivées partielles spatiales. Comme exemple, on peut prendre  $My = \Delta y$ , où  $\Delta y$  est l'opérateur Laplacien appliqué à  $y$ .

3.  $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)^{tr} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$  représente le contrôle excitant le système.

4. La répartition spatiale du contrôle  $g = (g_1, g_2, \dots, g_p) \in [L^2(\Omega)]^p$  où, pour tout  $i$ ,  $g_i$  est de carré sommable sur  $\Omega$  et définit la distribution spatiale du  $i^{ieme}$  contrôle.

Sous ces hypothèses, le système (1.1.18) admet une solution unique donnée par:

$$y(t) = \Phi(t) y_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) \sum_{i=1}^p g_i u_i(\tau) d\tau \quad (1.1.21)$$

Pour la transformation du système (1.1.18) en formulation d'espace d'état, on suppose que l'opérateur  $M$ , avec les conditions aux limites  $L$ , admet un système complet de fonctions propres données par

$$\begin{cases} M\varphi_i = \lambda_i \varphi_i & \Omega \\ L\varphi_i = 0 & \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1.22)$$

Les fonctions propres sont supposées être orthonormales. En développant la solution  $y$  de (1.1.18) dans la base  $(\varphi_i)$ , on a

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) \varphi_i = z(t) \Theta \quad (1.1.23)$$

où  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots)$  et  $\Theta = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)^{tr}$ . En remplaçant dans (1.1.18), on obtient

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{dz_i(t)}{dt} \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i z_i(t) \varphi_i + \sum_{i=1}^p g_i u_i(t) \quad (1.1.24)$$

Soit  $(\psi_i)$  la base de fonctions propres de l'opérateur adjoint  $M^*$ , on a

$$\int_{\Omega} \varphi_i \psi_j d\Omega = \delta_{ij}, \quad \text{pour tout } i, j \quad (1.1.25)$$

En multipliant (1.1.24) par  $\psi_j$ , en intégrant sur  $\Omega$  et en utilisant (1.1.25), on obtient

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \lambda_i z_i(t) + \sum_{i=1}^p \langle g_i, \psi_j \rangle u_i(t)$$

qui peut s'écrire en termes d'opérateurs (matrices de dimensions infinies)

$$z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + Bu(t) \quad (1.1.26)$$

où

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots)$$

et  $B$  est la matrice de dimensions  $(\infty \times p)$  donnée par

$$B = (B_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle g_1, \psi_1 \rangle & \langle g_2, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle g_p, \psi_1 \rangle \\ \langle g_1, \psi_2 \rangle & \langle g_2, \psi_2 \rangle & \cdots & \langle g_p, \psi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle g_1, \psi_n \rangle & \langle g_2, \psi_n \rangle & \cdots & \langle g_p, \psi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (1.1.27)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, \infty$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  et le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est défini dans  $L^2(\Omega)$ . a partir de (1.1.23), on obtient

$$z_i(t) = \langle y(t), \psi_i \rangle_{L^2(\Omega)}$$

la condition initiale sur  $z$  est donnée par

$$z_i(t_0) = \langle y_0, \psi_i \rangle_{L^2(\Omega)} = z_0^i$$

Soit  $z(0) = z_0 = (z_0^1, z_0^2, \dots)^{tr}$ , le système (1.1.18) peut être écrit sous la forme de l'équation d'état suivante

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.1.28)$$

L'opérateur  $A$  est générateur infinitésimal du semi-groupe  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  avec  $\Phi(t) = (\Phi_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,\infty}$  et

$$\Phi_{ij}(s) = \langle \Phi(s) \psi_j, \psi_i \rangle_{L^2(\Omega)}$$

La solution de (1.1.28) existe, est unique et est donnée par

$$z(t) = \Phi(t) z(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau) Bu(\tau) d\tau \quad (1.1.29)$$

**Remarque 1.1.4** La transformation de l'équation (1.1.18) en une équation d'état (1.1.28), a changé la variable  $y$  en une variable d'état  $z$ . L'application

$$y \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \longrightarrow z \in L^2(0, T; \ell^2)$$

est une isométrie, et on a

$$\|y\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \|z\|_{L^2(0,T;\ell^2)} \quad (1.1.30)$$

**Exemple 1.1.2** On considère le cas particulier où le système (1.1.18) est défini dans  $\Omega = ]0, 1[$ , et l'équation aux dérivées partielles est donnée par

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + \gamma y(x, t) + \sum_{i=1}^p g_i(x) u_i(t) & ]0, 1[ \times ]0, T[ \\ y(x, 0) = y_0(x) & ]0, 1[ \\ y(0, t) = y(1, t) = 0 & ]0, T[ \end{cases} \quad (1.1.31)$$

Dans ce cas, l'opérateur  $M$  est défini par

$$M = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma$$

est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  et admet un système complet de fonctions propres données par

$$\varphi_i(x) = \sqrt{2} \sin(i\pi x) \quad ; \quad x \in ]0, 1[ \quad (1.1.32)$$

les valeurs propres associées sont

$$\lambda_i = \gamma - \alpha i^2 \pi^2 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.1.33)$$

en utilisant les développements précédents, on obtient l'équation d'état

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.1.34)$$

où  $z_0 = (z_0^1, z_0^2, \dots)$  avec  $z_0^i = \int_0^1 y_0(x) \varphi_i(x) dx$ , pour tout  $i$ . Les composantes de l'opérateur  $B$  sont

$$B_{ij} = \int_0^1 g_j(x) \varphi_i(x) dx \quad ; \quad 1 \leq j \leq p, i = 1, 2, \dots \quad (1.1.35)$$

finalement la solution de (1.1.34) est donnée par

$$z(t) = \Phi(t) z(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau \quad (1.1.36)$$

où la  $j^{\text{eme}}$  composante est donnée par

$$z_j(t) = e^{(\gamma - \alpha j^2 \pi^2)t} z_0^j + \int_0^t e^{(\gamma - \alpha j^2 \pi^2)(t - \tau)} \sum_{k=1}^p B_{jk} u_k(\tau) d\tau \quad (1.1.37)$$

dans (1.1.34), les opérateurs de dynamique  $A$  et de contrôle  $B$  apparaissent clairement dans l'équation d'état.

### 1.1.3 Equation d'état discrète

Soient  $Z$  un espace de Hilbert et  $\sigma$  un ensemble de temps donné par

$$\sigma = \{1, 2, 3, \dots, N\} \quad (1.1.38)$$

On note  $z_i$  l'état à l'instant  $i \in \sigma$ . Si on choisit un pas de temps  $\Delta$ , les temps sont définis par  $t_i = t_0 + i\Delta$ , et  $z_i = z(t_i) \in Z$ , soit  $U$  l'espace de contrôle (un espace de Hilbert), souvent considéré donné par  $U = \mathbb{R}^p$ . On considère les opérateurs  $\phi : Z \rightarrow Z$  et  $B : U \rightarrow Z$  supposés être linéaires et bornés. Une classe de systèmes distribués discrets est donnée par l'équation linéaire discrète suivante

$$\begin{cases} z_{i+1} = \phi z_i + Bu_i & i = 1, 2, \dots \\ z_0 \in Z \end{cases} \quad (1.1.39)$$

Plus précisément, si on considère l'espace  $L^2(\sigma, Z)$  de familles de suites  $z = (z_i)_{i \in \sigma}$  où  $z_i \in Z$ , on a

1.  $L^2(\sigma, Z)$  est un espace de Hilbert, muni de l'addition usuelle et du produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et définit, pour tout  $z = (z_i)$  et  $y = (y_i)$ , par

$$\langle z, y \rangle_{L^2(\sigma, Z)} = \sum_{i \in \sigma} \langle z_i, y_i \rangle_Z$$

2. L'hypothèse  $\phi$  borné n'est pas restrictive et peut représenter des systèmes discrétisés. En effet, dans le cas continu, soit le système

$$z'(t) = Az(t) + Bu(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (1.1.40)$$

où  $A$  générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  à domaine dans  $Z$ , et  $B$  est un opérateur linéaire et borné  $U \rightarrow Z$ . Le système (1.1.40) peut être discrétisé en considérant

$$z_{i+1} = \phi z_i + Bu_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots$$

où  $z_i = z(t_i)$ ;  $\phi = \Phi(\Delta)$

ainsi  $\phi$  peut donc être considéré comme un opérateur borné. L'opérateur  $B$  est défini, dans ce cas, par

$$Bu_i = \int_0^\Delta \Phi(\Delta - \tau) Bu_i d\tau$$

3. On montre que l'application  $u \in L^2(\sigma, U) \longrightarrow z \in L^2(\sigma, Z)$  où  $z$  est la solution de l'équation discrète (1.1.39), est continue.

## 1.2 CONTRÔLABILITÉ

Le problème de la contrôlabilité consiste en la possibilité de transférer l'état d'un système en un temps fini, d'un état initial vers un état désiré choisi à priori. Nous nous intéressons dans cette partie à introduire les idées principales du problème de la contrôlabilité et de la méthode générale de la résolution.

### 1.2.1 Description du système

On considère un système distribué défini sur un espace de Hilbert  $Z$  et donné par l'équation d'état

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad 0 < t < T \quad (1.2.1)$$

avec les hypothèses suivantes.

◆ L'opérateur  $A$  est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  sur l'espace d'état  $Z$ .

◆ L'opérateur  $B$  est borné de l'espace de Hilbert  $U$  (espace des contrôles)  $\longrightarrow Z$ .

La solution de (1.2.1) est donnée par

$$z(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (1.2.2)$$

On rappelle que dans le cas où l'opérateur  $A$  est non borné, alors  $\mathcal{D}(A) \neq Z$  et les états de  $Z$  ne peuvent être tous atteints à partir de l'état initial  $z_0$ . On considère d'abord la notion de la contrôlabilité exacte. Cette notion paraît simple dans le cas de systèmes localisés (systèmes de dimension finie), mais comme on va le voir, elle va être considérée différemment pour les systèmes à paramètres distribués. Plus précisément, il existe des systèmes où un état désiré donner peut être atteint exactement, c'est le

cas de la contrôlabilité exacte, mais il existe des cas où l'état désiré peut être approché



Fig 1.2.1 contrôlabilité exacte (gauche) et la contrôlabilité faible (droite).

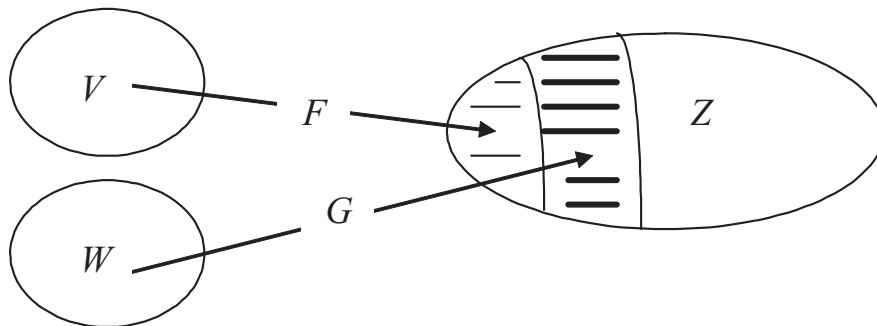
mais non exactement atteint, c'est le cas de la contrôlabilité faible (voir figure (1.2.1)). Comme on va le voir, la contrôlabilité faible est plus simple à vérifier dans les applications.

### 1.2.2 Un résultat préliminaire

Pour caractériser la contrôlabilité, on a besoin du résultat préliminaire suivant.

**Proposition 1.2.1** Soient  $V, W$  et  $Z$  des espaces de Banach et  $V', W'$  et  $Z'$  leurs espaces duaux. On considère les opérateurs  $F \in \mathcal{L}(V, Z)$  et  $G \in \mathcal{L}(W, Z)$ . On désigne par  $F^*$  et  $G^*$  les opérateurs adjoints de  $F$  et  $G$ . Si on suppose que  $\text{Im } F \subset \text{Im } G$ , alors on a

$$\exists \gamma > 0 / \|F^* z^*\|_{V'} \leq \gamma \|G^* z^*\|_{W'} \quad \text{pour tout } z^* \in Z' \quad (1.2.3)$$



**Preuve.** La preuve va être considéré en deux étapes. La première étape concerne le cas  $G$  est un isomorphisme, la seconde concerne le cas général.

• On suppose que  $G$  est isomorphisme, donc  $G^{-1} : \text{Im}(G) \longrightarrow W$  existe. De plus  $G^{-1}F : V \longrightarrow W$  est fermé et borné. Donc l'adjoint de  $G^{-1}F$ , avec  $(G^{-1}F)^* : W' \longrightarrow V'$  est aussi borné et par suite, il existe  $\gamma > 0$  tel que

$$\|(G^{-1}F)^* w^*\|_{V'} \leq \gamma \|w^*\|_{W'} \quad ; \quad \text{pour tout } w^* \in W' \quad (1.2.4)$$

On considère maintenant  $z^* \in Z'$  et soit  $w^* = G^* z^*$ , on a pour tout  $v \in V$ ,

$$\begin{aligned} \langle (G^{-1}F)^* w^*, v \rangle &= \langle (G^{-1}F)^* G^* z^*, v \rangle_{V',V} \\ &= \langle G^* z^*, G^{-1}Fv \rangle_{W',W} \\ &= \langle z^*, GG^{-1}Fv \rangle_{Z',Z} \\ &= \langle z^*, Fv \rangle_{Z',Z} \\ &= \langle F^* z^*, v \rangle_{V',V} \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\|F^* z^*\|_{V'} \leq \gamma \|G^* z^*\|_{W'}$$

• Dans le cas général où  $G$  n'est pas un isomorphisme, on considère l'espace de Banach  $\widehat{W} = W / \ker(G)$  où  $[W] \in \widehat{W}$  est la classe d'éléments  $W + \widehat{W}$  tels que  $G(\widehat{W}) = 0$  et

$$\|[W]\|_{\widehat{W}} = \inf_{G(\widetilde{W})=0} \|W + \widetilde{W}\|_W$$

On définit  $\widehat{G}[W] = GW$ ,  $\widehat{G}$  est alors bijectif sur  $\widehat{W}$  avec  $\text{Im}(F) \subset \text{Im}(\widehat{G})$

D'après la première partie de la preuve, on a  $\|F^* z^*\|_{V'} \leq \gamma \|\widehat{G}^* z^*\|_{\widehat{W}'}$  et en utilisant la définition de  $\widehat{W}$  et  $\widehat{G}$ , on a  $\|\widehat{G}^* z^*\|_{\widehat{W}'} = \|G^* z^*\|_{W'}$  ■

**Corollaire 1.2.1** *Si  $V, W$  et  $Z$  sont des espaces de Banach réflexifs  $F \in \mathcal{L}(V, Z)$ ,  $G \in \mathcal{L}(W, Z)$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i)  $\text{Im}(F) \subset \text{Im}(G)$

(ii)  $\exists \gamma > 0 / \|F^* z^*\|_{V'} \leq \gamma \|G^* z^*\|_{W'} \quad ; \quad \text{pour tout } z^* \in Z'$

Le corollaire précédent est utile pour caractériser la contrôlabilité. Dans la section suivante, les espaces de contrôle et d'observation sont supposés être des espaces de Hilbert (et par suite des espaces de Banach réflexifs), par conséquent le résultat précédent est vrai.

### 1.2.3 Contrôlabilité Exacte

On considère le système gouverné par l'équation d'état

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad 0 < t < T \quad (1.2.5)$$

avec les hypothèses données ci-dessus. On introduit la définition suivante.

**Définition 1.2.1** *Le système (1.2.5) est dit exactement contrôlable (ou la paire  $(A, B)$  est exactement contrôlable) sur  $[0, T]$  si pour des états  $z_0$  et  $z_d$  quelconques dans  $Z$ , il existe un contrôle  $u \in L^2(0, T; U)$  tel que  $z(T) = z_d$ .*

Cette définition est similaire à celle concernant les systèmes localisés et traduit que le contrôle  $u$  conduit le système de l'état  $z_0$  vers  $z_d$  à l'instant  $T$ . On donne ci-après deux résultats permettant de donner une caractérisation de la contrôlabilité exacte, dans le cas des systèmes distribués.

**Proposition 1.2.2** *Si  $B \in \mathcal{L}(U, Z)$  est limite uniforme d'une suite d'opérateurs  $(B_n)$  de dimension finie, (c'est-à-dire que, pour tout  $n$ ,  $B_n$  appartient à un sous-espace de dimension finie de  $\mathcal{L}(U, Z)$ ), alors l'opérateur  $H : L^2(0, T; U) \rightarrow Z$  défini par*

$$Hu = \int_0^T \Phi(T - \tau) Bu(\tau) d\tau \quad (1.2.6)$$

*est compact.*

Dans la proposition, la compacité de l'opérateur  $H$  entraîne que l'image par  $H$  d'un borné de  $L^2(0, T; U)$  est relativement compacte dans  $Z$ . Ainsi, si  $B$  est limite uniforme d'une suite d'opérateurs  $(B_n)$  de dimension finie, alors le système (1.2.1) peut être non contrôlable. En effet, pour  $u$  borné et  $H$  compact,  $\text{Im}(H)$  est relativement compact et des états peut donc être non atteignables.

On considère maintenant le cas où  $G : \mathcal{L}(L^p(0, T; U), Z)$  et  $B \in \mathcal{L}(U, Z)$ , en utilisant le corollaire (1.2.1), on a le résultat suivant.

**Proposition 1.2.3** : *Résultat de caractérisation.*

si  $u \in L^p(0, T; U)$  avec  $1 < p < \infty$ , alors le système (1.2.5) est exactement contrôlable si et seulement si, il existe  $\gamma > 0$  tel que

$$\|z^*\|_{Z'} \leq \gamma \|B^* \Phi^*(\cdot) z^*\|_{L^q(0, T; U')}; z^* \in Z' \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1.2.7)$$

**Preuve.** On applique le corollaire (1.2.1) en considérant  $V = Z, W = L^p(0, T; U), F = Id_Z$  et  $G = H$  défini dans (1.2.6). On a  $W' = L^q(0, T; U')$  et  $\Phi^*$  est fortement continu sur  $Z'$ , par conséquent

$$\begin{aligned} \langle z^*, Gu \rangle &= \left\langle z^*, \int_0^T \Phi(T - \tau) Bu(\tau) d\tau \right\rangle_{Z', Z} \\ &= \int_0^T \langle B^* \Phi^*(T - \tau) z^*, u(\tau) \rangle_{U', U} d\tau \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$G^* z^* = B^* \Phi^*(T - \cdot) z^* \quad (1.2.8)$$

Avec des hypothèses équivalentes à celles du corollaire (1.2.1), on a

(i)  $\text{Im}(G) \supset Z$ , et

(ii)  $\exists \gamma > 0$  tel que  $\|z^*\|_{Z'} \leq \gamma \|B^* \Phi^*(\cdot) z^*\|_{L^q(0, T; U')}$

ce qui donne la contrôlabilité exacte, car avec (i), pour tout  $z \in Z$ , il existe  $u \in L^p(0, T; U)$  tel que  $Gu = z$ . ■

**Remarque 1.2.1** Dans le cas particulier où  $p = 2$ , donc  $q = 2$ , l'inclusion  $\text{Im}(G) \supset Z$  entraîne que tous les éléments  $z_d$  de  $Z$  admettent un antécédent dans  $L^2(0, T; U)$  (car  $G : L^2(0, T; U) \rightarrow Z$ ), c'est-à-dire qu'il existe un contrôle  $u$  qui conduit le système (avec  $G$ ) vers  $z_d$ .

**Exemple 1.2.1** On considère le système de diffusion à une dimension

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) + u(x, t) & ]0, 1[ \times ]0, T[ \\ z(x, 0) = z_0(x) & ]0, 1[ \\ z(0, t) = z(1, t) = 0 & ]0, T[ \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Le semi-groupe engendré par  $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  est donné dans  $L^2(0, 1)$ , d'après (1.1.10), par

$$\Phi(t)z = \sum_m \sqrt{2} e^{-m^2 \pi^2 t} \sin(m\pi \cdot) \int_0^1 \sqrt{2} \sin(m\pi y) z(y) dy \quad (1.2.10)$$

et on suppose que  $u \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$ . Dans ce cas, on a  $B = I$  et donc  $B^* = I$ . En utilisant (1.2.7), la contrôlabilité exacte est caractérisée par:

$$\|z\|_{L^2(0,1)} \leq \gamma \left[ \sum_m 2 \left( \frac{1 - e^{-2m^2\pi^2 T}}{2m^2\pi^2} \right) \left( \int_0^1 \sin(m\pi y) z(y) dy \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.11)$$

et  $\|z\|_{L^2(0,1)}$  est donné par

$$\left\{ \sum_m 2 \left( \int_0^1 \sin(m\pi y) z(y) dy \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.12)$$

comme, par ailleurs,

$$\frac{1 - e^{-2m^2\pi^2 T}}{2m^2\pi^2} < \frac{1}{2m^2\pi^2} \quad ; \quad \text{pour tout } m > 0$$

donc l'inégalité précédente montre que chaque terme à droite dans (1.2.11) est strictement plus petit que tout terme de gauche, i.e. dans (1.2.12). Par conséquent, la formule (1.2.11) n'est pas vraie. Finalement, le système ne peut pas être exactement contrôlable sur  $[0, T]$  pour tout  $T$ .

**Remarque 1.2.2** 1. Lorsque la contrôlabilité exacte n'est pas satisfaite dans l'espace  $Z$ , il est parfois possible de considérer un sous-espace de  $Z$ . Autrement dit, si des états de  $Z$  ne peuvent être atteints par tout contrôle, alors des états d'un certain sous-espace  $\underline{Z}$ , avec  $\underline{Z} \subset Z$ , peuvent être atteints.

2. Pour utiliser l'inégalité (1.2.7), on a besoin de calculer les normes dans les espaces adjoints. Pour cela, on rappelle les expressions des normes dans les espaces adjoints. Soient  $v \in V$  et  $v^*$  un élément de l'espace dual  $V'$  de  $V$ . Si

$$\|v\|_V^2 = \sum_m m^2\pi^2 \left( \int_0^1 \sin(m\pi y) v(y) dy \right)^2$$

alors la norme dans l'espace adjoint est donnée par

$$\|v^*\|_{V'}^2 = \sum_m \frac{1}{m^2\pi^2} \left( \int_0^1 \sin(m\pi y) v^*(y) dy \right)^2$$

### 1.2.4 Contrôlabilité Faible

Dans cette section, on développe le concept de contrôlabilité faible qui est mieux adapté aux systèmes à paramètres distribués. On considère l'équation d'état

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad 0 < t < T \quad (1.2.13)$$

avec les hypothèses sur  $A$  et  $B$ . Les espaces  $Z$  et  $U$  désignent respectivement les espaces d'état et de contrôle (des espaces de Hilbert). L'opérateur  $A$  engendre un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  sur l'espace d'état  $Z$  et  $B \in \mathcal{L}(U, Z)$ . La solution de (1.2.13) est donnée par

$$z(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (1.2.14)$$

Soit  $H$  l'opérateur :  $L^2(0, T; U) \longrightarrow Z$  défini par

$$Hu = \int_0^T \Phi(T - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (1.2.15)$$

Noté indifféremment  $H$  ou  $H_T$ . On considère aussi l'ensemble

$$\Omega_T = \{z \in Z / \exists u \in L^2(0, T; U) : z(T) = z\} \quad (1.2.16)$$

qui représente l'ensemble de tous les états atteignables à l'instant  $T$  à partir de  $z_0$ .

Evidemment on a

$$\Omega_T = \text{Im}(H) \quad (1.2.17)$$

**Définition 1.2.2** *Le système (1.2.13) est dit faiblement contrôlable sur  $[0, T]$  si, pour  $z_0$  et  $z_d$  quelconques dans  $Z$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un contrôle  $u \in L^2(0, T; U)$  tel que*

$$\|z(T) - z_d\|_Z < \epsilon \quad (1.2.18)$$

Avec (1.2.15), on considère l'adjoint  $H^* : Z \longrightarrow L^2(0, T; U')$  qui est donné (voir (1.2.8)) par  $H^*z = B^*\Phi^*(T - \cdot)z$ . On a la caractérisation suivante.

**Proposition 1.2.4** *Il y a équivalence entre:*

- (1) *Le système (1.2.13) est faiblement contrôlable sur  $[0, T]$ ,*

$$(2) \overline{\text{Im}(H)} = Z,$$

$$(3) \ker(H^*) = \ker(H^*H) = \{0\},$$

$$(4) \{\langle z, \Phi(s)Bu \rangle_Z = 0, \forall s \in [0, T] \text{ et } \forall u \in U\} \Rightarrow z = 0,$$

(5) Si le semi-groupe  $\{\Phi(t)\}_{t>0}$  est analytique, alors on a:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\text{Im}(A^n \Phi(s) B)} = Z, \forall s \in ]0, T]$$

**Preuve.** Pour la preuve, on utilise le fait que  $HH^*$  est auto-adjoint et la relation  $\overline{\text{Im}(H)} = (\ker(H^*))^\perp$ .

(1  $\Rightarrow$  2)?

(1.2.13) faiblement contrôlable sur  $[0, T] \Leftrightarrow$

$$\forall z_d \in Z, \forall \epsilon > 0, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } \|z(T) - z_d\| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \overline{\text{Im}(H)} = Z.$$

(2  $\Rightarrow$  3)?

On a:

$$\overline{\text{Im}(H)} = Z \Rightarrow \left(\overline{\text{Im}(H)}\right)^\perp = (Z)^\perp \Rightarrow \left(\overline{\text{Im}(H)}\right)^\perp = \{0\}$$

Et comme  $\left(\overline{\text{Im}(H)}\right)^\perp = \ker H^*$  alors  $\ker(H^*) = \{0\}$

On calcule  $\ker(H^*H)$ , on suppose que

$$\exists y \in Z \text{ tel que } \langle (H^*H)y, z \rangle = 0; \forall z \in Z$$

$$\Rightarrow \exists y \in Z \text{ tel que } \langle H^*y, H^*z \rangle = 0; \forall z \in Z$$

Pour  $y = z$  on a:

$$\exists y \in Z \text{ tel que } \langle H^*y, H^*y \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \exists y \in Z \text{ tel que } \|H^*y\| = 0$$

Et comme  $\ker(H^*) = \{0\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \ker(H^*H) = \{0\}$

D'où  $\ker(H^*) = \ker(H^*H) = \{0\}$ .

(3  $\Rightarrow$  4)?

On a  $\ker(H^*) = \ker(H^*H) = \{0\}$

C'est-à-dire  $\{\langle z, \Phi(s)Bu \rangle_Z = 0, \forall s \in [0, T] \text{ et } \forall u \in U\} \Rightarrow z = 0$

On a  $\{\langle z, \Phi(s)Bu \rangle_Z = 0, \forall s \in [0, T] \text{ et } \forall u \in U\}$

$$\Rightarrow (B^* \Phi^*(s) z, u) = 0, \forall s \in [0, T] \text{ et } \forall u \in U \Rightarrow H^* z = 0 \Rightarrow z = 0.$$

(4  $\Rightarrow$  5)?

On suppose que  $\exists s \in ]0, T[, \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Im}(A^n \Phi(s) B)} \neq Z$

$$\Rightarrow \exists s \in ]0, T[, \exists z \neq 0 \text{ tel que } \langle z, A^n \Phi(s) Bu \rangle = 0; \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in U$$

Or

$$\langle z, A^n \Phi(s) Bu \rangle = \frac{\partial}{\partial^n s} \langle z, \Phi(s) Bu \rangle; \forall n$$

Et par l'analyticité on en déduit que:

$$\langle z, \Phi(s) Bu \rangle = 0, \forall u \in U \text{ et } t \text{ voisin de } s.$$

$\{\langle z, B \Phi(s) u \rangle = 0, \forall u \in U \text{ et } t \text{ voisin de } s\}$  c'est-à-dire non (4).

(5  $\Rightarrow$  1)?

$$\exists z \neq 0 \text{ tel que } \langle z, \Phi(s) Bu \rangle = 0; \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in U$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in U : \frac{\partial}{\partial^n s} \langle z, \Phi(s) Bu \rangle = 0; \forall s \in ]0, T]$$

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Im}(A^n \Phi(s) B)} \neq Z, \forall s \in ]0, T]$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in U : \langle z, A^n \Phi(s) Bu \rangle = 0; \forall s \in ]0, T]$$

C'est-à-dire non (5). ■

La définition précédent de la contrôlabilité faible entraîne aussi que, pour tout  $t$ ,  $\text{Im}(H)$  est dense dans  $Z$ , ou de manière équivalente, l'ensemble des états atteignables  $\bigcup_{t \geq 0} \Omega_t$  est dense dans  $Z$ . Ceci conduit immédiatement à un second résultat de caractérisation.

**Proposition 1.2.5** *Le système (1.2.13) est faiblement contrôlable si et seulement si*

$$\overline{\bigcup_{t \geq 0} \text{Im}(\Phi(t) B)} = Z \tag{1.2.19}$$

**Preuve.** Supposons que le système (1.2.13) ne soit pas faiblement contrôlable, alors  $\bigcup_{t \geq 0} \Omega_t$  n'est pas dense dans  $Z$ . Donc, il existe  $z \in Z, z \neq 0$ , tel que  $z \in (\Omega_t)^\perp$ , pour tout  $t \geq 0$ , ce qui est équivalent à l'existence d'un contrôle  $u$  tel que

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^t \Phi(t-s)Bu(s)ds, z \right\rangle_Z &= \int_0^t \langle \Phi(t-s)Bu(s), z \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle u(s), B^*\Phi^*(t-s)z \rangle ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, comme  $B^*\Phi^*(t-s)z$ , défini sur  $[0, t]$ , est dans  $U$ , on a

$$\begin{aligned} B^*\Phi^*(t-s)z &= 0, \quad \text{pour tout } s \in [0, t] \\ B^*\Phi^*(s)z &= 0, \quad \text{pour tout } s \geq 0 \\ \Leftrightarrow \langle B^*\Phi^*(s)z, y \rangle &= 0, \quad \text{pour tout } s \geq 0 \text{ et } y \in Z \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\langle z, \Phi(s)By \rangle = 0, \quad \text{pour tout } s \geq 0 \text{ et } y \in Z$$

et montre que  $z$  est orthogonal à  $\text{Im}(\Phi(s)B)$ , pour tout  $s \geq 0$ , donc  $\text{Im}(\Phi(s)B)$  n'est pas dense dans  $Z$ . ■

Le corollaire suivant est souvent utilisé dans les applications

**Corollaire 1.2.2** *Le système (1.2.13) est faiblement contrôlable si et seulement si*

$$\left[ \int_0^t \Phi(s)BB^*\Phi^*(s)zds = 0, \text{ pour tout } t \geq 0 \right] \implies z \equiv 0 \quad (1.2.20)$$

Avec (1.2.15), la condition (1.2.20) peut être écrite sous la forme

$$HH^*z = 0 \implies z = 0 \quad (1.2.21)$$

**Preuve.** On montre d'abord que la condition est nécessaire, en suite qu'elle est suffisante.

- Condition nécessaire. On suppose que

$$\int_0^t \Phi(s)BB^*\Phi^*(s)zds = 0 \text{ et } z \neq 0$$

donc

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^t \Phi(s) B B^* \Phi^*(s) z ds, z \right\rangle &= \int_0^t \langle \Phi(s) B B^* \Phi^*(s) z, z \rangle ds \\ &= \int_0^t \|B^* \Phi^*(s) z\|^2 ds \\ &= 0 \text{ pour tout } t \geq 0 \end{aligned}$$

et pour tout  $s \in [0, t]$ ,  $B^* \Phi^*(s) z = 0 \implies B^* \Phi^*(t-s) z = 0$ ,  $0 \leq s \leq t$  c'est-à-dire

$$\int_0^t \langle u(s), B^* \Phi^*(t-s) z \rangle ds = \int_0^t \langle \Phi(t-s) B u(s), z \rangle ds = 0$$

Cette dernière inégalité implique que  $z$  est orthogonal à  $\Omega_t$ , pour tout  $t \geq 0$ , donc  $\bigcup_{t \geq 0} \Omega_t$  n'est pas dense dans  $Z$ , i.e. le système (1.2.13) n'est pas faiblement contrôlable.

• Condition suffisante. Si le système (1.2.13) n'est pas faiblement contrôlable, alors il existe  $z \neq 0; z \perp \Omega_t$ , pour tout  $t$ . Par conséquent, pour tout  $s > 0$  et pour tout  $y \in Z$ , ()

$$\langle z, \Phi(s) B y \rangle = \langle B^* \Phi^*(s) z, y \rangle = 0$$

ce qui donne  $B^* \Phi^*(s) z = 0$  et par suite  $\int_0^t \Phi(s) B B^* \Phi^*(s) z ds = 0$ , ce qui est une contradiction. ■

### 1.2.5 Contrôlabilité faible à zéro

**Définition 1.2.3** Le système (1.2.13) est dit contrôlable de façon faible à zéro si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un contrôle  $u \in L^2(0, T; U)$  tel que si  $z$  est solution de (1.2.13) on ait

$$\|z(T)\|_Z < \epsilon$$

**Remarque 1.2.3** 1. L'intérêt du problème de la contrôlabilité à zéro est que si on considère une trajectoire  $\bar{z}$  solution de l'équation de la chaleur sans contrôle, i.e.  $\bar{z}$  solution de:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \mu \Delta z = f & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times (0, T) \\ z(0) = g & \text{dans } \Omega \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

avec  $(f, g) \in L^2(\mathcal{Q}) \times L^2(\Omega)$ . On peut trouver alors  $u \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$  tel que la trajectoire  $z$  solution de (1.2.13) rejoigne exactement la trajectoire  $\bar{z}$  au temps  $T$ .

où  $\mathcal{O}$  est un observatoire distribué  $\mathcal{O} \subset \Omega$ .

2. Un changement de variable de  $t$  en  $T-t$  dans le système précédent nous ramène à un problème de la chaleur rétrograde. Par conséquent, la contrôlabilité du système précédent au temps  $T$  est équivalente à la contrôlabilité au temps 0 du problème rétrograde.

### 1.2.6 Contrôlabilité aux Trajectoires

**Définition 1.2.4**  $(A, B)$  est dite contrôlable à zéro au temps  $T > 0$  si tout état  $\alpha \in Z$  peut être transféré à 0 au temps  $T$  :

$$\forall \alpha \in Z, \exists u \in L^2((0, T); U); \Phi(T)\alpha + Hu = 0.$$

**Remarque 1.2.4** La contrôlabilité exacte revient à pouvoir résoudre en  $u$ ,  $\Phi(T)\alpha + Hu = \beta$ . si  $\Phi(\cdot)$  est un groupe, alors

$$\Phi(T)\alpha + Hu = \beta \iff \Phi(T)\alpha + Hu = \Phi(T)\Phi(-T)\beta \iff \Phi(T)(\alpha - \Phi(-T)\beta) + Hu = 0.$$

Et donc la contrôlabilité exacte est, dans ce cas, équivalente à la contrôlabilité à 0.

**Définition 1.2.5** Soit  $\beta$  une "trajectoire" au temps  $T > 0$  : il existe  $c \in Z, v \in L^2((0, T); U)$  tels que

$$z(T, c, v) = \beta = \Phi(T)c + Hv.$$

Le système est dit contrôlable au temps  $T > 0$  aux trajectoires si pour tout  $\alpha, c \in Z, v \in L^2((0, T); U)$ , il existe  $u \in L^2((0, T); U)$  tels que

$$\Phi(T)\alpha + Hu = \Phi(T)c + Hv.$$

**Proposition 1.2.6** La contrôlabilité aux trajectoires est équivalente à la contrôlabilité à zéro.

**Preuve.**  $\Phi(T)\alpha + Hu = \beta \iff \Phi(T)(\alpha - c) + H(u - v) = 0$ . ■

**Théorème 1.2.1** Les propriétés suivantes sont équivalentes

- (1) Le système (1.2.1) est contrôlable à zéro dans  $Z$  sur  $[0, T]$ ;
- (2) Il existe  $c_T > 0$ , tel que pour tout  $y \in Z, \|\Phi^*(T)y\|^2 \leq c_T \int_0^T \|B^*\Phi^*(t)y\|^2 dt$ ;

(3)  $\text{Im}(\Phi(T)) \subseteq \text{Im}(H_T)$ ;

**Preuve.** Montrons que (1) est équivalent à (3). De la définition, il découle que pour tout  $\alpha \in Z$ , il existe  $u \in L^2((0, T); U)$  tel que

$$Hu = -\Phi(T)\alpha.$$

Ceci est bien équivalent à:  $\text{Im}(\Phi(T)) \subseteq \text{Im}(H_T)$ .

Pour conclure, il suffit de montrer que (2) est équivalent à (3). Pour cela, on utilise le théorème suivante [Soient  $X, Y, E$  trois espaces de Hilbert. Soient  $F \in \mathcal{L}(X, E)$  et  $G \in \mathcal{L}(Y, E)$ . On a:  $\text{Im}(F) \subset \text{Im}(G) \iff \exists c > 0, \|F^*x\| \leq c\|G^*x\|, \forall x \in E$ .

où  $\text{Im}(F)$  et  $\text{Im}(G)$  désignent les images de  $F$  et  $G$ .] appliqué à  $G = H, F = \Phi(T), Y = L^2((0, T); U)$ . ■

### Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $\omega \subset \Omega$  un ouvert. On étudie la contrôlabilité à 0 de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z - \Delta z = \chi_\omega u & \mathcal{Q}_T = \Omega \times (0, T) \\ z = 0 & \Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T) \\ z(., 0) = z_0 & \Omega \end{cases} \quad (1.2.22)$$

**Proposition 1.2.7** Pour la démonstration (voir: [6])

Si  $\omega = \Omega$ , alors  $\forall T > 0, \forall z_0 \in L^2(\Omega), \exists u \in L^2(\Omega \times (0, T))$  tel que  $z(T, z_0, u) = 0$ .

### 1.2.7 Comparaison des différentes notions

**Proposition 1.2.8** On a:

(1) La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité approchée mais la réciproque est fausse.

(2) La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité aux trajectoires mais la réciproque est fausse.

(3) Il n'y a aucune relation entre contrôlabilité approchée et contrôlabilité aux trajectoires.

**Preuve.** (voir: [6]) ■

## 1.3 CONTRÔLABILITÉ RÉGIONALE

Les concepts d'état de système sont attachés un certain nombre qui jouent un rôle fondamentale dans la théorie de la commande.

Il s'agit en général, d'amener l'état du système à des valeurs désirées sur une partie de  $\Omega$ .

### 1.3.1 Définition de la contrôlabilité régionale et caractérisation

Soit  $z_d \in L^2(\omega)$  un état désiré donnée, le problème de la contrôlabilité régionale consiste à savoir si l'on peut trouver un contrôle  $u \in U$  permettant d'amener l'état du système (1.2.1) de  $z_0$  à  $z_d$  sur la région  $\omega$ .

**Définition 1.3.1**  $\diamond$  *Le système (1.2.1) est dit exactement régionalement contrôlable sur  $\omega$  si pour tout  $z_d \in Z$ , il existe un contrôle  $u \in U$  tel que*

$$z_u(T) |_{\omega} = z_d \quad (1.3.1)$$

$\diamond$  *Le système (1.2.1) est dit faiblement régionalement contrôlable sur  $\omega$  si  $\forall \epsilon \geq 0$ , il existe un contrôle  $u \in U$  tel que*

$$\|z_u(T) |_{\omega} - z_d\|_{L^2(\omega)} \leq \epsilon \quad (1.3.2)$$

*Le système (1.2.1) sera aussi dit  $\omega$ -exactement (resp. faiblement) contrôlable où  $z_u(\cdot)$  est donnée par (1.2.2) et  $z |_{\omega}$  désigne la restriction de  $z$  à  $\omega$ .*

**Remarque 1.3.1** *Les définitions ci-dessus signifient que l'on ne s'intéresse qu'à l'état atteint sur la région  $\omega$ .*

*Le contrôle  $u$  dépend de la variable du temps mais implicitement, il dépend aussi du sous-domaine  $\omega$ .*

*Plusieurs difficultés sont sous-jacentes à ces définitions.*

*Notons, en partie que l'opérateur  $B$  est liée au mode d'excitation du système. Si le système excite par une action ponctuelle où frontière, l'opérateur  $B$  n'est plus borné donc il faut revoir le choix des espaces. Cependant l'étude peut être faite de la même manière.*

On pose  $H : L^2(0, T; U) \longrightarrow Z$  et  $\chi_\omega : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\omega)$  défini par:

$$Hu = \int_0^T \Phi(T-s) Bu(s) ds \quad \text{et} \quad \chi_\omega z = z|_\omega \quad (1.3.3)$$

L'adjoint de  $\chi_\omega$  est  $\chi_\omega^* : L^2(\omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$  défini par:

$$(\chi_\omega^* z) y = \begin{cases} z(y) & y \in \omega \\ 0 & y \in \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (1.3.4)$$

L'opérateur  $H$  étant défini, les définitions précédentes sont équivalentes à

- $\text{Im } \chi_\omega H = L^2(\omega)$  dans le cas de la contrôlabilité régionale exacte.
- $\overline{\text{Im } \chi_\omega H} = L^2(\omega)$  pour le cas de la contrôlabilité régionale faible.

La contrôlabilité régionale exacte peut être caractérisée par:

**Proposition 1.3.1** Si  $u \in L^2(0, T; U)$ , alors le système (1.2.1) est exactement régionalement contrôlable si et seulement si pour tout  $z^* \in L^2(\omega)$  il existe  $\eta > 0$ , tel que:

$$\|z^*\|_{L^2(\omega)} \leq \eta \|B^* \Phi^*(\cdot) z^*\|_{L^2(0, T; U)} \quad (1.3.5)$$

**Proposition 1.3.2** a- Le système (1.2.1) est exactement régionalement contrôlable si et seulement si:

$$\ker \chi_\omega + \text{Im } H = L^2(\Omega) \quad (1.3.6)$$

b- Le système (1.2.1) est faiblement régionalement contrôlable si et seulement si:

$$\ker \chi_\omega + \overline{\text{Im } H} = L^2(\Omega) \quad (1.3.7)$$

**Preuve.** a- Soit  $z \in L^2(\Omega)$ . On a  $z = z_1 + z_2$  avec  $z_1 = 0$  sur  $\omega$  et  $z_2 = 0$  sur  $\Omega \setminus \omega$ . le système (1.2.1) étant exactement régionalement contrôlable donc

$z_2 \in \text{Im } \chi_\omega H$ , autrement dit il existe  $u \in U$  tel que  $z_2 = Hu$ .

$z_1 = 0$  sur  $\omega$  donc  $z_1 \in \ker \chi_\omega$  alors:

$$z \in \ker \chi_\omega + \text{Im } H \Rightarrow \ker \chi_\omega + \text{Im } H = L^2(\Omega)$$

Maintenant, soit  $z \in L^2(\omega)$  alors:

$$\chi_\omega^* z \in L^2(\Omega) \Rightarrow \exists z_1 \in \ker \chi_\omega, \exists z_2 \in \text{Im } H$$

Tel que:

$$\chi_\omega^* z = z_1 + z_2 \Rightarrow \exists z_1 \in \ker \chi_\omega, \exists z_2 \in \text{Im } H$$

Tel que:

$$\chi_\omega \chi_\omega^* z = \chi_\omega z_1 + \chi_\omega z_2 \Rightarrow \exists z_1 \in \ker \chi_\omega, \exists z_2 \in \text{Im } H$$

Tel que:

$$z = \chi_\omega z_2 \Rightarrow z \in \text{Im } (\chi_\omega H) \quad \text{donc} \quad \text{Im } (\chi_\omega H) = L^2(\omega)$$

Alors le système (1.2.1) est exactement régionalement contrôlable.

b- Si le système (1.2.1) est faiblement régionalement contrôlable alors:

$z_2 \in \overline{\text{Im } \chi_\omega H}$  ou encore  $\forall \epsilon > 0$  il existe  $u \in U$  tel que

$$\|z_2 - \chi_\omega H\|_{L^2(\omega)} \leq \epsilon$$

Il vient  $\|z_2 - H_u\|_{L^2(\omega)} \leq \epsilon$  c'est-à-dire  $z_2 \in \overline{\text{Im } H}$  alors:

$z_2 \in \ker \chi_\omega + \overline{\text{Im } H}$  donc  $\ker \chi_\omega + \overline{\text{Im } H} = L^2(\Omega)$ . ■

**Remarque 1.3.2** Le système (1.2.1) est faiblement régionalement contrôlable sur  $\omega$  si et seulement si:

$$\ker H^* \cap \text{Im } \chi_\omega^* = \{0\}. \quad (1.3.8)$$

**Corollaire 1.3.1** Le système (1.2.1) est faiblement régionalement contrôlable dans  $L^2(\omega)$  sur  $[0, T]$  si et seulement si l'une des propriétés suivante est satisfaite.

- ◆  $(\chi_\omega H)^* (\chi_\omega H)$  est inversible.
- ◆  $\overline{\text{Im } (\chi_\omega H)} = L^2(\omega)$ .
- ◆  $\ker (\chi_\omega H)^* = \ker (\chi_\omega H)^* (\chi_\omega H) = \{0\}$ .
- ◆  $(B^* \Phi^*(s) \chi_\omega^*) z = 0; \forall s \in [0, T] \implies z = 0$ .
- ◆ Si le semi-groupe est analytique tel que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{[\text{Im } (\chi_\omega A^n \Phi(s) B)]} = L^2(\omega); \forall s \in ]0, T]$$

**Remarque 1.3.3** Il est clair que:

◇ Un système qui est exactement (resp. faiblement) contrôlable est exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable.

◇ Un système qui est exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable sur  $\omega_1$  et exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable sur  $\omega_2$  pour tout  $\omega_2 \subset \omega_1$ .

◇ La définition (1.3.1) est général et englobe le cas de la contrôlabilité classique (cas  $\omega = \Omega$ ).

◇ Si

$$J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \quad (1.3.9)$$

Désigne le coût de transfert, alors pour tout  $\omega \subset \Omega$ , le coût de transfert régional sur  $\omega$  est inférieur à celui sur tout  $\Omega$ .

En effet:

$$W_\Omega = \{u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } z_u(T) = z_d \text{ sur } \Omega\}$$

$$W_\omega = \{u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } z_u(T) = z_d \text{ sur } \omega\}$$

Alors  $W_\Omega \subset W_\omega$  et donc:

$$\min_{W_\omega} J(u) \leq \min_{W_\Omega} J(u) \quad (1.3.10)$$

◇ On peut trouver des systèmes qui sont régionalement contrôlable mais qui ne sont pas contrôlable sur tout le domaine. Ceci est illustré par l'exemple suivant:

**Contre-exemple:**

Considérons le système décrit par l'équation parabolique:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, t) = \chi_{[a,b]} u(t) & \text{dans } \mathcal{Q} = ]0, 1[ \times ]0, T[ \\ z(x, 0) = 0 & \text{dans } ]0, 1[ \\ z(0, t) = z(1, t) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \end{cases} \quad (1.3.11)$$

Avec  $a$  et  $b$  tels que  $(b - a) \in \mathcal{Q}$  et  $[a, b] \subset ]0, 1[$ . Alors on a le résultat suivant:

Le système (1.3.11) n'est pas contrôlable sur  $]0, 1[$ , (voir: [8]).

Mais il peut être contrôlable sur une région  $[\alpha, \beta]$ , pour  $\alpha$  et  $\beta$  convenablement choisis (voir: [8];[16]).

Dans la suite on suppose que  $A$  admet un système complet de fonction propres  $(\varphi_i)_{i \geq 1}$  associées aux valeurs propres  $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ . Sans perte de généralité, supposées simples.

Le semi-groupe engendré par  $A$  est donnée par:

$$\Phi(t)z = \sum_{i \geq 1} \exp(\lambda_i t) \langle \varphi_i, z \rangle_Z \varphi_i$$

Et la solution de (1.2.1) s'exprime pour  $z_0 = 0$

$$z_u(t) = \sum_{i \geq 1} \int_0^t \exp(\lambda_i(t-s)) \langle B^* \varphi_i, u(s) \rangle_{U^* \times U} \varphi_i ds$$

On note par:

$$F = \{i \geq 1 / B^* \varphi_i = 0\} \quad \text{et} \quad J = F^c$$

On a (1.2.1) est faiblement contrôlable si et seulement si:

$$F = \emptyset \quad (\text{ensemble vide})$$

Dans le cas de la contrôlabilité régionale nous avons le résultat

**Théorème 1.3.1** On suppose que (1.2.1) est non contrôlable ( $F \neq \emptyset$ ). alors nous avons l'équivalence entre

1. Le système (1.2.1) est régionalement faiblement contrôlable sur  $\omega$ .
2. La famille  $\{\chi_\omega \varphi_i\}_{i \in J}$  est totale dans  $L^2(\omega)$ .
3. Si  $z \in L^2(\Omega)$  vérifiant  $\int_\omega z(x) \varphi_i(x) dx = 0$  pour tout  $i \in J$  alors  $z = 0$ .
4. Si  $\sum_{i \in F} \alpha_i \varphi_i = 0$  sur  $\Omega \setminus \omega \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad (\forall i \in F)$ .

**Preuve.** (1  $\Leftrightarrow$  2) et (2  $\Leftrightarrow$  3)

Résultent du faite que

$$\overline{\text{Im } \chi_\omega H} = L^2(\omega) \Leftrightarrow \ker H^* \chi_\omega^* = \{0\}.$$

(3  $\Rightarrow$  4)?

Considérons  $(\alpha_i)_{i \in F}$  tel que  $\sum_{i \in F} \alpha_i \varphi_i = 0$  sur  $\Omega \setminus \omega$

Soit

$$z = \chi_\omega \sum_{i \in F} \alpha_i \varphi_i \in L^2(\Omega)$$

On a  $\int_\omega z(x) \varphi_i(x) dx = 0$  pour tout  $i \in J \Rightarrow z = 0$  par conséquent  $\alpha_i = 0, \forall i \in F$ .

(4  $\Rightarrow$  3)?

Soit  $z \in L^2(\Omega)$  tel que  $\int_\omega z(x) \varphi_i(x) dx = 0, \forall i \in J$

$$\chi_\omega^* z = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \varphi_i$$

Où  $\alpha_i = \int_\Omega \chi_\omega^* z(x) \varphi_i(x) dx = \int_\omega z(x) \varphi_i(x) dx \Rightarrow \alpha_i = 0. \blacksquare$

**Conclusion 1.3.1**  $\blacklozenge$  Si  $F^c$  est fini alors (1.2.1) n'est pas contrôlable sur aucun  $\omega \subset \Omega$ .

$\blacklozenge$  Si  $F$  est fini alors (1.2.1) est contrôlable sur tout  $\omega \subset \Omega$ .

## 1.4 CONTRÔLE OPTIMAL

Dans cette partie, nous allons déterminer le contrôle optimal permettant d'atteindre une cible donnée. Dans le cas où le système (1.2.1) est contrôlable, il y aura généralement une infinité des contrôles qui répondent à la question.

- Parmi ces contrôles existe-il un, qui soit de norme minimale?
- Peut-on déterminer explicitement ce contrôle en fonction des divers paramètres du problème?

L'optimisation sert à trouver le contrôle qui donne la contrôlabilité avec un coût minimale donné par une fonction

$$J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$$

défini sur l'espace des contrôles  $U$ .

Soit  $z^d \in H^1(\Omega)$  un état désiré. On pose le problème de transférer, à moindre coût, le système (1.2.1) de  $z_0$  vers  $z^d$  à l'instant  $T$ . Ainsi la question devient:

Existe-il un contrôle à énergie minimale  $u \in U$  tel que  $z(T) = z^d$ ?

Le problème du contrôle optimal peut être formulé ainsi:

$$\begin{cases} \min_{u \in U_{ad}} J(u) = \min_{u \in U_{ad}} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \\ U_{ad} = \{u \in U \text{ tq } z(T) = z^d\} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Les objectifs de cette théorie sont les suivants :

- 1) Etudier l'existence de  $u \in U_{ad}$  qui réalise le minimum dans (1.4.1), on dit alors que  $u$  est le contrôle optimal.
- 2) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $u$  soit contrôle optimal.
- 3) Obtenir les propriétés du contrôle (s) optimal (aux) à partir de (2).

Posons

$$\begin{aligned} G &= \{g \in H^1(\Omega), \text{ tel que } g = 0 \text{ sur } \omega\} \\ \bar{G} &= \{g \in H^1(\Omega), \text{ tel que } g = 0 \text{ sur } \Omega/\omega\} \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

On considère le système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z = Az + Bu & Q, \\ z(\zeta, t) = 0 & \Sigma, \\ z(x, 0) = z_0(x) & \Omega. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

La méthode de la construction est basée sur les trois étapes suivantes:

**Etape 1:**

Pour  $\varphi_0 \in \overline{G}$ ; on considère le système:

$$\begin{cases} \varphi'(x, t) = -A^* \varphi(x, t) & Q, \\ \varphi(\zeta, t) = 0 & \Sigma, \\ \varphi(x, T) = \varphi_0(x) & \Omega. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

qui admet une solution unique  $\varphi \in L^2(0, T, H^1(\Omega)) \cap C^0(0, T, L^2(\Omega))$ .

**Etape 2:**

Considérons le système:

$$\begin{cases} \psi'(x, t) = A\psi(x, t) + BB^*\varphi(x, t) & Q, \\ \psi(\zeta, t) = 0 & \Sigma, \\ \psi(x, 0) = z_0(x) & \Omega. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

Pour  $\varphi_0 \in \overline{G}$ ; l'équation (1.4.4) fournit  $\varphi$  puis l'équation (1.4.5) donne  $\psi(T)$ .

Ensuite, on définit l'opérateur  $M$  par:

$$M\varphi_0 = P(\psi(T)) \quad \text{où } P = \chi_\omega^* \chi_\omega,$$

$M$  est un opérateur affine qui se décompose comme

$$M\varphi_0 = P(\psi_1(T) + \psi_2(T)),$$

où  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont solutions des systèmes

$$\begin{cases} \psi_1'(x, t) = A\psi_1(x, t) & Q, \\ \psi_1(\zeta, t) = 0 & \Sigma, \\ \psi_1(x, 0) = z_0(x) & \Omega. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

$$\begin{cases} \psi_2'(x, t) = A\psi_2(x, t) + BB^*\varphi(x, t) & Q, \\ \psi_2(\zeta, t) = 0 & \Sigma, \\ \psi_2(x, 0) = 0 & \Omega. \end{cases} \quad (1.4.7)$$

**Etape 3:**

On définit l'opérateur linéaire, borné et symétrique  $\Lambda : \overline{G} \longrightarrow \overline{G}^*$  par

$$\forall \varphi_0 \in \overline{G}, \Lambda \varphi_0 = P \psi_2(T).$$

Avec ces notations, le problème de la contrôlabilité régionale conduit à la résolution de l'équation:

$$\Lambda \varphi_0 = P (z^d - \psi_1(T)). \quad (1.4.8)$$

En multipliant l'équation (1.4.8) par  $\varphi_0$ , on obtient:

$$\langle \Lambda \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|^2 dt \quad (1.4.9)$$

Pour assurer l'existence de la solution de l'équation (1.4.8); on introduit l'application

$$\varphi_0 \in \overline{G} \longrightarrow \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|^2 dt,$$

qui définit une semi norme sur  $\overline{G}$ . Nous avons alors le résultat:

**Proposition 1.4.1** *Si le système (1.4.3) est  $\omega$ -faiblement contrôlable, l'équation (1.4.8) admet une solution unique  $\varphi_0 \in \overline{G}$ , le contrôle qui transfère (1.4.3) dans  $G$  à l'instant  $T$  est donné par*

$$u^*(t) = B^* \varphi(x, t) \quad (1.4.10)$$

**Preuve.** 1) Si le système (1.4.3) est  $\omega$ -faiblement contrôlable, alors l'application

$$\varphi_0 \longrightarrow \|\varphi_0\|^2 = \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|^2 dt$$

définit une norme sur  $\overline{G}$ , En effet

$$\|\varphi_0\|_{\overline{G}}^2 = 0 \implies B^* \Phi^*(T-t) \varphi_0 = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

le système (1.4.3) est  $\omega$ -faiblement contrôlable, donc

$$\ker H^* \chi_\omega^* = \{0\}.$$

Par conséquent

$$B^* \Phi^*(T-t) \varphi_0 = 0 \implies \varphi_0 = 0$$

Il résulte qu'on a une norme sur  $\overline{G}$ .

L'opérateur  $\Lambda$  est un isomorphisme de  $\overline{G}$  dans  $\overline{G}^*$  avec

$$\langle \Lambda \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|^2 dt = \|\varphi_0\|_{\overline{G}}^2,$$

d'où l'existence de la solution de l'équation (1.4.8).

2) Montrons que le contrôle  $u^*$  donné par (1.4.8) minimise la fonction coût

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt.$$

Comme la fonction  $J$  est quadratique donc elle est strictement convexe, il suffit de vérifier que

$$J'(u^*)(v - u^*) \geq 0.$$

On a

$$J'(u^*)(v - u^*) = \int_0^T u^*(v - u^*) dt = \int_0^T (B^* \varphi(x, t))(v - u^*) dt, \quad \forall v \in U$$

Avec

$$\begin{aligned} \langle B^* \varphi(x, t), v - u^* \rangle &= \langle \varphi(T), z_v(T) - z_{u^*}(T) \rangle - \langle \varphi(0), z_v(0) - z_{u^*}(0) \rangle \\ &\quad - \int_{\Sigma} \left( (z_v - z_{u^*}) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{A^*}} - \varphi \left( \frac{\partial z_v}{\partial \nu_A} - \frac{\partial z_{u^*}}{\partial \nu_A} \right) \right) d\Sigma \\ &= \langle \varphi_0, z_v(T) - z_{u^*}(T) \rangle = J'(u^*)(v - u^*), \end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{aligned} \chi_{\omega} z_v(T) - \chi_{\omega} z_{u^*}(T) &= \chi_{\omega} z_v(T) - z_d + z_d - \chi_{\omega} z_{u^*}(T) = 0 \\ \implies \langle \varphi_0, z_v(T) - z_{u^*}(T) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

Par conséquent

$$J'(u^*)(v - u^*) = 0,$$

Ce qui établit l'optimalité du contrôle  $u^*$ . ■

## 1.5 CONTRÔLABILITÉ RÉGIONALE ET PÉNALISATION

On suppose que l'ensemble  $U_{ad}$  non vide donc le système (1.4.3) est exactement régionalement contrôlable sur  $U_{ad}$ . On veut résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{cases} \min_{u \in U_{ad}} J(u) = \min_{u \in U_{ad}} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \\ U_{ad} = \{u \in U, z(T) - z^d \in G\} \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Pour tout  $\epsilon > 0$ , considérons le problème de pénalisation

$$\begin{cases} \min_{(u,z) \in G} J_\epsilon(u, z), \\ J_\epsilon(u, z) = \left( \int_0^T \|u(t)\|^2 dt + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^T \|z'(t) - Az(t) - Bu(t)\|^2 dt \right), \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Où  $G$  est l'ensemble des couples  $(u, z)$  vérifiant

$$\left\{ u \in U \text{ tq } \begin{cases} z'(t) - Az(t) - Bu(t) \in L^2(0, T; \Omega) \\ z(0) = z_0 \\ z(T) - z^d \in G \end{cases} \right\} \quad (1.5.3)$$

Alors, nous avons le résultat suivant:

**Proposition 1.5.1** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , le problème (1.5.2) admet une solution unique qu'on note  $(u_\epsilon, z_\epsilon)$ . La suite  $((u_\epsilon, z_\epsilon))_\epsilon$  converge faiblement vers  $(u^*, z^*)$  quand  $\epsilon$  tend vers zéro. De plus  $u^*$  est la solution du problème (1.5.1) donnée par*

$$u^*(t) = B^*p(t),$$

où  $p(t)$  et  $z^*(t)$  sont solutions du système d'optimalité

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \\ p'(t) + A^*p(t) = 0 \\ p(T) \in G^* \end{cases} \quad (1.5.4)$$

**Preuve.** pour la démonstration voir [16]. ■

## 1.6 THÉORÈME DE PROLONGEMENT UNIQUE

La méthode de H.U.M ou Hilbert Uniqueness Method, a été introduite par J. L. Lions [33], pour l'étude de la contrôlabilité de l'équation des ondes. Elle a ensuite été appliquée à un large éventuel problème où on construit l'espace des états atteignable, cette construction est basée sur un théorème de prolongement (ou continuation) unique: Holmgren pour les ondes, Mizohata ou Saut-Scheurer pour la chaleur. Ces théorèmes sont à la base de la plupart des méthodes de résolution de problèmes de contrôle et d'identification.

Nous allons d'abord présenter le théorème d'unicité de Cauchy pour l'équation de la chaleur linéaire.

Considérons la solution de l'équation parabolique

$$\frac{\partial z}{\partial t} + Az = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q} \quad (1.6.1)$$

où  $A$  est un opérateur elliptique d'ordre 2 sur lesquels les conditions seront précisées pour chaque théorème. Dans tous les cas, l'ouvert  $\Omega$  doit être connexe et  $\mathcal{Q} = \Omega \times ]0, T[$ .

### **Théorème 1.6.1** (*Unicité de Cauchy*)

Soit  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  une partie non vide du bord, on note  $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[$ , soit  $z$  vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + Az = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases} \quad (1.6.2)$$

alors  $z$  est identiquement nulle dans  $\mathcal{Q}$ . (voir [43]).

Les deux théorèmes qui suivent interviennent la notion de la composante horizontale dans un ouvert d'espace-temps.

### **Définition 1.6.1** (*Composante horizontale*)

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert inclus dans  $\mathcal{Q}$ , on dit qu'un point  $p \in \mathcal{O}$  appartient à la composante horizontale de  $\mathcal{O}$  s'il existe une courbe horizontale joignant  $p$  à  $\mathcal{O}$  c'est-à-dire à une ligne dont les points ont tous la même coordonnée en temps.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de S. Mizohata suivant

**Théorème 1.6.2** (*S. Mizohata*)

Soient  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^p$  et  $A$  un opérateur elliptique du second ordre dont les coefficients appartiennent à  $C^\infty(\mathcal{Q})$ . Soit  $z$  la solution de (1.6.2) pour l'opérateur  $A$  et  $\mathcal{O}$  un ouvert inclus dans  $\mathcal{Q}$ . Toute solution de (1.6.2) qui s'annule dans  $\mathcal{O}$  s'annule dans la composante horizontale de  $\mathcal{O}$ .

La preuve de S. Mizohata (voir [56]) ne conduit pas de façon évidente à un affaiblissement de la régularité des coefficients de l'opérateur. Or il est important de point de vue pratique de travailler avec des coefficients irréguliers. Les auteurs donnent l'exemple où l'équation parabolique est obtenue par linéarisation d'un opérateur non-linéaire autour d'une solution qui n'est pas nécessairement régulière. Le résultat principal est le suivant:

**Théorème 1.6.3** (*J. C. Saut et B. Scheurer*)

Soient  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^p$ ,  $A$  un opérateur elliptique du second ordre défini par

$$Au = \sum_{i,j=1}^p a_{ij}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} u + \sum_{i=1}^p b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} u + c(x,t) u,$$

où les coefficients de  $A$  vérifient

$$a_{ij} \in C^1(\mathcal{Q}); 1 \leq i, j \leq p,$$

$$b_i \in L_{loc}^\infty(\mathcal{Q}); 1 \leq i \leq p,$$

$$c \in L^\infty(0, T; L_{loc}^1(\Omega)).$$

Supposons que la solution de (1.6.2) vérifie  $z \in L^2(0, T; L_{loc}^2(\Omega))$  et qu'elle s'annule dans un ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathcal{Q}$ . Alors  $z$  s'annule dans la composante horizontale de  $\mathcal{O}$ . (voir [35]).

## 1.7 THÉORÈME DE HOLMGREN ET SES CONSÉQUENCES

Soit l'équation hyperbolique suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} z - \Delta z = \xi \quad \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times ]0, T[, \\ z(0) = z_0 \quad \text{dans } \Sigma = \Gamma \times ]0, T[, \\ z'(0) = z_1 \quad \text{dans } \Sigma = \Gamma \times ]0, T[, \\ z = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (1.7.1)$$

On a le résultat suivant:

**Lemme 1.7.1** *Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière lipchitzienne. Pour tout*

$$\xi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)); z_0 \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad z_1 \in L^2(\Omega),$$

*le système (1.7.1) admet une solution unique*

$$z \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

*De plus, il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\|z\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|z'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq c \left( |\nabla y_0| + |z_1| + \|\xi\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \right)$$

**Théorème 1.7.1** *(L. Hormander [31])*

*Soient  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  deux ouverts convexes de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$  et  $P(D)$  un opérateur différentiel à coefficients constants tel que tout plan  $\pi$  caractéristique par rapport à  $P(D)$  et vérifiant  $\pi \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$  satisfait aussi  $\pi \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ . Alors toute solution  $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$  de l'équation  $P(D)u = 0$  telle que*

$$u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}_1 \quad \text{vérifie} \quad u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}_2. \quad (1.7.2)$$

*On se donne  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$  quelconque et des constantes  $\delta, \tau > 0$  telle que  $\tau > 2|y_1 - y_2|$ , on construit les convexes:*

$$\mathcal{O}_1 = B(z_1, \delta) \times ]0, \tau[,$$

$$\mathcal{O}_2 = \cup_{\lambda \in [0, 1]} (B((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2, \delta) \times ]\lambda|y_1 - y_2|, \tau - \lambda|y_1 - y_2|])$$

On a d'après le théorème précédent le critère d'unicité suivant:

**Lemme 1.7.2** Soit  $z \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$  une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Delta z = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2), \\ z = 0 & \text{dans } \mathcal{O}_1. \end{cases}$$

Alors on a  $z = 0$  dans  $\mathcal{O}_2$ . (voir [33]).

On considère un ouvert borné convexe  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$ . Soit un point  $y \in \Gamma$  et  $\eta > 0$ , on définit  $\Gamma_0 = \Gamma \cap B(y, \eta)$  et on introduit:

$$d(\Omega, \Gamma_0) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} d(x, \Gamma_0) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \left( \inf_{z \in \Gamma_0} |x - z| \right),$$

c'est-à-dire la plus grande distance entre un point  $x \in \Omega$  et la partie de frontière  $\Gamma_0$ , on a le théorème d'unicité suivant:

**Théorème 1.7.2** Soit  $T > 2d(\Omega, \Gamma_0)$ ,  $z$  est la solution faible du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Delta z = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times ]0, T[, \\ z = 0 & \text{dans } \Sigma = \Gamma \times ]0, T[, \end{cases}$$

telle que

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \quad \text{dans } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[.$$

Alors

$$z \equiv 0.$$

Pour la démonstration voir [33].

**Remarque 1.7.1** On a  $d(\Omega, \Gamma_0) < \text{diamètre de } \Omega$ ,  $\forall \Gamma_0 \subset \Gamma$ , et donc on particulier; un résultat d'unicité pour  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  quelconque avec  $\Gamma \geq 2 \times \text{diamètre de } \Omega$ .

## 1.8 NOTION D'ACTIONNEUR

Les échanges entre un système réel et son environnement se font par l'intermédiaire des actionneurs, ils permettent d'exciter le système. il peuvent être de nature, de forme, de conception diverses. Les actionneurs que l'on rencontre, dans les systèmes physiques, peuvent être de type.

### 1.8.1 Ponctuel fixe

Tel un brûleur dans un système de diffusion

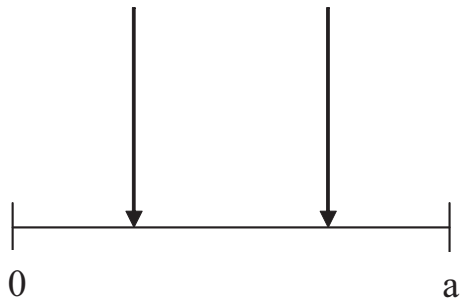


Fig (1.8.1) système monodimensionnel excité par deux actionneurs ponctuels.

### 1.8.2 Ponctuel mobile

C'est un actionneur de type ponctuel, dont la position varie avec le temps.

C'est le cas, par exemple, d'un système excité par un rayon laser de direction variable.

### 1.8.3 Zone

Tel est le cas, par exemple d'un système de diffusion avec une zone de chauffe importante.

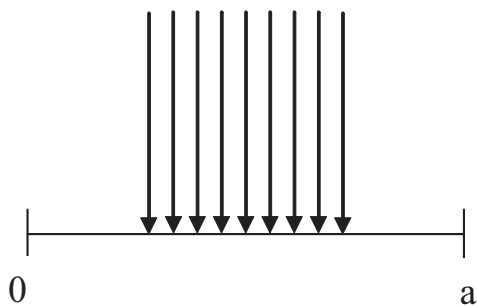


Fig (1.8.2) système monodimensionnel excité par un actionneur zone.

### 1.8.4 Filament

Tel un four chauffé par une résistance électrique dans un système bidimensionnel.

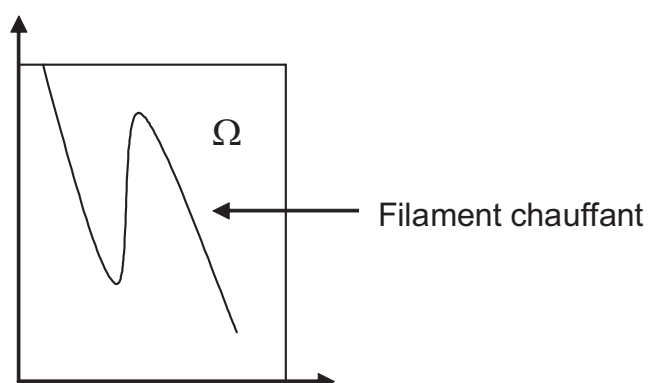


Fig (1.8.3) système excité par un actionneur Filament.

**Définition 1.8.1** Soit  $\Omega_i$  fermé contenu dans  $\Omega$  et  $g_i \in L^2(\Omega_i)$ .

On appelle actionneur zone le couple  $(\Omega_i, g_i)$  où  $\Omega_i$  représente le support de l'actionneur  $g_i$  définit la répartition spatiale de l'actionneur.

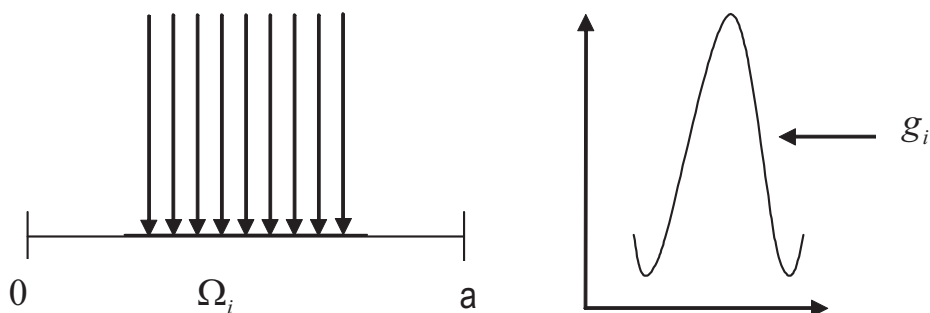


Fig (1.8.4) support et répartition spatiale de l'actionneur  $(\Omega_i, g_i)$ .

### 1.8.5 Applications

#### Actionneur ponctuel dans les systèmes de diffusion:

Considérons le système (1.8.1), décrit par:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z(t) - \Delta z(t) = \sum_{i=1}^p \delta_{b_i} u_i(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ z(\zeta, t) = 0 & \text{dans } \Sigma \end{cases} \quad (1.8.1)$$

(1.8.1) est un système excité par  $p$  actionneurs ponctuels  $(b_i, \delta_{b_i})_{1 \leq i \leq p}$  localisés aux points  $b_i$  de  $\Omega$ , (1.8.1) est également un cas particulier du système (1.2.1) avec:

$$Az(t) = \Delta z(t)$$

pour

$$z(t) \in \mathcal{D}(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

et

$$H : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$

avec

$$Bu(t) = \sum_{i=1}^p \delta_{b_i} u_i(t)$$

où  $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$

**Remarque 1.8.1** Dans le cas d'actionneur frontière les définitions restent les mêmes. Nous parlerons d'actionneur zone frontière  $(\Gamma_i, g_i)$  où  $\Gamma_i \in \Gamma, g_i \in L^2(\Gamma_i)$  et d'actionneur ponctuel frontière  $(b_i, \delta_{b_i}), b_i \in \Gamma$ .

#### Actionneurs frontières dans les systèmes de diffusion

Deux cas sont distingués:

**Actionneurs zones frontières:** Soit le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z(t) - \Delta z(t) = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ z(\zeta, t) = \sum_{i=1}^p g_i(\zeta) u_i(t) & \text{dans } \Sigma \end{cases} \quad (1.8.2)$$

(1.8.2) est un modèle d'un système excité sur sa frontière, par  $p$  actionneurs zone  $(\Gamma_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$  avec  $\Gamma_i \subset \Gamma, g_i \in L^2(\Gamma_i)$ , pour tout  $i, 1 \leq i \leq p$ . (1.8.2) est également un cas particulier de (1.2.1), pour cela:

On pose  $Az(t) = \Delta z(t)$ , et on introduit l'opérateur de Green  $G$ , avec

$$G : \begin{array}{l} L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ h \longmapsto Gh = z \end{array}$$

avec  $\Delta z = 0$  dans  $\Omega$  et  $z = h$  sur  $\Gamma$ .

(1.8.2) admet une solution faible unique donné par:

$$z(t) = - \sum_{i=1}^p \int_0^t \Phi(t-\tau) G g_i u_i(\tau) d\tau \quad (1.8.3)$$

La difficulté, dans ce cas, vient du fait que, en général, pour  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$ , alors  $z(T) \notin L^2(\Omega)$ , il est possible de choisir des contrôles  $u$  plus réguliers.

**Actionneurs ponctuels frontières:** Le système est décrit par:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z(t) - \Delta z(t) = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ z(\zeta, t) = \sum_{i=1}^p \delta_{b_i}(\zeta) u_i(t) & \text{dans } \Sigma \end{array} \right. \quad (1.8.4)$$

(1.8.4) représenté un système excité sur sa frontière en  $p$  points  $b_i$ .

Pour définir la solution d'un tel système, il faut utiliser la méthode de transposition proposée par Lions et Magenes (voir: [36]) Ainsi (1.8.4) admet une solution faible unique telle que  $z(., T)$  a un sens dans  $H^{-\beta-1}(\Omega)$ ,  $\beta > \frac{1}{2}$ , quand  $u \in L^2(0, T; U)$ .

Nous verrons plus loin, qu'en imposant plus de régularité à  $u$ , il est possible de ramener  $z(., T)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

La difficulté dans l'analyse de la contrôlabilité des systèmes que nous venons de voir, vient donc essentiellement du fait que l'état atteint, pour une certaine régularité sur  $u$  peut être dans un espace plus grand que l'espace d'état  $Z$ . En changeant l'espace d'état, nous pouvons avoir la contrôlabilité seulement en pratique les états à atteindre sont de type  $L^2$ , donc il faudra nécessairement, pour les systèmes (1.8.4) et (1.8.2) jouer sur la régularité des contrôles  $u$ .

Avant de s'intéresser à l'étude des actionneurs et la relation liant les actionneurs à la notion de contrôlabilité.

### 1.8.6 Actionneur stratégique

La contrôlabilité d'un système peut être affectée par le choix des actionneurs; que ce soit par la localisation du support des actionneurs, ou par la répartition de l'action sur ces supports.

Nous introduisons les définitions suivantes:

**Définition 1.8.2** Soit  $Z_i$  un sous espace vectoriel de l'espace d'état  $Z$ . Nous dirons que l'actionneur  $(\Omega_i, g_i)$  (ou  $(b_i, \delta_{b_i})$ ) est stratégique dans  $Z_i$  si le système qu'il excite est exactement contrôlable dans  $Z_i$ .

**Définition 1.8.3** Nous dirons que l'actionneur  $(\Omega_i, g_i)$  (ou  $(b_i, \delta_{b_i})$ ) est stratégique dans  $Z_i$  si le système qu'il excite est faiblement contrôlable dans  $Z_i$ .

Ces définitions restent valables pour des actionneurs de type frontière.

Si le système est excité par  $p$  actionneurs zones  $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$  (ou ponctuels  $(b_i, \delta_{b_i})_{1 \leq i \leq p}$ ) alors nous disons que: la suite d'actionneurs  $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$  (ou  $(b_i, \delta_{b_i})_{1 \leq i \leq p}$ ) est stratégique si le système excité par ces  $p$  actionneurs est faiblement contrôlable.

**Remarque 1.8.2** Il est évident que si le système est excité par  $p$  actionneurs et si, pour un certain  $i_0, 1 \leq i_0 \leq p$ , l'actionneur d'indice  $i_0$  est stratégique, alors la suite des  $p$  actionneurs est stratégique.

#### Caractérisation des actionneurs stratégiques

Considérons le système

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z(0) = z_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Supposons que  $A$  est auto-adjoint à résolvante compacte et engendre un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  sur  $Z$  et admet un système orthonormé complet de fonctions propres  $(\varphi_{nj})$  associées aux valeurs propres  $(\lambda_n)$ ,  $\lambda_n$  étant multiplicité  $r_n$ .

Nous avons alors la propriété de caractérisation suivante:

**Proposition 1.8.1** *La suite d'actionneurs  $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$  est stratégique si et seulement si:*

- i)  $p \geq \sup r_n$
- ii)  $rg(G_n) = r_n$  pour tout  $n$  où  $G_n$  est la matrice d'ordre  $(p, r_n)$  et d'élément:  $(G_n)_{ij} = \langle g_i, \varphi_{nj} \rangle_{L^2(\Omega)}$ ,  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, r_n$

*cette caractérisation suppose donc, en particulier que le plus grand ordre de multiplicité des valeurs propre de  $A$  est fini.*

### Existence d'actionneurs stratégiques

Supposons que le système (1.2.1) est excité par  $p$  actionneurs dont les supports  $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq p}$  sont fixes.

Nous avons le résultat suivant:

**Proposition 1.8.2** *Supposons que  $p \geq \sup_n (r_n)$ , pour toute suite  $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq p}$  d'ouverts contenus dans  $\Omega$ , il existe des fonctions  $(g_i)_{1 \leq i \leq p}$  telles que:*

- i)  $\text{supp}(g_i) \subset \Omega_i$  et  $g_i \in L^2(\Omega_i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ .
- ii) *La suite d'actionneurs zones  $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$  est stratégique.*

## 1.9 DIFFICULTÉS

Dans ce qui précédé; au moins deux difficultés d'ordre mathématique ou conceptuel sont à souligner.

### 1.9.1 Sur le choix de l'espace d'état

Nous avons choisi comme espace d'état  $Z = L^2(\Omega)$ . Ce choix est raisonnable, compte tenu des états qu'on peut considérer et que ceux-ci sont d'énergie finie.

Si maintenant, l'actionneur  $(D, g)$  amène le système vers un état  $\tilde{z}$  qui est moins régulier. C'est-à-dire  $\tilde{z} \in E$  avec  $E \subset Z$ , alors on a deux possibilités:

- Ou bien  $E$  est tel qu'on peut le choisir comme espace d'état.
- Ou bien on peut agir sur la régularité du contrôle pour ramener l'état  $\tilde{z}$  à  $Z$ .

**Exemple 1.9.1** *Considérons deux situations nous conduisant vers cette difficulté.*

*Soit le système de diffusion*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z(x, t) = \Delta z(x, t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z(x, 0) = z_0(x) & \text{dans } \Omega \\ z(\zeta, t) = g(\zeta) u(t) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.9.1)$$

*qu'on suppose excité par un actionneur zone frontière  $(\Gamma_0, g)$  avec  $\Gamma_0 \subset \Gamma$*

*Dans ce cas, on obtient la même caractérisation avec des états finaux dans  $Z = L^2(\Omega)$  et le contrôle  $u \in L^r(0, T)$  avec  $r > 4$  (voir: [16]). Si on considère le même système avec une action ponctuelle exercée sur la frontière au point  $b \in \Gamma$ .*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z(x, t) = \Delta z(x, t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z(x, 0) = z_0(x) & \text{dans } \Omega \\ z(\zeta, t) = \delta(\zeta - b) u(t) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.9.2)$$

*on obtient la même caractérisation avec des états finaux dans  $Z = L^2(\Omega)$  et  $u \in C_0^\infty(0, T)$  (voir: [16]).*

## 1.9.2 Sur le nombre d'actionneurs

La caractérisation des actionneurs fait apparaître une condition sur le nombre minimum d'actionneurs pouvant ramener le système vers des états dans  $Z$ . En fait, cette condition peut être relaxée avec la considération suivante:

Si on suppose que le domaine géométrique  $\Omega$  du système (1.2.1) est connu avec une certaine précision, alors de cette précision près. le choix d'un seul actionneur ( $p = 1$ ) peut suffire pour assurer la contrôlabilité du système moyennant une faible perturbation de la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  où  $\Gamma'$  est très voisine de  $\Gamma$  dans le sens que

$$\forall \epsilon > 0, \sup_{\substack{x \in \Gamma \\ x' \in \Gamma'}} d(x, x') \leq \epsilon$$

nous obtenons un système dont les valeurs propres sont simples (voir: [7]).

## 1.10 CONTRÔLE ASSURANT LE TRANSFERT RÉGIONAL

Le but de cette section est de trouver un contrôle assurant le transfert régional et à énergie minimale. Evidemment on peut utiliser les résultats connus sur la contrôlabilité des systèmes dynamiques, mais la difficulté apparaît si l'état désiré est donné uniquement sur la région  $\omega$ . De plus nous avons montré que le coût de transfert régional est inférieur au coût de transfert global. Considérons le système (1.2.1).

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z(0) = z_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où  $A$  génère un semi-groupe fortement continu sur

$$Z = L^2(\Omega), B \in \mathcal{L}(U, Z) \text{ et } z_0 \in Z$$

Le système (1.2.1) admet une solution unique tel que  $z_u(\cdot) \in L^2(0, T; Z)$ .

Soit  $z_d \in L^2(\omega)$  un état désiré. On se pose le problème de transférer à moindre coût de l'état  $z_0$  du système (1.2.1) à  $z_d$  à l'instant  $T$ .

Considérons l'ensemble

$$G = \{g \in Z \text{ tel que } g = 0 \text{ sur } \omega\}$$

alors existe-t-il un contrôle à énergie minimale  $u \in U$  tel que  $z_u(T) - z_d \in G$ ?

Soit

$$U_{ad} = \{u \in U; z_u(T) - z_d \in G\}$$

Alors le problème de minimiser

$$\begin{cases} \min \|u\|_U^2 \\ u \in U_{ad} \end{cases}$$

Pour cela nous proposons l'approche générale suivante.

### 1.10.1 Approche générale

Considérons le système (1.2.1) et posons

$$G^0 = \{g \in Z' \text{ tel que } g = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \omega\}$$

Pour  $\psi^0 \in G^0$ , considérons le système

$$\begin{cases} \psi'(t) = -A^*\psi(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \psi(T) = \psi^0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Et

$$\|\psi^0\|_{G^0}^2 = \int_0^T \|B^*\psi(t)\|^2 dt$$

Nous considérons aussi le système

$$\begin{cases} \psi'(t) = A\psi(t) + BB^*\psi(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \psi(0) = z_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Ensuite on définit l'opérateur  $M$  par

$$M\psi^0 = P(\psi(T))$$

Où

$$P = \chi_\omega^* \chi_\omega$$

$M$  est un opérateur affine que l'on décompose

$$M\psi^0 = P(\psi_0(T) + \psi_1(T))$$

Où

$$\begin{cases} \psi_0'(t) = A\psi_0(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \psi_0(0) = z_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = A\psi_1(t) + BB^*\psi(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \psi_1(0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

On pose

$$\Lambda\psi^0 = P(\psi_1(T)) \tag{1.10.1}$$

$\Lambda$  est un opérateur borné et symétrique. En effet pour  $\psi^0, \tilde{\psi}^0 \in G^0$ , nous avons

$$\langle \Lambda \psi^0, \tilde{\psi}^0 \rangle = \langle \psi_1(T), \tilde{\psi}^0 \rangle = \int_0^T B^* \psi(t) B^* \tilde{\psi}(t) dt$$

Avec ces notations, le problème de la contrôlabilité régionale conduit à la résolution de l'équation

$$\Lambda \psi^0 = \chi_\omega^* z_d - P(\psi_0(T))$$

Nous avons alors le résultat.

**Proposition 1.10.1** *Si le système (1.2.1) est  $\omega$  faiblement régionalement contrôlable alors l'équation (1.10.1) admet une solution unique  $\psi^0 \in G^0$ . Le contrôle*

$$u^*(t) = B^* \psi(T)$$

*permet le transfert du système (1.2.1) dans  $G$  à l'instant  $T$ , ou encore*

$$z(T, u^*) \chi_\omega = z_d$$

*De plus ce contrôle minimise la fonction coût*

$$J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \quad \text{sur } U_{ad}$$

## 1.11 OBSERVABILITÉ

En théorie des systèmes, la connaissance de l'état du système est très importante pour l'implémentation d'un contrôle en boucle fermée au système. Pour les systèmes physiques distribués, il n'est pas toujours possible de mesurer directement l'état du système. Le problème considéré alors est celui de la reconstruction de l'état du système à partir de mesures obtenues sur le système à travers une fonction de sortie. C'est le problème d'observabilité. Pour la construction de l'état du système, il suffit de connaître son état à un instant  $t_0$ , l'état à chaque instant  $t$ ,  $t \geq t_0$ , peut être déduit directement à partir de l'équation d'état.

Soient  $\Omega$  un ouvert borné  $\mathbb{R}^n$  où le système évolue et  $T > 0$ . On considère toujours l'équation d'état

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t), & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.11.1)$$

Où  $A$  engendre un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  sur l'espace  $Z = L^2(\Omega)$ ,  $B \in \mathcal{L}(U, Z)$  et  $u \in L^2(0, T, U)$ . On suppose que le système est augmenté de la fonction de sortie, qui définit les mesures obtenues sur le système, donnée par

$$y(t) = Cz(t) \quad (1.11.2)$$

où  $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$ ,  $U$  et  $Y$  sont respectivement les espaces de Hilbert de contrôle et d'observation. Soit  $z_u(t)$  la solution du système (1.11.1). Si  $A$  est auto-adjoint à résolvante compacte, alors (1.11.1) admet une solution unique qui est continue sur  $[0, T]$  et donnée par

$$z_u(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t-s)Bu(s)ds \quad (1.11.3)$$

On considère l'opérateur  $H_t : L^2(0, T; U) \rightarrow Z$ , défini dans (1.2.15) par

$$H_t u = \int_0^t \Phi(t-s)Bu(s)ds; \text{ pour tout } u \in L^2(0, T; U) \quad (1.11.4)$$

Pour  $t = T$ , l'opérateur  $H_t$  va être noté indifféremment par  $H$  ou  $H_T$ . Les mesures sont données par la fonction de sortie (1.11.2). En utilisant (1.11.3) et (1.11.4), on a

$$y(t) = C\Phi(t)z_0 + CH_t u$$

Cette sortie peut être vue comme la somme d'un terme qui est l'état du système autonome (avec  $u = 0$ ) correspondant à l'état initial  $z_0$  et d'un terme représentant l'état du système contrôlé avec un état initial égal à 0. Donc le problème d'observabilité revient à déterminer  $z_0$ , solution de

$$y(t) = C\Phi(t)z_0 = K(t)z_0 ; \quad t \in [0, T] \quad (1.11.5)$$

où  $K(t) = C\Phi(t)$ . L'opérateur  $K : z \in Z \rightarrow K(\cdot)z \in L^2(0, T; Y)$  peut être considéré comme un opérateur d'observation, il est linéaire borné et son adjoint  $K^* : L^2(0, T; Y') \rightarrow Z'$  est donné par

$$K^* y = \int_0^T \Phi^*(t)C^* y(t)dt \quad (1.11.6)$$

et tient compte des mesures pendant tout l'intervalle de temps  $[0, T]$ .

**Remarque 1.11.1** *Pour l'observabilité, on peut considérer un horizon de temps d'observation  $[0, T_m]$ , avec  $T_m \leq T$ . Dans ce qui suit, il n'y a pas de confusion possible si on considère le problème de l'observabilité sur l'intervalle  $[0, T]$ .*

### 1.11.1 Observabilité exacte et faible

Connaissant la dynamique et les entrées et sorties d'un système, le problème de l'observabilité concerne la possibilité de reconstruction de l'état du système. Cette reconstruction peut être exacte ou approximative. Par analogie avec la contrôlabilité, on considère les notions d'observabilité exacte et faible définies ci-après.

**Définition 1.11.1** *Le système (1.11.1) augmenté de la sortie (1.11.2) (ou la paire  $(A, C)$ ) est dit exactement observable sur  $[0, T]$  si*

$$Z' \subset \text{Im } K^* \quad (1.11.7)$$

Cette définition peut être étendue à observabilité dans un sous-espace  $\bar{Z} \subset Z$  si  $\bar{Z}' \subset \text{Im } K^*$ . Par analogie avec la contrôlabilité, et en utilisant le corollaire (1.2.1), on a immédiatement le résultat de caractérisation suivant.

**Proposition 1.11.1** *Le système (1.11.1) augmenté de la sortie (1.11.2) est exactement observable sur  $[0, T]$  si et seulement si, il existe  $\gamma > 0$  tel que pour tout  $z_0$  dans  $Z$ , on a*

$$\|z_0\|_Z \leq \gamma \|C\Phi^*(\cdot)z_0\|_{L^2(0,T;Y)} \quad (1.11.8)$$

Comme pour la contrôlabilité, on introduit le concept d'observabilité faible.

**Définition 1.11.2** *Le système (1.11.1) augmenté de la sortie (1.11.2) est dit faiblement observable sur  $[0, T]$  si*

$$\ker K = \{0\} \quad (1.11.9)$$

Cette définition signifie que l'opérateur  $K$  est injectif, ou que des états différents conduisent à des observations différentes. On a le résultat de caractérisation suivant.

**Proposition 1.11.2** *Il y a équivalence entre*

- (i) (1.11.1) – (1.11.2) est faiblement observable.
- (ii)  $\overline{\text{Im } K^*} = Z$ .
- (iii)  $\overline{\text{Im } (K^*K)} = Z$ .
- (iv)  $\overline{\bigcup_{t \geq 0} \text{Im}(\Phi^*(t)C^*)} = Z$ .

Nous avons vu que l'observabilité exprime le fait que l'état peut être observé (exactement ou faiblement). Ce qui nous amène à la reconstruction de l'état qui peut être faite en utilisant les techniques de pseudo-inverse (voir: [40]). Pour cela, on identifie  $Z$  à son dual  $Z'$  et on considère l'opérateur  $K^*K : Z \rightarrow Z'$  défini par

$$K^*Kz = \int_0^T \Phi^*(t)C^*C\Phi(t)zdt$$

Si le système (1.11.1) augmenté de la sortie (1.11.2) est exactement (respectivement faiblement) observable, alors  $K^*K$  est défini positive (respectivement positif). L'état peut être déterminé par

$$z_0 = (K^*K)^{-1}Ky = K^py \tag{1.11.10}$$

où  $K^p$  est le pseudo-inverse de  $K$ . En utilisant la définition de  $K$  et en remplaçant  $K^*$  par son expression (1.11.6), on obtient

$$z_0 = \left[ \int_0^T \Phi^*(t)C^*C\Phi(t)dt \right]^{-1} \int_0^T \Phi^*(t)C^*y(t)dt \tag{1.11.11}$$

### 1.11.2 Dualité

Il existe une dualité mathématique entre contrôle et observation qui est donnée ici. Cette dualité permet le transfert des résultats établis pour la contrôlabilité à l'observabilité (ou vice versa). Pour cela, on considère l'opérateur  $H : L^2(0, T; U) \rightarrow Z$ , donné par (1.11.4). C'est un opérateur de contrôle puisqu'il associe, à tout contrôle  $u$ , un état  $z \in Z$ . Lorsque  $z_0 = 0$ , la contrôlabilité de (1.11.1) consiste à trouver un contrôle  $u$  tel que

$$Hu = z_d \tag{1.11.12}$$

où  $z_d$  est donnée dans  $Z$ . On peut calculer l'adjoint  $H^*$  de  $H$  en considérant

$$\begin{aligned} \langle Hu, z \rangle &= \left\langle \int_0^T \Phi(T - \tau)Bu(\tau)d\tau, z \right\rangle \\ &= \int_0^T \langle u(\tau)d\tau, B^*\Phi^*(T - \tau)z \rangle \\ &= \langle u, H^*z \rangle_{L^2(0, T; U)} \end{aligned} \tag{1.11.13}$$

La formule (1.11.13) montre que l'adjoint  $H^*$  de  $H$  peut être vu comme un opérateur de sortie (il a la même forme que l'opérateur d'observation  $K$  défini dans (1.11.5)) qui associe, pour tout  $z$  dans  $Z$ , l'observation

$$H^*z = B^*\Phi^*(T - \cdot)z \in L^2(0, T; U) \quad (1.11.14)$$

Finalement, on peut commencer indifféremment par l'observation (ou le contrôle) et déduire les résultats sur le contrôle (ou l'observation) en utilisant cette dualité. C'est pourquoi on introduit la définition suivante.

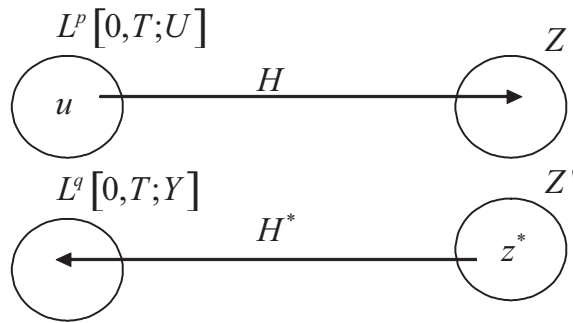


Fig. 1.11.1 Dualité observation - contrôle.

**Définition 1.11.3** *Le système contrôlé*

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) & ; \quad 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.11.15)$$

*et le système observé*

$$\begin{cases} z'(t) = \tilde{A}z(t) & ; \quad 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (1.11.16)$$

*sont duaux si*

$$\tilde{A} = A^* \quad \text{et} \quad B^* = C \quad (1.11.17)$$

Même si cette définition n'a pas d'explication physique, elle est très utile pour obtenir les résultats sur l'observabilité d'un système à partir de ceux établis sur la

contrôlabilité de son dual (ou vice versa). A partir de cette définition et de (1.11.14), on a

$$H^*z = B^*\Phi^*z = C\Phi z = Kz$$

et on obtient immédiatement le résultat suivant.

**Proposition 1.11.3** *Si les systèmes (1.11.15) et (1.11.16) sont duaux, alors le système (1.11.16) est faiblement observable si et seulement si le système (1.11.15) est faiblement contrôlable.*

**Preuve.** La preuve découle immédiatement de la dualité et de la caractérisation de la contrôlabilité faible donnée dans la proposition (1.2.4) ■

D'après la proposition (1.11.3), tous les résultats sur l'observabilité peuvent être déduits à partir de ceux sur la contrôlabilité. Ceci va être illustré dans diverses applications dans les chapitres qui suivent.

# Chapitre 2

## Les Sentinelles

Les systèmes distribués considérés dans ce chapitre sont des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles d'évolution définie dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$  dans les applications) et pour le temps  $t$  dans un intervalle  $(0, T)$ , on doit ajouter des conditions initiales et des conditions aux limites. On s'intéresse à des phénomènes qui sont régis par des équations d'évolution à données manquantes. Le modèle dont on dispose est incomplet, dans le sens où l'on connaît mal les données initiales où certaines données frontières.

### 2.1 INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la détection de pollution en milieu fluide (Lac, Rivière). Nous supposons que la pollution est due à la présence de composés chimiques (Nitrate, Plomb,...) provenant des décharges externes ou sédimentaires. Les sources de pollution diffusent au cours du temps des déjections toxiques dans l'eau et le domaine d'étude comportent des obstacles (ilots de terre, arbres, ...).

La modélisation mathématique de transport d'une substance chimique de concentration  $z(x, t)$  dissoute dans un fluide conduit à une équation de type convection-diffusion-réaction (voir [1]). En tenant compte des principales propriétés physico-chimiques liées aux fluides, la modélisation du transport d'un composé chimique conduit à la considération des termes suivants

- Un terme de diffusion  $k \operatorname{div} (a(x) \nabla z(x, t))$  où  $k$  est la constante de diffusion. C'est une propriété fondamentale des fluides qui consiste à disperser les molécules de manière aléatoire dans tout le domaine. C'est cette capacité qui permet à l'eau d'uniformiser une coloration dans une bassine et à l'air de maintenir une odeur dans une salle close. Le terme  $a(x)$  désigne la transmissivité dans le milieu (dans un milieu homogène (l'eau, l'air, ...)  $a(x)$  est une constante). Dans le cas d'un Lac, la diffusion est donnée par  $k \cdot \Delta z(x, t)$  et dans celle d'une rivière elle est équivalent à  $D_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) + D_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, t)$ ;  $k, D_1, D_2$  sont des constantes.

- Un terme de transport ou convection  $u \cdot \nabla z(x, t)$

$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} z(x, t)$ , où  $\vec{u}$  désigne le champ de vitesse du fluide.

- Un terme de réaction  $R$  qui traduit les interactions chimiques et biochimiques dans le liquide.

- La source de pollution est décrite par une fonction  $\Xi(x, t)$ , elle donne naissance aux substances polluantes déversées dans le fluide. A ce niveau, deux considérations sur les sources de pollution méritent d'être faites pour une meilleure prise en compte des espèces polluants: il s'agit des termes sources distribués que nous noterons par  $\xi(x, t)$  et les termes sources ponctuels au point  $i$  de coordonnées  $x_i$  que nous désignerons par  $\lambda_i \widehat{\xi}_i(t) \cdot \delta(x - x_i)$  où  $\delta(x - x_i)$  est la fonction de Dirac associée au point  $x_i$ . La formulation générale de la source est donnée par:

$$\Xi(x, t) = \xi(x, t) + \sum_i \lambda_i \widehat{\xi}_i(t) \cdot \delta(x - x_i)$$

On suppose que les eaux polluées contiennent une grande variété de bactéries pathogénétiques ou des virus. Après qu'une décharge soit déversée dans l'eau, la concentration des bactéries ou des virus peut décroître très rapidement à cause de certaines conditions (manque de nutriments, baisse de température, les rayons solaires, ...). On désigne alors par  $z_i$  la concentration d'une espèce  $i$ . Le terme de réaction  $R_i$  est donné par

$$R_i = -k_i z_i(x, t),$$

où  $k_i$  est une constante cinétique. D'autre part, le terme source peut être exprimé

sous la forme

$$\Xi_i(x, t) = \sum_j \lambda_j \widehat{\xi}_i(t) \cdot \delta(x - P_i),$$

où  $j$  est le nombre de sources internes de pollution (détritiques, métaux et autres déposés au fond des rivières et des Lacs),  $\lambda_j$  est le taux de pollution de la  $j$  ième source,  $\widehat{\xi}_i(t)$  est la densité partielle des espèces  $i$  pour la  $j$  ième source,  $\delta(x - P_i)$  désigne la mesure de Dirac au point  $P_i$ . On se ramène alors à la résolution d'un système d'équation de la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_i(x,t)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} z_i(x, t) - K \cdot \Delta z_i(x, t) = \\ = -k_i z_i(x, t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \widehat{\xi}_i(t) \cdot \delta(x - P_j), \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Dans l'analyse de la concentration  $z$ , on est confronté à deux types de conditions au bord, pour illustrer ces conditions, subdivisons le bord du domaine d'étude en deux parties disjointes,  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  tel que

$$\begin{aligned} y &|_{\Gamma_1} = g(x, t), \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &|_{\Gamma_2} = h(x, t), \end{aligned}$$

Le bord  $\Gamma_1$  est supposé diffuser de manière continue une décharge de pollution dans le fluide, c'est le cas d'une usine qui déverse ses résidus dans un Lac situé aux alentours par le biais d'un canal d'ouverture  $\Gamma_1$ . Le bord  $\Gamma_1$  peut à son tour se subdiviser en plusieurs parties selon le nombre de source de pollution externe.

La condition de Neumann caractérise l'échange de concentration entre le fluide et l'extérieur. Cette condition est liée à la porosité de la terre. Dans l'étude d'eau de surface (Lac, Rivière) on peut supposer comme approximation, dans ce cas, pour  $h = 0$ , cela sous-entend qu'aucune concentration ne traverse le bord  $\Gamma_2$ , la terre est à ce niveau imperméable. On a besoin d'un condition initiale

$$z(x, 0) = z_0(x).$$

Cette condition évalue la quantité de concentration présente au début de l'expérience. Elle est importante dans la résolution des problèmes de type évolutifs.

Nous résumons la dispersion d'une substance polluante dans un fluide par une équation parabolique de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} + k \operatorname{div} (a(x) \nabla z(x,t)) + F(z, \nabla z) = \Xi(x,t) \quad (x,t) \in \Omega \times ]0, T[, \\ z|_{\Gamma_1} = g(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times ]0, T[, \\ \frac{\partial z}{\partial \eta}|_{\Gamma_2} = h(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times ]0, T[, \\ z(x,0) = y_0(x) \quad x \in \Omega. \end{array} \right.$$

où

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2$  ou  $3$  représente le domaine d'étude,
- $]0, T[$  est l'intervalle de temps d'étude  $T > 0$ ,
- $F$  est une forme non linéaire donnée par

$$F(z, \nabla z) = \vec{u} \cdot \nabla z(x,t) - \lambda z(x,t) + \mu |z|^p(x,t),$$

où  $\lambda, \mu$  et  $p$  sont des constantes réelles et  $\vec{u}$  la vitesse d'écoulement de l'eau.

Nous nous plaçons ici dans le cas des systèmes à données incomplètes, c'est-à-dire que l'une des informations suivantes:

- le coefficient  $k$  de diffusion,
- la fonction source  $\Xi(x,t)$ ,
- la condition initiale  $z_0(x)$ ,
- les conditions aux bords  $g(t)$  et  $h(t)$ ,

est inconnue ou contient dans sa structure des paramètres inconnus. Nous supposons que les structures des fonctions  $\Xi$  et  $z_0$  sont inconnues et données sous la forme

$$\begin{aligned} \Xi(x,t) &= \sum_j \lambda_j \hat{\xi}_i(t), \\ z_0(x,t) &= \sum_j \tau_j \hat{g}_i(t), \end{aligned}$$

Les paramètres  $\lambda_j, \tau_j$  sont inconnus et représentent les taux de pollution. Les fonctions  $\hat{\xi}_i$  et  $\hat{g}_i$  sont connues et désignent respectivement les fonctions densité de production à la source et à l'instant initial.

La recherche de ces informations nous conduit naturellement à un problème de type inverse. Dans la résolution de ces problèmes. il est nécessaire de disposer des données

mesurées de l'état  $z$ . Nous noterons dans la suite  $z_{obs}$  ces données expérimentales et ensuite évaluerons l'état  $z$  en fonction des paramètres recherchés.

Nous supposons que les mesures prélevées  $z_{obs}$  sont opérées dans un intervalle de temps  $[0, T]$ , tout comme les calculs de l'état  $z(\lambda, \tau)$  est dans un domaine d'observation  $\mathcal{O} \subset \Omega$ . une formulation habituelle est de considérer connue l'action sur l'état  $z(x, t)$  d'un opérateur linéaire à valeurs dans un espace convenable  $H$  c'est-à-dire définit un opérateur d'observation  $B$  permettant d'associer les paramètres recherchés aux mesures observées  $B : U \rightarrow H$ . Alors on observe l'état sur un domaine supposé  $\mathcal{O}$  appelé observatoire, et dans un intervalle de temps  $(0, T)$ . L'observatoire  $\mathcal{O}$  peut être interne distribué ( $\mathcal{O} \subset \Omega$ ), ou frontière ( $\mathcal{O} \subset \Gamma$ ).

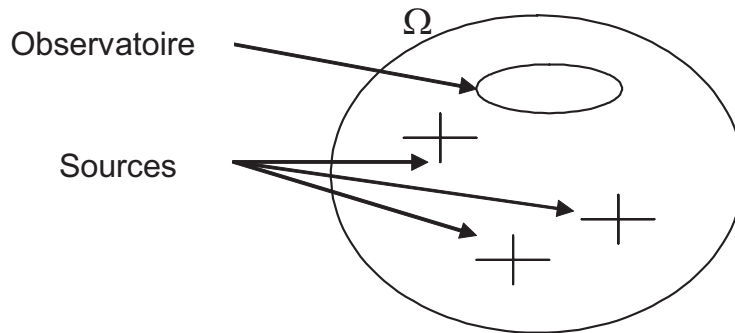


Fig 2.2.1: Domaine  $\Omega$ , Observatoire et Sources

Une fois les données observées obtenues, le problème auquel nous nous intéressons dans ce travail est le suivant:

**(q):** A partir des mesures expérimentales de l'état  $z$  du système précédent est il possible d'identifier la fonction source et / ou la fonction initiale avec prise en compte des erreurs sur les mesures ?

Nous allons commencer de répondre à cette question dans le cas général.

## 2.2 POSITION DES PREMIERS PROBLÈMES MODÈLES

### 2.2.1 L'équation d'état

Pour illustrer notre approche, nous supposons que l'état du système est décrit par  $z$ . La structure générale de l'équation aux dérivées partielles qui gouverne l'état  $z$  du problème étudié est supposée connue sous la forme:

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z + Az = \text{terme source} & \mathcal{Q} = \Omega \times (0, T), \\ z(0) = z_0 & \Omega. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Où  $A$  est une fonction non linéaire et  $z_0$  l'état initiale.

Pour que l'état  $z$  du système considéré puisse être entièrement défini, il faut connaître:

- les coefficients de l'opérateur  $A$ , et la structure de non linéarité éventuelle,
- les termes sources,
- la condition initiale,
- les conditions aux limites,
- le domaine d'étude  $\Omega$ .

Ce qui n'est généralement pas le cas.

Si l'une au moins des informations ci-dessus est inconnue ou partiellement connue on dit que le système (P) est à données incomplètes. On rencontre ce type de problème dans de nombreuses situations, en sciences biomédicales, en météorologie, en océanographie, ..., où les conditions initiales ne sont pas complètement connues.

### 2.2.2 Termes manquants et termes de pollutions

Soit  $A$  un opérateur elliptique du deuxième ordre. On suppose que la première équation du système (P) s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial t} z + Az = \xi + \lambda \hat{\xi} \quad \text{dans } \mathcal{Q},$$

Avec  $\xi$  est donné dans un espace convenable  $X$  et  $\widehat{\xi}$  demeure dans la boule unité de  $X$  et  $\lambda$  est un petit paramètre réel avec  $\lambda\widehat{\xi}$  n'est pas connu. On suppose que les coefficients de  $X$  et l'ouvert  $\Omega$  sont connus mais les données initiales sont incomplètes. Si l'on désigne par  $z(0)$  la condition initiale s'exprime sous la forme

$$z(0) = z_0 + \tau\widehat{z}_0,$$

où  $z_0$  est donné et  $\widehat{z}$  demeure dans la boule unité d'un espace de Hilbert ou de Banach avec  $\tau$  réel petit, et on suppose que les conditions aux limites sont connues.

Notre objectif est de donner une méthode permettant d'obtenir des informations sur  $\lambda\widehat{\xi}$  qui ne soient pas affectées par les variations de la donnée initiale autour de  $z_0$ . On établit ainsi une distinction entre le terme  $\lambda\widehat{\xi}$  qui est dit "de pollution" et le terme  $\tau\widehat{z}_0$  qui est dit "manquant" que l'on ne cherche pas à identifier. Pour espérer pouvoir obtenir quelques informations, il faut observer  $z$ . Donc, le problème consiste à observer l'état  $z$  sur une partie accessible du domaine et de disposer des mesures expérimentales pour estimer les données manquantes.

### **2.2.3 Espace d'observation du Système**

Dans un système à données partiellement connues tel que celui qu'on considère en (P), il est naturel de vouloir reconstituer le tout ou une partie des données inconnues, cela est bien évidemment impossible si on observe rien du système étudié. Soit  $H$  l'espace de données observées, nous citons deux types d'observations:

1/ L'ouvert  $\mathcal{O}$  peut consister en plusieurs composantes donc les observations se font aux points  $\mathcal{O}_i, i = 1, 2, 3, \dots$ , et les sources de pollution sont générées aux points  $s_i$

(Figure 2.2.2), un tel cas a été étudié dans (voir [55]).

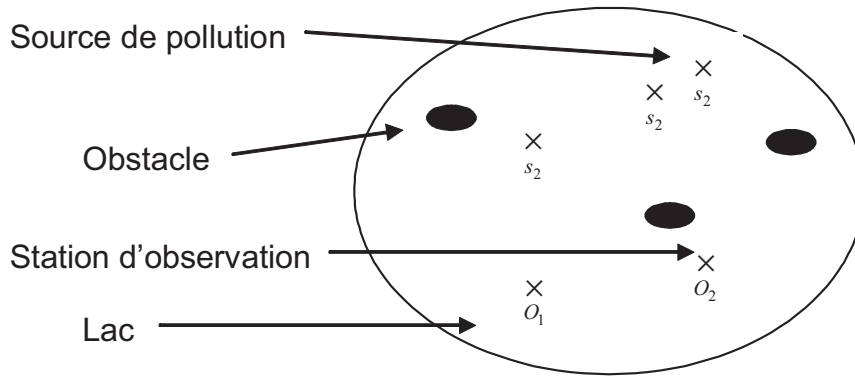


Figure 2.2.2: Modèle d'un fluide soumis à trois sources de pollution  $\{s_1, s_2, s_3\}$  dont l'observation est faite au points  $\{O_1, O_2\}$

2/ On peut considérer d'un observatoire  $\mathcal{O} \subset \Omega$  (figure 2.2.3). Les données observées sont continues par rapport au temps à l'espace. De telles observations peuvent être faites au moyen d'un navire, c'est par exemple le cas d'un bateau observatoire et  $\Omega$  étant un océan ou un lac, ...

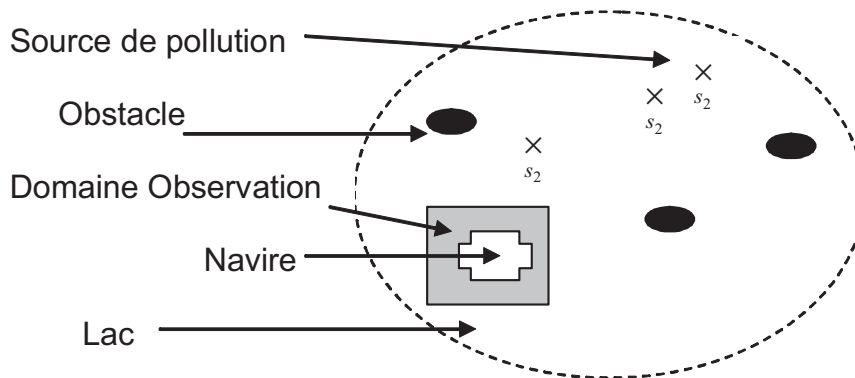


Figure 2.2.3: Modèle d'un fluide soumis à trois sources de pollution  $\{s_1, s_2, s_3\}$  dont l'observation est faite dans un sous domaine.

En outre, on peut avoir des observations discontinues en temps.

On observe l'état du système “ $z$ ” sur  $\mathcal{O}$  pendant l'intervalle de temps  $[0, T]$ , donc théoriquement, on va disposer de

$$z(x, t) = z_{obs} \text{ sur } \mathcal{O} \times (0, T), \quad (2.2.2)$$

où  $z_{obs}$  est une mesure connue.

Naturellement les mesures expérimentales peuvent être influencées par des perturbations appelées bruits. Les bruits peuvent être dus aux erreurs sur les instruments de mesures ou encore aux erreurs sur l'approximation des équations. Pour prendre en compte ces erreurs; l'opérateur d'observation se définit de la manière suivante:

$$z_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i m_i, \quad (2.2.3)$$

où les fonctions  $(m_0, m_1, \dots, m_n)$  sont données et les  $\beta_i$  sont des paramètres inconnus, représentent les termes de bruits.

**Remarque 2.2.1** 1/ *Les résultats présentés ici, seront dans le cas d'un observatoire interne.*

2/ *Pour les systèmes dissipatifs, l'ouvert  $\mathcal{O}$  peut être, au moins théoriquement, être arbitrairement petit.*

Le problème d'identification de la reconstitution de certaines paramètres inconnus de notre système conduit naturellement à la notion “d'identifiabilité” que nous allons définir de la façon la plus générale possible.

**Définition 2.2.1** *On considère un système dont l'état noté  $z$  dépend d'un vecteur de paramètres  $u$ . Soit  $C$  un opérateur d'observation agissant sur  $z$ . On définit l'opérateur  $B : E \longrightarrow F$  tel que  $E$  est l'espace des données et  $F$  est l'espace de mesure. On dit que  $B$  est identifiable à partir de l'observation  $Cz$  si l'application  $B$  est injective.*

Pour résoudre un problème d'identification, une technique très répandue est la méthode de “moindres carrés”. Par ailleurs, à la fin des années quatre-vingt, une nouvelle méthode a vu le jour: “la méthode des sentinelles”. Nous commençons par une présentation de la première méthode.

## 2.3 MOINDRES CARRÉS

Elle fût introduite en 1975 par Gauss et Legendre pour la résolution de problèmes inverses.

Dés 1805, Legendre présenta son article “nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes” basé sur la méthode des moindres carrés. Depuis lors, cette méthode est restée la plus populaire des techniques d’identification de paramètres aussi bien pour les équations différentielles ordinaires (EDO) que pour les équations aux dérivées partielles (EDP).

Soit le système évolutif suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z + Az + f(z) = \xi(t) + \lambda \widehat{\xi}(t) & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times [0, T] \\ z(x, 0) = z_0 + \tau \widehat{z}_0 & \text{dans } \Omega \\ z(t) = 0 & \text{Sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{array} \right. \quad (2.3.1)$$

On considère les inconnues  $\{\lambda \widehat{\xi}, \tau \widehat{z}_0\} = \{v, w\}$ , où  $\lambda \widehat{\xi}$  est une pollution et  $\tau \widehat{z}_0$  est un terme manquant, comme des variables de contrôle de l’état  $z(x, t; v, w)$  du système et on veut que cet état soit “aussi proche que possible” de l’état mesuré  $z_m$ .

On pose

$$J(v, w) = \text{distance de } z(x, t; v, w) \text{ sur } \mathcal{O} \times (0, T) \text{ à } z_m.$$

(la distance étant prise dans une norme convenable) et l’on cherche

$$\inf J(v, w)$$

Où  $v, w$  sont quelconques ou assujettis à des contraintes qui correspondent aux informations on dispose.

Du point de vue technique, cela conduit à des problèmes de contrôle optimal pour des systèmes distribués.

Entrent dans ce cadre les problèmes dits “d’identification” et les méthodes dites “inverses”.

Naturellement, la formulation précédente est complètement générale, et s'applique en principe, à toutes les situations évoquées précédemment. Dans ce type de méthode, les termes de pollution et les termes manquants jouent le même rôle.

On cherche à déterminer les uns et les autres. Il y a possibilité de ne pas pouvoir nettement séparer les rôles des uns et des autres.

Pour les problèmes non linéaires, il n'y a pas unicité de la solution numérique autour de la solution correspondante à  $\lambda = 0$  et  $\tau = 0$ .

Les problèmes correspondants peuvent être mal posés. Il faut alors introduire dans le système (2.3.1) correspondant à  $\lambda = 0$  et  $\tau = 0$  des termes régularisant ou stabilisation qui induisent des erreurs d'approximation supplémentaires.

Bien sûr cette méthode reste toujours la plus importante pour ce type de problème mais il peut être utile de tenter "autre chose" . "la notion de la sentinelle".

## **2.4 MÉTHODE DES SENTINELLES**

Elle répondait d'une part aux préoccupations citées dans **(q)** et d'autre part à l'élaboration d'un algorithme rapide dans le calcul des paramètres inconnus. Cette théorie a été par ailleurs développée dans les applications en environnement par son auteur durant quatre années à travers des articles et des conférences pour enfin résumer le tout dans son livre publié en 1992, "Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes" (voir [29]). Du point de vue numérique on s'accorde à dire que la méthode de sentinelle est quasiment équivalente à la méthode des moindres carrés classiques.

En 2004, O. Nakoulima (voir [47]) vise de pallier aux préoccupations **(q)** et d'utiliser l'inégalité de Carleman pour démontrer l'existence du sentinelle.

Nous distinguons deux types de sentinelles, continue et discrète.

## **2.5 SENTINELLE CONTINUE**

On considère un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , ( $n = 1, 2, 3$  dans les applications), borné de frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  assez régulière (de classe  $C^2$  afin de ne pas rencontrer de problème de régularité).

Soit  $A$  un opérateur elliptique de second ordre. Pour  $T > 0$  fixé, on définit  $\mathcal{Q} = \Omega \times [0, T]$  et  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ , on considère la solution  $z(x, t)$  du système:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z + Az + f(z) = \xi + \lambda \widehat{\xi} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z(x, 0) = z_0 + \tau \widehat{z}_0 & \text{dans } \Omega \\ z(t) = 0 & \text{Sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Ce système est à données incomplète où

- Les fonctions  $\xi$  et  $z_0$  sont données respectivement dans  $L^2(\mathcal{Q})$  et  $L^2(\Omega)$ .
- Le terme de pollution  $\lambda \widehat{\xi}$  et le terme manquant  $\tau \widehat{z}_0$  sont inconnues respectivement dans  $L^2(\mathcal{Q})$  et  $L^2(\Omega)$ .
- Les réels  $\lambda$  et  $\tau$  sont arbitrairement petits.
- Les coefficients de l'opérateur  $A$  vérifiant les conditions du théorème de Saut et Sheurer.
- L'opérateur  $z \rightarrow f(z)$  est une fonction non linéaire de classe  $C^1$ , (on peut supposer que  $f$  est fonction de  $z$  et  $\nabla z$ ).

L'équation (2.5.1) admet une unique solution faible dans  $L^2(\mathcal{Q})$  que l'on note

$$z(x, t; \lambda, \tau) = z(\lambda, \tau)$$

La question qui se pose est:

**(q):** Comment peut-on calculer le terme de pollution  $\lambda \widehat{\xi}$  (ou d'obtenir des informations) qui soit indépendant des variations de la donnée initiales auteur de  $z_0$ .

Donc nous nous intéressons à l'estimation du terme de pollution sans toutefois manifester un intérêt pour le terme manquant.

Plaçons nous dans le cas où les données observées  $z_{obs}$  ne sont pas bruitées. L'idée fondamentale pour répondre à la question précédente est de prendre une valeur moyenne, pour savoir si quelques choses se passent.

Soit donc  $h_0$  une fonction donnée sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ . On considère alors la moyenne

$$m(\lambda, \tau) = \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} h_0 z(x, t; \lambda, \tau) dx dt$$

Et on cherche à déterminer le terme de pollution indépendamment du terme en  $\tau$ , au premier ordre par exemple. Mais, il n'y a en général aucune raison pour que, au

premier ordre,  $m(\lambda, \tau)$  soit indépendante de  $\tau$ . Autrement dit, il n'y a aucune raison pour que

$$\frac{\partial m}{\partial \tau}(0, 0) = \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} h_0 \frac{\partial z}{\partial \tau}(0, 0) dx dt = 0.$$

On introduit une fonction  $u$ , et on donne la définition d'une fonctionnelle dite "sentinelle" qui soit la moyenne de l'état  $z$  sur un petit domaine, donnée par l'expression suivante:

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (h_0 + u) z(x, t; \lambda, \tau) dx dt \quad (2.5.2)$$

Pour les fonctions  $h_0$  et  $u \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$

**Définition 2.5.1** On dit que  $\mathcal{S}$  est une sentinelle de J.L.Lions définie par la fonction  $h_0$ , s'il existe un contrôle  $u$  tel que le couple  $(u, \mathcal{S})$  vérifie:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{S}(0, 0) = 0, \forall \widehat{z}_0 \quad (2.5.3)$$

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} = \min \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \text{ vérifiant (2.5.3)} \quad (2.5.4)$$

**Remarque 2.5.1** En fait,  $h_0$  étant donnée, les conditions (2.5.3) (2.5.4) définissent  $u$  de manière unique. On dira alors que  $\mathcal{S}$  est la sentinelle définie par  $h_0$ .

**Remarque 2.5.2** La condition (2.5.3) est naturelle. Elle exprime que la sentinelle n'est pas affectée (au premier ordre !) par l'absence d'informations sur les termes manquants.

**Remarque 2.5.3** Si la fonction  $h_0$  vérifie

$$\left| \begin{array}{l} h_0 \geq 0 \\ \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} h_0 dx dt = 1 \end{array} \right.$$

Alors

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} h_0 z(x, t; \lambda, \tau) dx dt$$

Est une moyenne. La condition (2.5.4) exprime que la sentinelle est aussi proche que possible d'une moyenne.

Plus généralement,  $h_0$  est à notre disposition. La condition (2.5.4) exprime que l'on "s'éloigne le moins possible" (au sens  $L^2$ ) de  $h_0$ .

**Remarque 2.5.4** *La remarque présentée est formelle mais fondamentale.*

Désignons par  $z_0$  la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z_0 + Az_0 + f(z_0) = \xi & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_0(0) = z_0 & \text{dans } \Omega \\ z_0 = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.5.5)$$

On suppose que l'on peut calculer cette solution  $z_0$ , alors (si  $u$  est calculée )

$$\mathcal{S}(0,0) = \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} (h_0 + u) z_0(x,t) dxdt$$

est connu.

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 1 de  $\mathcal{S}$  au voisinage de  $(0,0)$ , et en considèrent (2.5.3) (2.5.4) on a:

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) \simeq \mathcal{S}(0,0) + \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0,0) + \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0,0) + o(\|(\lambda, \tau)\|)$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0,0) &\simeq \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} (h_0 + u) z_\lambda(x,t) dxdt \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0,0) &\simeq \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} (h_0 + u) z_\tau(x,t) dxdt \end{aligned}$$

Et  $z_\lambda$  est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z_\lambda + Az_\lambda + f'(z_0) z_\lambda = \widehat{\xi} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_\lambda(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ z_\lambda(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Et  $z_\tau$  est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z_\tau + Az_\tau + f'(z_0) z_\tau = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_\tau(0) = \widehat{z}_0 & \text{dans } \Omega \\ z_\tau(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Pour définir la sentinelle, on doit déterminer  $u$  qui assure les conditions (2.5.3) (2.5.4). (L'existence et l'unicité de la fonction  $u$  sont montrées dans [34]. Il a été montré que le problème (2.5.3) (2.5.4) est équivalent à un problème de contrôlabilité exacte à zéro à partir duquel la méthode HUM, abréviation de "Hilbert Uniqueness Method" [33], a été utilisée pour établir l'existence et l'unicité de la fonction du contrôle  $u$ ).

## 2.5.1 Etat Adjoint

### La condition d'insensibilité

**Remarque 2.5.5** *La condition (2.5.3) exprime l'insensibilité de la sentinelle par rapport au terme manquant au premier ordre et la condition (2.5.4) exprime que l'on s'éloigne le moins possible de la moyenne, elle sélectionne une unique sentinelle.*

**Remarque 2.5.6** *Le choix  $u = -h_0$  donne lieu à (2.5.3). Par conséquent, sous des hypothèses très générales, le problème (2.5.3) (2.5.4) admet une solution unique. Mais il faudra s'assurer que sous des conditions convenables,  $u \neq -h_0$ , la fonctionnelle  $\mathcal{S}(\lambda, \tau) = 0$  n'étant pas susceptible de nous apporter beaucoup d'informations.*

On suppose que l'on peut calculer  $\frac{\partial z}{\partial \tau}$  pour  $\lambda = 0, \tau = 0$ .

Sous réserve de vérification qui d'erra être faite dans chaque cas particulier,  $\frac{\partial z}{\partial \tau} = z_\tau$  est donnée par (2.5.7).

Alors

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u) z_\tau(x, t) dx dt \simeq \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = 0 \quad (2.5.9)$$

D'après (2.5.3).

Condition qui doit avoir lieu pour tout  $\widehat{z}_0$  dans la boule unité de l'espace des conditions initiales.

On va désormais supposer que

$$z_0, \widehat{z}_0 \in L^2(\Omega)$$

On transforme maintenant (2.5.9) par introduire (classique) de l'état adjoint.

### L'état adjoint

Soit  $A^*$  l'opérateur adjoint de  $A$  (obtenue donc en remplaçant  $a_{ij}$  par  $a_{ji}$ ).

On définit  $q$  solution de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t}q + A^*q + f'(z_0)q = \chi_{\mathcal{O}}(h_0 + u) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.5.10)$$

Dans (2.5.10),  $\chi_{\mathcal{O}}$  = fonction caractéristique de  $\mathcal{O}$  défini par

$$\chi_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{O} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{O} \end{cases}$$

Nous reviendrons là dessus. Cette fonction  $q$  dépend de  $u$  qui est déterminé.

Le problème (2.5.10) admet une solution unique sous des hypothèses très générales sur  $f'(z_0)$ . Cette solution dépend de  $u$  qu'on veut déterminer.

**Lemme 2.5.1** *On suppose que  $q$  est solution du problème (2.5.10). Alors le problème d'existence d'une sentinelle insensible aux termes manquants est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro, c'est-à-dire  $q(0) = 0$ .*

**Preuve.** Si maintenant on multiplie (2.5.9) par  $z_\tau$ , on obtient après intégrations par parties

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (h_0 + u) z_\tau(x, t) dx dt = (q(0), \widehat{z}_0)$$

Où

$$(q(0), \widehat{z}_0) = \int_{\Omega} q(x, 0) z_\tau(x, 0) dx$$

Par conséquent, la condition (2.5.3) (ou (2.5.9)) équivaut à

$$q(0) = 0 \quad (2.5.11)$$

Le problème donc maintenant de trouver  $u$  dans

$$\mathcal{U} = L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$$

Telle que l'on ait (2.5.10) et (2.5.3).

Cela est un problème de type contrôlabilité à zéro. Donc, le problème de trouver une sentinelle  $\mathcal{S}$  telle que (2.5.10) ait lieu, est équivalent au problème de contrôlabilité à zéro suivant: (trouver  $u \in \mathcal{U}$  tel que l'on ait (2.5.10) et (2.5.11)). ■

## 2.5.2 Construction de la sentinelle

### Equivalence à un problème de contrôlabilité

On cherche donc  $u$  tel que si  $q = q(x, t; u)$  est la solution de (2.5.10) on ait

$$\begin{cases} q(0, u) = 0 \\ \|u\|_{L^2} = \min \end{cases}$$

(Où on a écrit  $L^2$  pour  $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ ).

**Remarque 2.5.7** *Il faudra vérifier ensuite que la solution n'est pas donnée par  $h_0 + u \equiv 0$  sinon la sentinelle est nulle et ne saurait donner aucune information ...*

Pour cela on décompose le système (2.5.10) en deux systèmes

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} q_0 + A^* q_0 + f'(z_0) q_0 = h_0 \chi_{\mathcal{O}} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q_0(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q_0 = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.5.12)$$

Et

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} y + A^* y + f'(z_0) y = u \chi_{\mathcal{O}} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.5.13)$$

Donc  $q = q(h_0) = q_0 + y$  telle que  $q_0$  est donc donnée.

Alors on cherche  $u$  de façon que  $y = y(u)$  qui vérifie

$$\begin{cases} y(0, u) = -q_0(0) \\ \|u\|_{L^2} = \min \end{cases} \quad (2.5.14)$$

Si l'on considère ici que

$$\begin{cases} u = \text{fonction de contrôle.} \\ y = y(u) = \text{état d'un (nouveau) système.} \end{cases}$$

Alors (2.5.14) est un problème de contrôlabilité à zéro, on cherche  $u$  qui conduise l'état de 0 (à l'instant initial  $t = T$ ) jusqu'à  $-q_0(0)$  (à l'instant final  $t = 0$ ) et ceci avec une "dépense" minimum pour  $u$ , au sens

$$\|u\|_{L^2} = \min$$

**Remarque 2.5.8** Puisque  $u = -h_0$

donne  $q \equiv 0$ , donc (2.5.14), le problème précédent admet toujours une solution et une seule de sorte que le vrai problème est calculer le  $u$  optimal.

En résumé, le problème d'existence d'une unique sentinelle revient à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$(P) : \left\{ \min_{\Lambda} \|u\|_{L^2} \right\}$$

Où

$$\Lambda = \left\{ u \text{ tel que } \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t}q + A^*q + f'(z_0)q = \chi_{\mathcal{O}}(h_0 + u) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \right\}$$

Le domaine des contraintes du problème (P) est non vide car  $u = -h_0$  donne  $q \equiv 0$ , par conséquent le problème (P) admet toujours une solution et une seule que l'on note  $\hat{u}$ . Il reste donc deux problèmes à résoudre

- 1/ Calculer  $\hat{u}$ ,
- 2/ S'assurer que  $\hat{u} \neq -h_0$ .

Une méthode classique pour obtenir le système d'optimalité pour le problème (P) est la méthode de pénalisation.

### Pénalisation

Pour  $\epsilon > 0$  on introduit la fonctionnelle

$$J_{\epsilon}(u, y) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|-y' + A^*y + f'(z_0)y - u\chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\Omega \times (0, T))}^2 \quad (2.5.15)$$

Dans (2.5.15), on considère tous les  $y$  tels que

$$\begin{cases} -y' + A^*y + f'(z_0)y \in L^2(\Omega \times (0, T)) \\ y(T) = 0, y(0) = -q_0(0) \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma \text{ (ces conditions ont un sens).} \end{cases} \quad (2.5.16)$$

Le problème (2.5.15) admet une solution unique, que l'on note

$$u_{\epsilon}, y_{\epsilon} \quad (2.5.17)$$

On pose en outre

$$\rho_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} (-y'_\epsilon + A^* y_\epsilon + f'(z_0) y_\epsilon - u_\epsilon \chi_{\mathcal{O}}) \quad (2.5.18)$$

Le couple  $u_\epsilon, y_\epsilon$  est caractérisé par

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} u_\epsilon \hat{u} dx dt + \int \int_{\Omega \times (0, T)} \rho_\epsilon (-\hat{y}' + A^* \hat{y} + f'(z_0) \hat{y} - \hat{u} \chi_{\mathcal{O}}) dx dt = 0 \quad (2.5.19)$$

$\forall \hat{u} \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$  et pour tout  $\hat{y}$  tel que

$$\begin{cases} -\hat{y}' + A^* \hat{y} + f'(z_0) \hat{y} - \hat{u} \chi_{\mathcal{O}} \in L^2(\Omega \times (0, T)) \\ \hat{y}(T) = 0, \hat{y}(0) = 0, \hat{y} = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.5.20)$$

On déduit de cela que

$$\begin{cases} \rho'_\epsilon + A \rho_\epsilon + f'(z_0) \rho_\epsilon = 0 \\ \rho_\epsilon = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.5.21)$$

sans aucune information sur  $\rho_\epsilon$  à  $t = 0$  ou  $t = T$ , et que

$$u_\epsilon = \rho_\epsilon \chi_{\mathcal{O}} \quad (2.5.22)$$

On passe à la limite ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) de manière formelle, puis l'on justifie ce passage à la limite.

### Le système d'optimalité

Supposons donc, pour l'instant, que dans une topologie convenable,  $\rho_\epsilon \rightarrow \rho$ , lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

$$\begin{cases} \rho' + A \rho + f'(z_0) \rho = 0 \\ \rho(0) = \rho^0, \rho = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.5.23)$$

où  $\rho^0$  n'est pas connu pour l'instant.

Ensuite (utilisant (2.5.22))

$$\begin{cases} -y' + A^* y + f'(z_0) y = \rho \chi_{\mathcal{O}} \\ y(T) = 0, y = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.5.24)$$

Enfin, on doit avoir (2.5.14)

$$y(0) = -q_0(0) \quad (2.5.25)$$

qui est maintenant une équation en  $\rho^0$ .

Si, dans un espace convenable,  $\rho^0$  existe et est unique, alors le  $u$  cherché est donné par:

$$u = \rho \chi_{\mathcal{O}} \quad (2.5.26)$$

La sentinelle définie par  $h_0$  est donc donnée par

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (h_0 + \rho) z(x, t; \lambda, \tau) dx dt$$

Reste à résoudre (2.5.25), puis à examiner si la sentinelle n'est pas identiquement nulle.

### Le calcul de $\rho^0$

On définit un opérateur linéaire  $\Lambda$  par

$$\Lambda \rho^0 = y(0) \quad (2.5.27)$$

(calculer par (2.5.23), (2.5.24)). Cet opérateur est défini pour  $\rho^0$  assez régulière, par exemple pour  $\rho^0 \in L^2(\Omega)$ .

On doit donc résoudre dans un espace fonctionnel convenable qui reste à définir

$$\Lambda \rho^0 = -q_0(0) \quad (2.5.28)$$

Si l'on multiplie (2.5.24) par  $\widehat{\rho}$ , où  $\widehat{\rho}$  est la solution de (2.5.23) correspondant à  $\widehat{\rho}^0$ , on obtient

$$\langle \Lambda \rho^0, \widehat{\rho}^0 \rangle = \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \widehat{\rho} \widehat{\rho} dx dt \quad (2.5.29)$$

En particulier

$$\langle \Lambda \rho^0, \rho^0 \rangle = \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \rho^2 dx dt \quad (2.5.30)$$

On introduit alors, de manière naturelle, la quantité

$$\|\rho^0\|_F = \left( \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \rho^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.5.31)$$

On définit ainsi en général une norme sur l'espace  $L^2(\Omega)$ .

En effet, si  $\|\rho^0\|_F = 0$ , alors

$$\rho = 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{O} \times (0, T)$$

ce qui entraîne si les coefficients de  $A$  et si  $f'(z_0)$  sont assez réguliers que  $\rho \equiv 0$ .  
Donc  $\rho^0 = 0$  et on a défini par (2.5.31) une norme Pré-hilbertienne sur  $L^2(\Omega)$ .

On définit  $F$  comme l'espace de Hilbert complété de  $L^2(\Omega)$  pour la norme (2.5.31).  
Plusieurs remarques s'imposent.

**Remarque 2.5.9** *Pour des coefficients assez réguliers, le théorème d'unicité utilisé ci-dessus est dû à S. MIZOHATA.*

*La question de savoir quelles sont les conditions les plus générales sur les coefficients sous lesquelles il est vrai que si  $\rho = 0$  sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$  alors  $\rho = 0$  dans  $\Omega \times (0, T)$ , est probablement difficile.*

**Remarque 2.5.10** *L'espace  $F$  défini par complétion pour la norme (2.5.31) est, au moins formellement, un espace "très grand". C'est l'espace "le plus grand" des données initiales  $\rho^0$  pour lesquelles la solution  $\rho$  correspondante vérifie*

$$\rho \chi_{\mathcal{O}} \in L^2(\Omega \times (0, T)) \tag{2.5.32}$$

*compte tenu du très fort "effet régularisant" exercé par la solution de (2.5.23), il est clair que l'on peut avoir (2.5.32) pour des données initiales très générales.*

*Dans le cas particulier où l'on aurait les coefficients et la fonction  $f'(z_0)$  analytiques, on pourrait prendre pour  $\rho^0$  une combinaison infinie de dérivées de masses de Dirac en dehors de  $\overline{\mathcal{O}}$ , c'est-à-dire un élément qui n'est pas une distribution. L'espace  $F$  n'est pas en général un espace des distributions.*

*L'important est de savoir que ce "grand" espace  $F$  existe. Sa "caractérisation" (différente de la définition !) est très difficile est absolument pas indispensable pour la suite.*

On introduit ensuite

$$F' = \text{espace dual de } F \tag{2.5.33}$$

(donc un espace "très petit").

On a alors (fait ce qu'il fallait pour avoir) le résultat:

$$\Lambda \text{ est un isomorphisme de } F \text{ sur } F' \quad (2.5.34)$$

On note ensuite que

$$q_0(0) \in F' \quad (2.5.35)$$

En effet, si l'on multiplie (2.5.12) par  $\rho$ , on obtient

$$\langle q_0(0), \rho^0 \rangle = \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} h_0 \rho dx dt \quad (2.5.36)$$

Donc

$$|\langle q_0(0), \rho^0 \rangle| \leq \|h_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \|\rho^0\|_F$$

d'où (2.5.36) avec

$$\|q_0(0)\|_{F'} \leq \|h_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$$

**Remarque 2.5.11** *Il résulte de (2.5.29) que  $\Lambda$  est symétrique:*

$$\Lambda^* = \Lambda \text{ dans } \mathcal{L}(F, F') \quad (2.5.37)$$

On voit donc que (2.5.28) admet une solution unique

$$\rho^0 = -\Lambda^{-1} q_0(0) \quad (2.5.38)$$

On peut résumer:

**Théorème 2.5.1** *On suppose que l'on est dans les conditions d'application du théorème d'unicité de S. MIZOHATA pour l'équation (2.5.23). Il existe alors une sentinelle et une seule définie par  $h_0$ . Elle est donnée par*

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (h_0 + \rho) z dx dt \quad (2.5.39)$$

*où  $\rho$  est la solution de (2.5.23) correspondant à  $\rho^0$  donné par (2.5.38). Dans (2.5.38)  $q_0$  est donné par (2.5.12) à partir de  $h_0$ .*

**Remarque 2.5.12** Grâce à (2.5.37), la solution  $\rho^0$  de (2.5.38) est donnée par le problème de minimisation de

$$\frac{1}{2} \langle \Lambda \rho^0, \rho^0 \rangle + \langle q_0(0), \rho^0 \rangle$$

c'est-à-dire

$$\inf_{\rho^0} \frac{1}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \rho^2 dx dt + \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} h_0 \rho dx dt$$

**Remarque 2.5.13** Les techniques précédentes avec  $F$  et  $\Lambda$  sont des adaptations de la méthode H.U.M. introduite dans J.L. Lions pour la résolution de problème de contrôlabilité exacte pour (essentiellement) des systèmes hyperboliques. Les motivations sont ici différentes, et l'objectif est de trouver des sentinelles, non la contrôlabilité. En outre, les systèmes sont différents. En revanche, la technique de l'introduction de l'espace  $F$  est analogue dans les deux situations.

**Remarque 2.5.14** Si  $\|\rho^0\|_F$  était seulement une semi norme (ce qui peut probablement arriver dans des cas pathologiques), alors  $F$  serait un espace quotient et l'on aurait pour  $F'$  un sous-espace.

On a  $q_0(0) \in F'$  dans tous les cas. Le théorème reste valable, avec une classe d'éléments  $\rho^0$  donnant la même sentinelle.

### Usage d'une sentinelle: Estimation du terme de pollution

A quoi sert une sentinelle, et la terminologie est-elle justifiée?

On est dans la situation où on connaît  $z_{obs} = m_0$  sans bruit (les  $\beta_i = 0$ ). (donc en remplaçant  $\mathcal{S}(\lambda, \tau)$  par  $\mathcal{S}_{obs}$  la solution observée:  $\mathcal{S}_{obs} = \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (h_0 + \rho) m_0 dx dt$ ).

On a calculé  $z_0, \rho^0, \rho$  sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ .

On a donc

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) \simeq \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (h_0 + \rho) (m_0 - z_0) dx dt \quad (2.5.40)$$

Mais

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) = \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (h_0 + \rho) z_\lambda dx dt \quad (2.5.41)$$

Où  $z_\lambda$  est la solution de:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z_\lambda + A z_\lambda + f'(z_0) z_\lambda = \widehat{\xi} \\ z_\lambda(0) = 0 \\ z_\lambda = 0 \text{ sur } \Sigma, \end{cases} \quad (2.5.42)$$

Multipliant (2.5.9) (où  $u = \rho \chi_{\mathcal{O}}$ ) par  $z_\lambda$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0,0) &= \lambda \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} (h_0 + u) z_\lambda(x,t) dx dt \\ &= \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} q \{ \lambda \widehat{\xi} \} dx dt \end{aligned} \quad (2.5.43)$$

Alors

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0,0) = \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} q \widehat{\xi} dx dt$$

Et d'autre part on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0,0) &= \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} (h_0 + u) z_\tau(x,t) dx dt \\ &= (q(0), \widehat{z}_0) = 0 \end{aligned}$$

La sentinelle définie par  $h_0$  donne donc l'information:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0,0) &= \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} (q_0 + y) \{ \lambda \widehat{\xi} \} dx dt \\ &= \mathcal{S}(\lambda, \tau) - \mathcal{S}(0,0) \\ &\simeq \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} (h_0 + \rho) (m_0 - z_0) dx dt \end{aligned} \quad (2.5.44)$$

Dans le premier membre de (2.5.44),  $y$  est donné par (2.5.13) avec  $u = \rho$ .

Ceci ne donne une information éventuelle que si

$$q = q_0 + y \neq 0 \quad (2.5.45)$$

c'est-à-dire si

$$h_0 + \rho \neq 0 \text{ sur } \mathcal{O} \times (0, T) \quad (2.5.46)$$

**Remarque 2.5.15** La fonction  $\rho$ , solution de (2.5.23) est nécessairement régulière sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$  et par conséquent, on aura certainement (2.5.46) si  $h_0$  n'est pas une fonction régulière sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ .

On peut aussi observer ceci: si  $h_0 = \text{constante}$  sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ , alors si l'on avait  $h_0 + \rho = 0$  dans  $\mathcal{O} \times (0, T)$ , on aurait donc  $\rho = \text{constante}$  sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$  et donc

$$f'(z_0) = 0 \quad \text{sur } \mathcal{O} \times (0, T) \quad (2.5.47)$$

### 2.5.3 Furtivité

Au premier ordre près, on peut dire que si

$$q = q_0 + y = q(h_0)$$

est la sentinelle définie par  $h_0$ , alors

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} q(h_0) \{ \lambda \widehat{\xi} \} dxdt \simeq \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (h_0 + \rho) (m_0 - z_0) dxdt \quad (2.5.48)$$

La pollution  $\lambda \widehat{\xi}$  est dite furtive pour la sentinelle définie par  $h_0$  si

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} q(h_0) \{ \lambda \widehat{\xi} \} dxdt = 0 \quad (2.5.49)$$

On a vérifié à la fin du n° précédent que, sous certaines conditions (raisonnables),  $q(h_0) \neq 0$ .

Il existera néanmoins toujours des pollutions que la sentinelle définie par  $h_0$  ne pourra pas observer. Ce sont les pollutions furtives.

Ici la notion de sentinelle de Lions où le contrôle et l'observation sont dans le même domaine, devient un cas particulier. On propose pour la définition précédente une généralisation de la notion de sentinelle au cas d'une observation et d'un contrôle ayant leurs supports dans deux ouverts différents.

## 2.6 SENTINELLE RÉGIONALE

La modélisation des problèmes environnementaux conduit à des systèmes mathématiques à données manquantes. C'est le cas par exemple des problèmes de météorologie où l'on ne connaît jamais la donnée initiale. Nous sommes concernés dans cet travail, par l'identification des termes de pollution présents dans l'équation d'état d'un système dissipatif à donnée initiale incomplète.

Dans ce but, la méthode de sentinelle de Lions (voir [29]) est utilisée. Ici, le problème de détermination d'une sentinelle est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro pour lequel on donne des estimations de type Carleman. <sup>(1)</sup>.

On considère ici  $h_0 \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$  et  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ , tel que  $\omega \neq \mathcal{O}$ . Plus précisément pour une fonction contrôle

$$u \in L^2(\omega \times (0, T))$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\lambda, \tau) &= \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} h_0 z(x, t; \lambda, \tau) dx dt + \int \int_{\omega \times (0, T)} u z(x, t; \lambda, \tau) dx dt \quad (2.6.1) \\ &= \int \int_{\Omega \times (0, T)} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z(x, t; \lambda, \tau) dx dt \end{aligned}$$

Où  $\chi_{\mathcal{O}}$  et  $\chi_{\omega}$  sont les fonctions caractéristiques de  $\mathcal{O}$  et  $\omega$  respectivement.

On considère le problème (2.5.1) avec  $A = \Delta$  (pour simplifier les calculs) et on divise le bords en deux  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  tel que  $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 = \emptyset$ ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z - \Delta z + f(z) = \xi + \lambda \hat{\xi} & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times (0, T) \\ z(0) = z_0 + \tau \hat{z}_0 & \text{dans } \Omega \\ z = 0 & \text{Sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & \text{Sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times (0, T) \end{array} \right. \quad (2.6.2)$$

**Définition 2.6.1** On dit que  $\mathcal{S}$  est une sentinelle définie par  $h_0$ , s'il existe un contrôle  $u$  tel que le couple  $(u, \mathcal{S})$  vérifie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) &= 0; \quad (2.6.3) \\ \|u\|_{L^2(\omega \times (0, T))} &= \min. \end{aligned}$$

Le problème d'existence d'une sentinelle est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro: trouver le contrôle optimal  $u \in L^2(\omega \times (0, T))$  tel que  $q(0) = 0$  où  $q$  est la solution du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial t} q - \Delta q + f'(z_0) q = h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{Sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 & \text{Sur } \Sigma_2 \end{array} \right. \quad (2.6.4)$$

<sup>(1)</sup>(voir: [10])

Pour cela, il faut résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$(P') : \left\{ \min_B \|u\|_{L^2(\omega \times (0,T))} \right\}$$

Où

$$B = \left\{ u \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial t} q - \Delta q + f'(z_0) q = h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{Sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 & \text{Sur } \Sigma_2 \end{array} \right. \right\}$$

### 2.6.1 Informations fournies par la sentinelle

L'information fournie par la sentinelle  $\mathcal{S}$ , (on a:  $\lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0,0) \simeq (\mathcal{S}_{obs} - \mathcal{S}(0,0))$ ), est donnée par

$$\lambda \int_0^T \int_{\Omega} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z_{\lambda} dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) (z_{obs} - z_0) dx dt$$

**Lemme 2.6.1**  $z_{\lambda} = \frac{\partial z}{\partial \lambda}(0,0)$  est solution du problème:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z_{\lambda} - \Delta z_{\lambda} + f'(z_0) z_{\lambda} = \widehat{\xi} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_{\lambda}(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ z_{\lambda} = 0 & \text{Sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial z_{\lambda}}{\partial \nu} = 0 & \text{Sur } \Sigma_2 \end{array} \right. \quad (2.6.5)$$

**Preuve.** Sachant que  $z_{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{z(\lambda,0) - z(0,0)}{\lambda} \right)$ ,

La fonction  $z(\lambda, \tau) |_{\lambda, \tau=0}$  est solution du système:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z(\lambda, 0) - \Delta z(\lambda, 0) + f(z(\lambda, 0)) = \xi + \lambda \widehat{\xi} & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times (0, T) \\ z(0)(\lambda, 0) = z_0 & \text{dans } \Omega \\ z(\lambda, 0) = 0 & \text{Sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial z}{\partial \nu}(\lambda, 0) = 0 & \text{Sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times (0, T) \end{array} \right.$$

et  $z_0 = z(\lambda, \tau) |_{\lambda, \tau=0}$  est solution du système:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z(0, 0) - \Delta z(0, 0) + f(z(0, 0)) = \xi & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times (0, T) \\ z(0)(0, 0) = z_0 & \text{dans } \Omega \\ z(0, 0) = 0 & \text{Sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial z}{\partial \nu}(0, 0) = 0 & \text{Sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times (0, T) \end{array} \right.$$

En retranchant les deux systèmes et en multipliant par  $\frac{1}{\lambda}$ , on trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{z(\lambda,0)-z(0,0)}{\lambda} \right) - \Delta \left( \frac{z(\lambda,0)-z(0,0)}{\lambda} \right) + \left( \frac{f(z(\lambda,0))-f(z(0,0))}{\lambda} \right) = \widehat{\xi} \text{ dans } \mathcal{Q} \\ \frac{z(0)(\lambda,0)-z(0)(0,0)}{\lambda} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{z(\lambda,0)-z(0,0)}{\lambda} = 0 \text{ Sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{z(\lambda,0)-z(0,0)}{\lambda} \right) = 0 \text{ Sur } \Sigma_2 \end{array} \right.$$

Par passage à la limite quand  $\lambda \rightarrow 0$ , on obtient (2.6.5). ■

On multiplie (2.6.5) par  $q$  et en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} q L z_{\lambda} dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} z_{\lambda} L^* q dx dt + \int_{\Omega} q(T) z_{\tau}(T) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} q(0) z_{\tau}(0) dx - \int_0^T \int_{\Gamma} q \frac{\partial z_{\lambda}}{\partial \nu} d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma} z_{\lambda} \frac{\partial q}{\partial \nu} d\Gamma dt. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Tq:  $L$  est un opérateur différentiable défini par:  $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + f'(z_0) I_d$ .

Comme  $q$  et  $z_{\lambda}$  sont solutions de (2.6.4) et (2.6.5) respectivement, (2.6.6) devient

$$\int_0^T \int_{\Omega} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z_{\lambda} dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} q \widehat{\xi} dx dt$$

Finalement, on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) (m_0 - z_0) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} q \left\{ \lambda \widehat{\xi} \right\} dx dt \quad (2.6.7)$$

Donc, la connaissance du contrôle optimal  $u$  fournit des informations sur le terme de pollution  $\lambda \widehat{\xi}$ .

## 2.6.2 Construction d'une sentinelle

On a montré que l'existence d'une sentinelle est équivalente à un problème de contrôlabilité à zéro, l'outil essentiel pour résoudre le problème d'existence est une inégalité d'observabilité de type Carleman. Pour ce faire, on introduit l'espace

$$V = \left\{ v \in C^{\infty}(\overline{\mathcal{Q}}), v|_{\Sigma_1} = \frac{\partial v}{\partial t}|_{\Sigma_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Sigma_2} = 0 \right\}$$

Alors le théorème suivant donne une inégalité de Carleman. (Pour la démonstration voir [58]).

**Théorème 2.6.1** Il existe une constante positive  $C = C(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, f'(z_0))$  telle que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^2} |w|^2 dxdt \leq C \left[ \int_0^T \int_{\Omega} |Lw|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\omega} |w|^2 dxdt \right]; \forall w \in V, \quad (2.6.8)$$

où  $\theta \in C^2(\mathcal{Q})$  positive avec  $\frac{1}{\theta}$  bornée.

**Remarque 2.6.1** si  $Lw = 0$ , l'inégalité obtenue est appelé "Inégalité d'observabilité" car si  $w = 0$  sur  $\omega \times (0, T)$  implique que  $w = 0$  sur  $\Omega \times (0, T)$  tout entier.

On définit une forme bilinéaire symétrique de  $V \times V$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$a(w, v) = \int_0^T \int_{\Omega} LwLv dxdt + \int_0^T \int_{\omega} wv dxdt \quad (2.6.9)$$

On déduit le lemme suivant:

**Lemme 2.6.2** la forme bilinéaire  $a(., .)$  est un produit scalaire.

**Preuve.** On a  $a(., .)$  une forme bilinéaire, symétrique et positive

$$a(w, w) = \int_0^T \int_{\Omega} |Lw|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\omega} |w|^2 dxdt \geq 0; \forall w \in V.$$

Il reste à montrer que

$$a(w, w) = 0 \implies w = 0,$$

On a

$$a(w, w) = 0 \implies \int_0^T \int_{\Omega} |Lw|^2 dxdt = 0 \text{ et } \int_0^T \int_{\omega} |w|^2 dxdt = 0,$$

D'après (2.6.8) on déduit

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^2} |w|^2 dxdt = 0 \implies w = 0 \text{ dans } \mathcal{Q}.$$

Donc,  $a(., .)$  est un produit scalaire. ■

Soit  $W$  l'espace complété de  $V$  pour la norme  $\|.\|_V$  définie par:

$$\|w\|_W = \sqrt{a(w, w)} \quad (2.6.10)$$

Alors  $W$  est un espace de Hilbert et de plus  $V$  est dense dans  $W$ . On peut préciser la structure des éléments de  $W$ . En effet, soit  $H_\theta(\mathcal{Q})$  l'espace de Hilbert à poids défini par:

$$H_\theta(\mathcal{Q}) = \left\{ v \in L^2(\mathcal{Q}) \text{ tel que } \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |v|^2 dxdt < \infty \right\} \quad (2.6.11)$$

muni de la norme

$$\|v\|_\theta = \left( \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |v|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, par l'application de l'inégalité de Carleman (2.6.8) on obtient

$$\|v\|_\theta \leq C \|v\|_W.$$

Ce qui montre que  $W$  s'injecte continûment dans  $H_\theta(\mathcal{Q})$ .

On considère, maintenant, l'application linéaire suivante:

$$l: \begin{array}{l} W \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto l(v) = \int_0^T \int_\Omega h_0 \chi_{\mathcal{O}} v dxdt \end{array}$$

où la valeur de  $h_0$  est donnée dans  $L^2(\mathcal{Q})$ .

**Lemme 2.6.3** *On suppose que*

$$h_0 \in L^2(\mathcal{Q}) \text{ et que } (\theta h_0) \in L^2(\mathcal{Q}) \quad (2.6.12)$$

*alors  $l$  est continue.*

**Preuve.** on a

$$|l(v)| \leq \left( \int_0^T \int_\Omega |\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |v|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6.13)$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz. Comme  $\theta h_0 \in L^2(\mathcal{Q})$ , on obtient

$$\left( \int_0^T \int_\Omega |\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \text{ constante,} \quad (2.6.14)$$

de plus

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |v|^2 dxdt \leq C \left( \int_0^T \int_\Omega |Lv|^2 dxdt + \int_0^T \int_\omega |v|^2 dxdt \right) = C \|v\|_W^2.$$

Ainsi

$$|l(v)| \leq C_1 \sqrt{C} \|v\|_W.$$

donc  $l$  est continue sur  $W$ . ■

En conséquence de ce qui précède on a la proposition suivante:

**Proposition 2.6.1** *On suppose que l'hypothèse (2.6.12) est satisfaite. Alors il existe un unique élément  $\bar{w} \in W$  solution du problème*

$$a(\bar{w}, v) = \int_0^T \int_{\Omega} h_0 \chi_{\mathcal{O}} v dx dt; \forall v \in W. \quad (2.6.15)$$

**Preuve.** L'application  $l$  est linéaire et continue sur  $W$  et comme la forme bilinéaire, symétrique  $a(.,.)$  est continue, coercive, alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique élément  $\bar{w} \in W$  solution de (2.6.15). ■

Nous allons montrer maintenant que l'ensemble des solutions qui satisfait (2.5.10) (2.5.11) est non vide.

**Proposition 2.6.2** *Sous l'hypothèse (2.6.12), soit  $\bar{w} \in W$  l'unique solution de (2.6.15), on pose*

$$\begin{cases} u = -\bar{w} \chi_{\omega}, \\ q = L\bar{w} \end{cases} \quad (2.6.16)$$

Alors

1/  $(u, q)$  est une solution du système (2.5.10) (2.5.11), c'est-à-dire qu'il existe une unique sentinelle insensible aux termes manquants.

2/ on a

$$\begin{aligned} \|\bar{w}\|_W &\leq C \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\mathcal{Q})}; \quad C \text{ est une constante} \\ \|u\|_{L^2(\omega \times (0, T))} &\leq C \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\mathcal{Q})}, \\ \|q\|_{L^2(\mathcal{Q})} &\leq C \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\mathcal{Q})}. \end{aligned}$$

**Preuve.** 1/ Comme  $\bar{w}$  est solution de (2.6.15) alors

$$\int_0^T \int_{\Omega} L\bar{w} L v dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \bar{w} v dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} h_0 \chi_{\mathcal{O}} v dx dt; \forall v \in W. \quad (2.6.17)$$

mais  $(u, q)$  satisfait (2.6.16), alors (2.6.17) s'écrit

$$\int_0^T \int_{\Omega} qLv dxdt - \int_0^T \int_{\omega} uv dxdt = \int_0^T \int_{\Omega} h_0\chi_{\mathcal{O}} v dxdt; \forall v \in W. \quad (2.6.18)$$

donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} qLv dxdt = \int_0^T \int_{\Omega} (h_0\chi_{\mathcal{O}} + u\chi_{\omega}) v dxdt; \forall v \in W. \quad (2.6.19)$$

Il s'agit de montrer que  $q$  est solution du système (2.5.10) (2.5.11). L'équation (2.6.19) est vraie en particulier pour  $v \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}) \subset V \subset W$ , c'est-à-dire

$$\langle q, Lv \rangle_{L^2(\mathcal{Q})} = \langle h_0\chi_{\mathcal{O}} + u\chi_{\omega}, v \rangle_{L^2(\mathcal{Q})}; \forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}),$$

d'où au sens de  $\mathcal{D}(\mathcal{Q})$ , on a

$$\begin{aligned} L^*q &= h_0\chi_{\mathcal{O}} + u\chi_{\omega} \\ \implies L^*q &\in L^2(\mathcal{Q}). \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

De plus, on a  $q \in L^2(\mathcal{Q})$  et par application du théorème de Lions-Magenes (voir [38]), les fonctions traces  $q$  en  $t = 0$ ,  $t = T$  et  $q$  sur  $\Sigma$  excitent.

On multiplie (2.6.20) par  $\rho \in C^\infty(\overline{\mathcal{Q}})$  et on intègre par partie sur  $\mathcal{Q}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \rho L^*q dxdt &= \int_0^T \int_{\Omega} qL\rho dxdt - \int_{\Omega} q(T)\rho(T) dx \\ &+ \int_{\Omega} q(0)\rho(0) dx - \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial q}{\partial \nu} \rho d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} q d\Gamma dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (h_0\chi_{\mathcal{O}} + u\chi_{\omega}) \rho dxdt. \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Utilisant maintenant l'équation (2.6.20)

$$- \int_{\Omega} q(T)\rho(T) dx + \int_{\Omega} q(0)\rho(0) dx - \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial q}{\partial \nu} \rho d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} q d\Gamma dt = 0; \forall \rho \in C^\infty(\overline{\mathcal{Q}})$$

On prend  $\rho \in W$ , on obtient

$$- \int_{\Omega} q(T)\rho(T) dx + \int_{\Omega} q(0)\rho(0) dx - \int_0^T \int_{\Gamma_2} \frac{\partial q}{\partial \nu} \rho d\Gamma_2 dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} q d\Gamma_1 dt = 0; \quad (2.6.22)$$

pour  $\rho \in V$ , tel que  $\rho(0) = \rho(T) = 0$  et  $\rho|_{\Sigma_2} = 0$ . Alors il vient

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} q d\Gamma_1 dt = 0 \implies q = 0 \text{ sur } \Sigma_1,$$

On reprend (2.6.22) avec en particulier pour  $\rho \in V$ , tel que  $\rho(0) = \rho(T) = 0$  donc

$$\int_0^T \int_{\Gamma_2} \frac{\partial q}{\partial \nu} \rho d\Gamma_2 dt = 0 \implies \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_2,$$

Il en est de même pour  $\rho \in W$ , tel que  $\rho(0) = 0$ , donc

$$\int_{\Omega} q(T) \rho(T) dx = 0 \implies q(T) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

Enfin, on a

$$\int_{\Omega} q(0) \rho(0) dx = 0 \implies q(0) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Ainsi le couple  $(u, q)$  est solution du problème (2.5.10) - (2.5.11).

2/ On prouve maintenant les estimations.

On pose  $v = \bar{w}$  dans l'équation (2.6.15). par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |L\bar{w}|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\omega} |\bar{w}|^2 dxdt &= \int_0^T \int_{\Omega} h_0 \chi_{\mathcal{O}} \bar{w} dxdt \\ &\leq \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\mathcal{Q})} \left\| \frac{1}{\theta} \bar{w} \right\|_{L^2(\mathcal{Q})} \end{aligned}$$

de plus, l'inégalité de Carleman donne

$$\left\| \frac{1}{\theta} \bar{w} \right\|_{L^2(\mathcal{Q})} \leq \sqrt{C} \|\bar{w}\|_W \quad (2.6.23)$$

Utilisant l'inégalité (2.6.23), on trouve

$$\|\bar{w}\|_W = \int_0^T \int_{\Omega} |L\bar{w}|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\omega} |\bar{w}|^2 dxdt \leq \sqrt{C} \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\mathcal{Q})} \|\bar{w}\|_W \quad (2.6.24)$$

Ainsi

$$\|\bar{w}\|_W \leq \sqrt{C} \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\mathcal{Q})} \quad (2.6.25)$$

Donc la première estimation de la proposition est réalisée.

De plus, comme  $(u, q)$  satisfait (2.6.16), alors l'équation (2.6.24) s'écrit

$$\|q\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 + \|u\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2 \leq \sqrt{C} \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\mathcal{Q})} \|\bar{w}\|_W \quad (2.6.26)$$

de (2.6.25) et (2.6.26), il vient

$$\|q\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 + \|u\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2 \leq C \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 \quad (2.6.27)$$

On déduit alors la deuxième et la troisième estimation de la proposition. ■

Le théorème suivant donne l'existence de solution pour le problème  $(P')$

**Théorème 2.6.2** *Sous les hypothèses de la proposition précédente, il existe un couple unique  $(\widehat{u}, \widehat{q})$  solution du problème  $(P')$ , tel que*

$$\widehat{u} = -\widehat{\rho}\chi_\omega$$

où  $\widehat{\rho}$  est la solution du système

$$\begin{cases} L\widehat{\rho} = 0 & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ \widehat{\rho} = 0 & \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_2. \end{cases}$$

**Preuve.** Les hypothèses de la proposition (2.6.2) étant satisfaites, le domaine  $B$  est alors non vide. De plus, il est fermé. L'application  $u \longrightarrow \|u\|_{L^2(\omega \times (0, T))}$  est continue, coercive et strictement convexe. Alors, on déduit qu'il existe une unique solution pour le problème  $(P')$  qu'on note  $(\widehat{u}, \widehat{q}) \in B$  qui vérifie

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq \|u\|_{L^2(\omega \times (0, T))}; \forall u \in B.$$

On utilise la méthode de pénalisation pour obtenir le système d'optimalité pour  $(\widehat{u}, \widehat{q})$ .

Soit  $\epsilon > 0$ , on introduit la fonction suivante:

$$J_\epsilon(u, y) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|L^*y - h_0\chi_\mathcal{O} - u\chi_\omega\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2,$$

et on considère le problème  $(P_\epsilon)$  suivant

$$(P_\epsilon) : \begin{cases} \min J_\epsilon(u, y) \\ (u, y) \in B^\epsilon \end{cases}$$

avec

$$B^\epsilon = \left\{ (u, y) \text{ tel que } \begin{cases} L^*y - h_0\chi_\mathcal{O} - u\chi_\omega \in L^2(\mathcal{Q}) \\ y(T) = y(0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \right\}$$

le problème  $(P_\epsilon)$  admet une solution unique qu'on notera  $(u_\epsilon, y_\epsilon)$  tel que

$$\begin{cases} u_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{u} \text{ faiblement dans } L^2(\omega \times (0, T)), \\ y_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{q} \text{ faiblement dans } W. \end{cases}$$

Alors,  $(\widehat{u}, \widehat{q})$  est l'unique solution du problème (P) si et seulement s'il existe une fonction  $\widehat{\rho}$  telle que  $\{\widehat{u}, \widehat{q}, \widehat{\rho}\}$  est solution du système d'optimalité suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} L^* \widehat{q} = h_0 \chi_{\mathcal{O}} + \widehat{u} \chi_{\omega} & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ \widehat{q}(T) = \widehat{q}(0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \widehat{q} = 0 & \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \widehat{q}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_2. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} L \widehat{\rho} = 0 & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ \widehat{\rho} = 0 & \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_2. \end{array} \right.$$

avec

$$\widehat{u} = -\widehat{\rho} \chi_{\omega}, \widehat{\rho} \in W$$

■

## 2.7 SENTINELLE PONCTUELLE (DISCRÈTE)

Jean Pierre Kernevez et son équipe ont été les premiers à avoir proposé des résultats numériques sur les sentinelles dans les applications liées a la pollution de l'environnement dans les années 90 (voir [13, 11, 12, 40, 53, 51, 52]). Ces auteurs s'accordent à définir la source de pollution comme étant une fonction continue par rapport au temps en une position ponctuelle de l'espace. Nous nous plaçons dans le cas de problème (2.5.1), qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z + Az + f(z) = \xi + \sum_{i=1}^N \lambda_i \widehat{\xi}_i \delta(x - a_i) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z(0) = z^0 + \sum_{j=1}^M \tau_j \widehat{z}_j^0 & \text{dans } \Omega \\ z = 0 & \text{Sur } \Sigma \end{array} \right. \quad (2.7.1)$$

où

- Les  $a_i$  sont les points d'observation.
- $\delta(x - a_i)$  est la fonction de Dirac au point  $a_i$ .
- Les fonctions sources  $\lambda_i \widehat{\xi}_i$  qu'on suppose dans  $L^2(0, T; \Omega)$ .

Maintenant, le problème peut être formulé comme suit:

Trouver  $(\lambda_i, i = 1, \dots, N)$  représentant au mieux le débit qui a produit la mesure

$z_{obs}$ .

On définit une fonction  $u_i \in L^2(\mathcal{O})$  spécifique à la  $i^{\text{ième}}$  composante de  $\lambda$  doit être construite telle que:

$$(u_i, z_{obs})_{L^2(\mathcal{O})} = \lambda_i, \quad (2.7.2)$$

où  $z_{obs}$  est la fonction d'état mesurée. Si une telle fonction  $u_i$  existe, son unicité est assurée en choisissant la fonction de norme minimale.

La fonction  $u_i$  désigne la sentinelle permettant de déterminer le paramètre  $\lambda_i$ , donc pour estimer tout les  $\lambda_i$ , nous devons calculer toute la famille de fonctions  $(u_i)_{i=1, \dots, N}$ .

On a

$$z(\lambda, \tau) = \sum_{i=1}^N \lambda_i z_i + \sum_{j=1}^M \tau_j z_{\tau_j}, \quad (2.7.3)$$

où  $(z_i = z_{\lambda_i})_{i=1, \dots, N}$  et  $(z_{\tau_j})_{j=1, \dots, M}$  sont respectivement les solutions des équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z_i + Az_i + f'(z_0) z_i = \widehat{\xi}_i \delta(x - a_i) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_i(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ z_i = 0 & \text{Sur } \Sigma \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z_{\tau_j} + Az_{\tau_j} + f'(z_0) z_{\tau_j} = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_{\tau_j}(0) = \widehat{z}_j^0 & \text{dans } \Omega \\ z_{\tau_j} = 0 & \text{Sur } \Sigma \end{array} \right.$$

Alors, le produit scalaire de  $u_i$  avec  $z(\lambda, \tau)$  devient

$$(u_i, z(\lambda, \tau))_{L^2(\mathcal{O})} = \sum_{i=1}^N \lambda_i (u_i, z_i)_{L^2(\mathcal{O})} + \sum_{j=1}^M \tau_j (u_i, z_{\tau_j})_{L^2(\mathcal{O})}$$

Par conséquent, la formule (2.7.2) est équivalente à:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_i, z_k)_{L^2(\mathcal{O})} = 1 & \text{si } i = k \\ (u_i, z_k)_{L^2(\mathcal{O})} = 0 & \forall k = \overline{1, N}, i \neq k \\ (u_i, z_{\tau_j})_{L^2(\mathcal{O})} = 0 & \end{array} \right.$$

Ensuite, nous utilisons l'état adjoint noté  $q_i$  solution du système adjoint, en multipliant  $q_i$  par  $y_i$  (resp.  $z_{\tau_j}$ ) et en intégrant par partie en espace et en temps, les égalités précédentes deviennent:

$$\int_0^T \widehat{\xi}_i(t) q_i(a_i, t) dt = 1; 1 \leq i \leq N,$$

$$\int_{\Omega} z_0(x) q_i(x, 0) dx = 0.$$

Ce résultat est fondamental pour le calcul des sentinelles. En effet, il résume le fait que la sentinelle est sensible à  $\lambda_i$  et insensible à tous les autres paramètres de l'équation (2.7.1). Il permet aussi d'interpréter les égalités précédentes comme un problème de contrôle optimal. Cette méthode discrète a été exploitée dans la détermination des pollutions dans un aquifère (voir [46]), dans un Lac (voir [34]) et dans une rivière (voir [12]).

**Conclusion 2.7.1** *Nous avons construit les sentinelles régionales et ponctuelles à travers la théorie de la contrôlabilité régionale. La nouvelle notion des sentinelles régionales et ponctuelles a été appliquée à l'estimation du terme de pollution indépendamment du terme manquant à support dans une zone régionalement contrôlable. La contrôlabilité faible est un autre axe de recherche qui va contribuer dans la construction des sentinelles faibles.*

## 2.8 SENTINELLE FAIBLE

### 2.8.1 Présentation du problème

Dans cette section, on utilise une notion appelée "sentinelle faible" (voir [4, 54]) pour étudier l'estimation du terme de pollution du système distribués faiblement contrôlable indépendamment du terme manquant.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  représentant le domaine géométrique du système ( $n = 1, 2, 3$  pour les applications) et soit  $T > 0$ . On suppose que la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  est assez régulière.

On considère un système à paramètre distribué décrit par l'équation d'état de système:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z + \Delta z + f(z) = \xi + \lambda \widehat{\xi} & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times ]0, T[ \\ z(0) = z_0 + \tau \widehat{z}_0 & \text{dans } \Omega \\ z(t) = 0 & \text{Sur } \Sigma = \Gamma \times ]0, T[ \end{array} \right. \quad (2.8.1)$$

Où  $A$  génère un semi-groupe fortement continu  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  sur l'espace d'état  $L^2(\Omega)$ ,

$\lambda, \tau$  sont deux paramètres suffisamment petits

$$\xi, \widehat{\xi} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \text{ et } \left\| \widehat{\xi} \right\|_{L^2(\mathcal{Q})} \leq 1 \quad (2.8.2)$$

Et

$$z_0, \widehat{z}_0 \in L^2(\Omega), \text{ et } \|\widehat{z}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 \quad (2.8.3)$$

Si l'opérateur  $A$  est auto-adjoint à résolvante compacte alors (2.8.1) admet une solution faible unique fortement continue sur  $(0, T)$  et donnée par:

Cette solution se décompose en deux solutions:

La première est donnée par:

$$z(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t-s)\xi(s)ds$$

Et la seconde est donnée par:

$$\widehat{z}(t) = \tau\Phi(t)\widehat{z}_0 + \lambda \int_0^t \Phi(t-s)\widehat{\xi}(s)ds$$

Si  $A$  admet un système orthonormé complet de fonctions propres  $(\varphi_{m_j})$  associées aux valeurs propres  $(\lambda_m)$ ,  $\lambda_m$  étant de multiplicité  $r_m$ , alors le semi-groupe  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  engendré par  $A$  s'exprime, pour tout  $w$  de  $L^2(\Omega)$ , par

$$\Phi(t)w = \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda_m t} \sum_{j=1}^{r_m} \langle \varphi_{m_j}, w \rangle \varphi_{m_j} \text{ (voir: Lions [29]; El Jai Pritchard [8]).}$$

L'adjoint  $A^*$  de  $A$  engendre un semi-groupe  $(\Phi^*(t))_{t \geq 0}$  adjoint de  $(\Phi(t))_{t \geq 0}$  qui est également fortement continu sur  $L^2(\Omega)$ .

On suppose que  $\xi, z_0$  soient données alors que les  $\widehat{\xi}, \widehat{z}_0$  soient deux fonctions inconnues, l'objectif est d'estimer la fonction  $\widehat{\xi}$  indépendamment de la fonction  $\widehat{z}_0$  en utilisant la notion de la sentinelle faible.

## 2.8.2 Sentinelle faible

Soit maintenant une petite région  $\omega = \mathcal{O} \subset \Omega$ , considérée comme un observatoire, et soit  $h_0$  une fonction donnée dans  $L^2(\mathcal{V})$  où  $\mathcal{V} = \mathcal{O} \times (0, T)$

$$h_0 \in L^2(\mathcal{V}) \quad (2.8.4)$$

On considère la fonctionnelle

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int \int_{\mathcal{V}} (h_0 + u_\epsilon) z(x, t; \lambda, \tau) dx dt, \text{ où } u_\epsilon \in L^2(\mathcal{V}) \quad (2.8.5)$$

**Définition 2.8.1** On dira que la fonctionnelle  $\mathcal{S}$  est une sentinelle faible (ou sentinelle approchée) définie par  $h_0$  si les conditions suivantes ont lieu:

Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $u_\epsilon \in L^2(\mathcal{V})$  telle que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{S}(0, 0) \right| \leq \epsilon, \quad (2.8.6)$$

pour tout donnée initiale  $\widehat{z}_0$ .

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{V})} = \min \quad (2.8.7)$$

Pour construire la sentinelle faible, on doit déterminer  $u_\epsilon$  qui assure les conditions (2.8.6) et (2.8.7). Le problème d'existence d'une sentinelle faible est alors équivalent au problème suivant :

$$(P'') \begin{cases} \min \|u_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{V})} \\ u_\epsilon \in \Xi \end{cases}$$

où

$$\Xi = \left\{ u_\epsilon \text{ tel que } \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} q - \Delta q + f'(z_0) q = (h_0 + u_\epsilon) \chi_{\mathcal{O}} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \right\} \quad (2.8.8)$$

**Remarque 2.8.1** la méthode des sentinelles faible est équivalent à un problème de contrôlabilité faible.

**Théorème 2.8.1** Si le système dans (2.8.8) est faiblement contrôlable, alors pour tout  $\epsilon$  positif, il existe une fonction  $u_\epsilon \in L^2(\mathcal{V})$  qui vérifie les conditions (2.8.6) et (2.8.7).

**Preuve.** Si le système dans (2.8.8) est faiblement contrôlable, alors pour  $q(0) \in L^2(\Omega)$  et pour tout  $\epsilon$  positif, il existe une fonction  $u_\epsilon \in L^2(\mathcal{V})$  tel que:

$$\|q(x, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \quad (2.8.9)$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int \int_{\mathcal{V}} (h_0 + u_\epsilon) z_\tau(x, t; \lambda, \tau) dx dt$$

où  $z_\tau$  est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z_\tau - \Delta z_\tau + f'(z_0) z_\tau = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_\tau(0) = \widehat{z}_0 & \text{dans } \Omega \\ z_\tau = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{S}(\lambda, \tau) \right| &= \left| \int_{\Omega} q(0) \widehat{z}_0(0) dx \right| \leq \int_{\Omega} |q(0) \widehat{z}_0(0)| dx \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |q(0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} |\widehat{z}_0(0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|q(0)\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\widehat{z}_0(0)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

comme  $\|\widehat{z}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ ; il en résulte que

$$\|q(x, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$$

ce qui prouve (2.8.6) – (2.8.7). ■

La contrainte (2.8.9) prouve donc théoriquement être approchée avec une précision arbitraire. On peut donc, utiliser des algorithmes de contrôlabilité approchée.

**Conclusion 2.8.1** *Nous avons construit les sentinelles faibles à travers la théorie de la contrôlabilité faible. La nouvelle notion des sentinelles faibles a été appliquée à l'estimation du terme de pollution indépendamment du terme manquant  $\widehat{z}_0$  des systèmes faiblement contrôlables. Je pense que la contrôlabilité régionale développée par (EL Jai, et Pritchard [8]) et (Zerrik [16]) permet de généraliser la notion des sentinelles à d'autres systèmes.*

## 2.9 SENTINELLE DISCRIMINANTE

On considère le problème (2.6.2), les données observées peuvent être affectées d'erreurs sur les mesures ou des effets de "bruits", donc

$$z_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i m_i$$

où les fonctions  $m_0, m_1, \dots, m_n$  sont connues dans  $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$  mais les  $\beta_i \neq 0$  ne sont pas connus; on dit que les  $\beta_i$  sont les termes de bruit. Le problème maintenant est:

Peut-on obtenir des informations sur  $\lambda \widehat{\xi}$  qui ne soient pas affectées par les variations de  $z(0)$  autour de  $z_0$ ; et qui ne soient pas affectées par les bruits  $\beta_i m_i, i = 1, \dots, n$ ?

Dans une telle situation, en plus des hypothèses (2.5.3)-(2.5.4) il faudrait associer une condition d'insensibilité de la sentinelle aux effets des bruits

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u) m_i dx dt = 0; 1 \leq i \leq n. \quad (2.9.1)$$

Une telle sentinelle est dite "discriminante" (voir [29, 48, 1]).

**Remarque 2.9.1** 1) La sentinelle discriminante n'est pas sensible aux termes manquants (en  $\tau$ ), elle n'est pas non plus sensible aux bruits (en  $\beta$ ), elle peut donc différentier ce qui provient des termes  $\lambda$  en de ce qui provient des termes en (propriétés de discrimination).

2) Si  $\omega \neq \mathcal{O} \subset \Omega$ , la condition (2.9.1) devient

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 m_i dx dt + \int_0^T \int_{\omega} u m_i dx dt = 0; 1 \leq i \leq n. \quad (2.9.2)$$

3) On suppose que  $\omega \subset \mathcal{O} \subset \Omega$ ; car les  $m_i$  sont à support dans  $\mathcal{O} \times (0, T)$ .

**Définition 2.9.1** On dit que  $\mathcal{S}$  est une sentinelle discriminante (ou sentinelle pour une observation avec bruit) définie par  $h_0$  s'il existe un contrôle  $u$  tel que:

$$\begin{cases} 1/ \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{S}(0, 0) = 0; \forall \widehat{z}_0 \in L^2(\Omega), \\ 2/ \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 m_i dx dt + \int_0^T \int_{\omega} u m_i dx dt = 0; 1 \leq i \leq n, \\ 3/ \|u\|_{L^2(\omega \times (0, T))} = \min \end{cases}$$

On va maintenant montrer que l'existence d'une sentinelle discriminante insensible aux termes de bruit et aux termes manquants est équivalente à un problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle. Soit  $K$  le sous espace vectoriel de  $L^2(\omega \times (0, T))$  engendré par les  $(m_i \chi_{\omega}; 1 \leq i \leq n)$ , que l'on suppose linéairement indépendants. Alors, on a le lemme suivant:

**Lemme 2.9.1** *L'application*

$$f : \begin{array}{l} K \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ k \longmapsto f(k) = \left( \int_0^T \int_{\omega} u m_1 dx dt, \int_0^T \int_{\omega} u m_2 dx dt, \dots, \int_0^T \int_{\omega} u m_n dx dt \right) \end{array}$$

*Est un isomorphisme. De plus, la condition d'insensibilité aux termes de bruits est équivalente à*

$$\exists k_0 \in K \text{ tel que } u = k_0 + k \text{ avec } k \in K^{\perp} \quad (2.9.3)$$

**Preuve.** L'application  $f$  est linéaire et bijective, car

$$\begin{aligned} \ker f &= \{k \in K, f(k) = 0\} \\ &= \left\{ k \in K, \int_0^T \int_{\omega} k m_i dx dt = 0, \forall i = 1, \dots, n \right\} \\ &= \left\{ k \in K, \int_0^T \int_{\omega} k \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i dx dt = 0 \right\} \\ &= \left\{ k = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i, \int_0^T \int_{\omega} k \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i dx dt = 0 \right\} \\ &= \left\{ k \in K, \|k\|_{L^2(\omega \times (0,T))}^2 = 0 \right\} = \{0\}. \end{aligned}$$

d'où  $f$  est injective et par suite elle est isomorphisme. Par conséquent, on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \exists ! k_0 \in K \text{ tel que } f(k_0) = \alpha,$$

ce qui équivalent à

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{R}, \exists ! k_0 \in K \text{ tel que } \int_0^T \int_{\omega} k_0 m_i dx dt = \alpha_i; i = 1, \dots, n.$$

De la condition d'insensibilité, il vient

$$- \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 m_i dx dt = \int_0^T \int_{\omega} u m_i dx dt; \forall i = 1, \dots, n$$

pour

$$\alpha_i = - \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 m_i dx dt,$$

on déduit que

$$\int_0^T \int_{\omega} k_0 m_i dx dt = \int_0^T \int_{\omega} u m_i dx dt;$$

par suite, on conclut

$$u - k_0 \in K^\perp.$$

Ainsi  $u - k_0 = k$  avec  $k \in K^\perp$  et  $k_0 \in K$ . ■

Le problème d'existence d'une sentinelle discriminante est alors équivalent au problème suivant

$$(P_2) \begin{cases} \min \|k\|_{L^2(\omega \times (0,T))} \\ k \in A_2 \end{cases}$$

où

$$A_2 = \left\{ k \text{ tel que } \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} q - \Delta q + f'(z_0) q = h^* \chi_{\mathcal{O}} + k \chi_\omega & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = q(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases} \right\} \quad (2.9.4)$$

où  $h^* = h_0 \chi_{\mathcal{O}} + k_0 \chi_\omega$ .

On définit une forme bilinéaire symétrique de  $V \times V$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$a(w, v) = \int_0^T \int_\Omega LwLv dxdt + \int_0^T \int_\omega (w - Pw)(v - Pv) dxdt,$$

$P$  est la projection orthogonale de  $L^2(\omega \times (0, T))$  sur  $K$ ; et  $V$  est un espace donné par (2.6.8).

Pour que le domaine des contraintes soit non vide, on utilise une inégalité de Carleman adaptée à notre problème. La proposition suivante montre bien que le domaine  $A_2$  est non vide.

**Proposition 2.9.1** Soit  $\bar{w} \in W$  l'unique solution de

$$a(\bar{w}, v) = \int_0^T \int_\Omega h_0 \chi_{\mathcal{O}} dxdt; \forall v \in W. \quad (2.9.5)$$

On suppose que

1/  $\exists k \in K, k \neq 0$  tel que:  $\frac{\partial}{\partial t} k - \Delta k + f'(z_0) k = 0$  dans  $\omega \times (0, T)$ ,

2/  $h_0 \in L^2(\mathcal{Q})$  et que  $\theta h_0 \in L^2(\mathcal{Q})$ , avec

$$\begin{cases} \bar{k} = -(\bar{u} - P\bar{u}) \chi_\omega \\ \bar{q} = L\bar{u} \end{cases} \quad (2.9.6)$$

alors  $(\bar{k}, \bar{q})$  est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial t} q - \Delta q + f'(z_0) q = h_0 \chi_{\mathcal{O}} + k_0 \chi_{\omega} + u \chi_{\omega} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = q(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_2 \end{array} \right. \quad (2.9.7)$$

c'est-à-dire il existe une sentinelle discriminante. De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|_W &\leq C \|\theta (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + k_0 \chi_{\omega})\|_{L^2(\mathcal{Q})} \\ \|\bar{k}\|_{L^2(\omega \times (0, T))} &\leq C \|\theta (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + k_0 \chi_{\omega})\|_{L^2(\mathcal{Q})} \\ \|\bar{q}\| &\leq C \|\theta (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + k_0 \chi_{\omega})\|_{L^2(\mathcal{Q})} \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

où  $C$  est une constante positive, qui n'est pas la même à chaque fois.

Ce problème est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro avec des contraintes sur le contrôle ( $k \in K^\perp$ ) non trivial.

**Théorème 2.9.1** *Sous les hypothèses de la proposition précédente, il existe un couple unique  $(\hat{k}, \hat{q})$  solution du problème  $(P_2)$ :*

**Preuve.** Les hypothèses de la proposition précédente sont réalisées, d'où le domaine  $A_2$  est non vide, de plus il est fermé. D'autre part, l'application  $k \longrightarrow \|k\|_{L^2(\omega \times (0, T))}$  est continue, coercive et strictement convexe, donc il existe une et une seule solution pour  $(P_2)$  qu'on note  $(\hat{k}, \hat{q}) \in A_2$  et qui vérifie

$$\|\hat{k}\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq \|k\|_{L^2(\omega \times (0, T))}; \forall (k, q) \in A_2.$$

■

## Partie I

# Application des sentinelles à l'identification d'une partie de la frontière inconnue

# Chapitre 3

## Application des sentinelles à l'identification d'une partie de la frontière inconnue

On considère l'équation de la chaleur dans un domaine dont une partie de la frontière est inconnue. Une méthode pour l'identification de cette partie inconnue à partir d'une observation partielle de la solution est présentée. Elle est basée sur la méthode des sentinelles. La méthode montre l'existence de sentinelles approchées sur le système linéarisé et construit une méthode de point fixe. Pour montrer l'existence des sentinelles linéarisées le problème d'identification est reformulé en un problème de contrôlabilité approchée dont la solution est obtenue par une technique d'analyse convexe. La propriété de contraction du point fixe découle directement de la définition des sentinelles. Enfin, des résultats numériques sont présentés <sup>(1)</sup>.

### 3.1 INTRODUCTION

Nous appliquons la méthode de sentinelle à l'identification d'une frontière inconnue comme elle est présentée par O. Bodart [50]. La méthode des sentinelles fournit une

---

<sup>(1)</sup>(voir: [50])

**Mots-clés:** Contrôlabilité, système évolutif, système distribué, opérateur, sentinelle.

implantation facile de la méthode des moindres carrés à laquelle elle est équivalente. Elle fut introduite par J.L.Lions [29] pour la détection de perturbations au second membre d'équation de diffusion-réaction.

Dans ce travail, nous intéressons au cas où l'on observe partiellement la solution d'une équation parabolique définie dans un domaine dont une partie de la frontière est inconnue. La technique des sentinelles étant locale, nous introduisons des sentinelles non linéaires pour les adapter à notre problème, et nous appliquons la méthode à l'identification de la frontière.

Cette méthode est constructive :

Nous fabriquons une suite de frontières approchées dont nous démontrons qu'elle converge localement vers la frontière à identifier.

Le but de la méthode présentée ici est d'estimer la forme d'une partie inconnue de la frontière d'un domaine. L'interprétation physique peut être la suivante, le domaine peut représenter un corps physique dans  $\mathbb{R}^2$ . La forme d'un côté de ce corps est connue et réglée à une température donnée, mais la forme de l'autre côté doit être estimée en mesurant la température distribuée au milieu du corps.

Un champ relatif intéressant de recherche traite "des problèmes libres de frontière" par exemple le problème de l'identification d'une frontière se déplaçant à chaque étape de temps (frontière mobile).

Résultats peuvent être prolongés à l'identification d'une partie de la frontière en mesurant un flux de la chaleur dans une autre partie le domaine. Ceci peut être une manière de résoudre le "problème de Stefan" [14].

En conclusion, des problèmes traitant l'identification de frontière est liée avec l'optimisation de forme. Le but industriel peut être l'optimisation de la forme d'un côté d'un objet tels que cet objet atteint une température distribuée donnée dans l'intérieur, alors que la température est placée sur l'autre côté.

Un tel problème peut être résolu avec la méthode que nous allons présenter.

## 3.2 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Nous définissons maintenant la méthode de sentinelle comme elle est présentée par J.L.Lions [29].

On considère un système physique dépendant un certain vecteur de paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ . Et pour fixer les idées, considérons l'observatoire  $\mathcal{O} \subset \Omega$ .

Soit  $z(x, t; \alpha) = z(\alpha)$  l'état correspondant à un vecteur de paramètre  $\alpha$ . On écrit cela formellement  $z(\alpha)$  pour simplifier l'écriture.

On suppose que  $z_{obs}$  l'état observé sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ , et on a donc:  $z_{obs} = z(\alpha)$  sur  $\mathcal{G} = \mathcal{O} \times (0, T)$

C'est-à-dire il n'y a aucun bruit (l'observation est donnée sans bruits)

J.L.Lions appelle la "sentinelle", c'est un fonctionnel noté par  $\mathcal{S}(\cdot)$  qui est le produit scalaire de l'état observé  $z_{obs}$  par la fonction de contrôle  $u$ . il est construit pour obtenir des informations sur les valeurs des paramètres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

La fonction  $z(x, t; \alpha)$  est différentiable au point  $\alpha_i$  (voir [50]). Et on note par:

$$z_{\alpha_i} = \frac{\partial z(\alpha)}{\partial \alpha_i} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

Il satisfait la relation linéaire:

$$z(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_{\alpha_i}$$

Dans la méthode des sentinelles, on va essayer d'estimer le paramètre  $i_0^{\text{ème}}$  du système. Alors:

$$\mathcal{S}(\alpha) = (u, z(\alpha)) = \alpha_{i_0}$$

C'est-à-dire:

$$\mathcal{S}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (u, z_{\alpha_i}) = \alpha_{i_0}$$

Ce but sera réalisé:

$$\begin{cases} (u, z_{\alpha_i}) = 0 & \forall i \neq i_0 \\ (u, z_{\alpha_{i_0}}) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Ceci signifie que la sentinelle doit être peu sensible à tous les paramètres mais à un. Etant donné que la norme de  $u$  est minimum, telle que la fonction de contrôle  $u$  est unique (s'il existe).

• Par conséquent si les valeurs de tous les composants du vecteur  $\alpha$  sont voulues, une fonction  $u$  pour chaque composant de devoir être établi. Soient  $u_j$  et  $\mathcal{S}_j$  être respectivement la fonction de contrôle et la sentinelle associées au paramètre  $\alpha_j$ ; alors nous avons besoin de cela :

$$(u_j, z_{\alpha_i}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.1)$$

Soit  $\mathcal{S}(\cdot)$  la sentinelle définie par la fonction de contrôle  $u_j$  :

$$\mathcal{S}(\alpha) = (u_j, z(\alpha))_{j=1, \dots, n}$$

En utilisant (3.1) on obtient que:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\alpha) &= (u_j, z(\alpha))_{j=1, \dots, n} = \left( u_j, \sum_{i=1}^n \alpha_i z_{\alpha_i} \right)_{j=1, \dots, n} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (u_j, z_{\alpha_i})_{j=1, \dots, n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij}; \forall j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Alors

$$D_\alpha \mathcal{S} = Id \quad (3.2)$$

Où  $Id$  est la matrice identité (unité). Et  $D_\alpha \mathcal{S}$  le différentiel de  $\mathcal{S}$  en ce qui concerne son paramètre.

**Orientation:** Pour le reste du travail, nous prolongerons la notion des sentinelles au cas de l'identification non linéaire d'un paramètre appartenant à  $l^2(\mathbb{R})$  au lieu de  $\mathbb{R}^n$ . Et la sentinelle  $\mathcal{S}(\cdot)$  définie par  $u_j$  donnée avec:  $\mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \alpha) = (u_j(\tilde{\alpha}), z(\alpha))_{j=1, \dots, \infty}$

Nous avons maintenant rempli l'introduction aux sentinelles non linéaires, et exposition ensuite comment elle est utilisée dans la configuration de notre problème.

On considère maintenant les situations où l'on manque d'informations sur le domaine (partie inconnue sur la frontière) dans lequel le système est étudié.

On formulera cela de la manière suivante.

Soit  $\Omega_0$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\partial\Omega_0 = \Gamma^* \cup P_0$ , avec  $\Gamma^* \cap P_0 = \emptyset$  tels que  $P_0$  est inconnu.  $T > 0$  est fixe.

$$P_0 \subset \Gamma = \partial\Omega$$

On considère ensuite  $\Omega_\alpha$  ( $\Omega_\alpha$  déformation du domaine  $\Omega_0$ ) ouvert "voisin" de  $\Omega_0$  de frontière  $\partial\Omega_\alpha = \Gamma^* \cup P_\alpha$ .

Tels que  $\Omega_\alpha$  est définie à partir de  $\Omega$  comme le lieu des points

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \alpha(x) w(x), x \in \Omega_0 \\ \text{Où } w \text{ est une zone transversal connu des vecteurs de classe } \mathcal{C}^\infty \\ \alpha \text{ fonction } \mathcal{C}^2 \text{ quelconque sur } P_0 \\ \text{Tels que } \Gamma^* \text{ restes invariables par la déformation } \alpha w. \end{array} \right.$$

Où  $P_\alpha$  est définie à partir de  $P_0$  par

$$P_\alpha = \{x + \alpha(x) w(x), x \in P_0\}$$

On pose

$$\mathcal{Q}_\alpha = \Omega_\alpha \times ]0, T[, \Sigma^* = \Gamma^* \times ]0, T[, \Sigma_\alpha = P_\alpha \times ]0, T[$$

Soit le système d'état suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z - \Delta z & = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q}_\alpha \\ z & = f \quad \text{sur } \Sigma^* \\ z & = 0 \quad \text{sur } \Sigma_\alpha \\ z(., 0) & = 0 \quad \text{dans } \Omega_\alpha \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Tels que:

$$f \in L^2\left((0, T), H^{\frac{3}{2}}(\Gamma^*)\right)$$

$$z \in L^2\left((0, T), H^2(\Omega_\alpha)\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} \in L^2\left((0, T), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$$

On suppose que (3.3) admet une solution unique donnée par  $z(\alpha) = z(x, t; \alpha)$  dans un certain espace convenable. La question est

**(q)** comment à l'identification d'une frontière inconnue ( $P_0$ )?

**Hypothèse 1:** Pour la simplicité, on suppose qu'il existe  $\bar{\alpha}$  telle que

$$z(x, t; \bar{\alpha}) = z_{obs} \quad ; \forall (x, t) \in \mathcal{G}$$

Où  $z(x, t; \bar{\alpha})$  est la solution de (3.3) dans ce domaine  $\Omega_{\bar{\alpha}}$ .

**Hypothèse 2:** Pour estimer la forme d'une partie inconnue de la frontière d'un domaine nous fabriquons une suite  $(\alpha^k)_{k=0,\dots,\infty}$  convergent localement vers  $\bar{\alpha}$  dans un certain sens, à partir d'une première estimation  $\alpha^0$ . Que ceci donnera une approximation de la forme de  $P_{\bar{\alpha}}$ . Le calcul  $\alpha^{k+1}$  de  $\alpha^k$  sera fait par la méthode de sentinelle.

- Considérons la paramétrisation suivante de  $P_{\alpha}$  :

$$P_{\alpha} = \{x(s) + \alpha(s) w(s); s \in [0, 1], x(s) \in P_0\} \quad (3.4)$$

Où  $\alpha$  est  $C^2$  fonction, ainsi elle appartient  $L^2(]0, 1[)$ . Décomposition  $\alpha$  au-dessus d'une base de fonction  $(b_j)_{j=1,\dots,\infty}$  dans  $C^2(0, 1)$ , nous dénoterons par  $\alpha \in l^2(\mathbb{R})$  le vecteur du même rang (infini) du  $\alpha$  de fonction dans cette base.

Alors on peut écrire la formule (3.4) sous la forme

$$P_{\alpha} = \left\{ x(s) + \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j b_j(s) w(s); s \in [0, 1], x(s) \in P_0 \right\} \quad (3.5)$$

Alors si  $\bar{\alpha} \in l^2(\mathbb{R})$  est la paramétrisation de  $P_{\bar{\alpha}}$ ; nous établirons un ordre  $(\alpha^k)_{k=0,\dots,\infty}$  convergent à  $\bar{\alpha}$  dans  $l^2(\mathbb{R})$ .

### 3.3 APPLICATION DE LA MÉTHODE DES SENTINELLES

On considère maintenant la méthode de sentinelle de Lions (voir [29]) qui est une autre tentative et apporte une meilleure réponse pour remettre en cause (q), car nous expliquerons maintenant:

On va introduire (si possible) les sentinelles à partir de l'observation de  $z$  sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ .

Donc, si  $z(x, t; \alpha)$  désigne la solution de (3.3), l'observation est  $z(\bar{\alpha})$  sur  $\mathcal{G} = \mathcal{O} \times (0, T) = m_0$  donnée dans  $L^2(\mathcal{G})$ .

Soit par ailleurs une fonction de contrôle  $u$  à déterminer avec  $u \in \mathcal{U} = L^2(\mathcal{G})$ .

On considère la fonctionnelle  $\mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \alpha)$  défini par:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} l^2(\mathbb{R}) \times l^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{R}) \\ (\tilde{\alpha}, \alpha) & \longmapsto & \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \alpha) = \left( \int_{\mathcal{G}} u_i(\tilde{\alpha}) z(\alpha) dx dt \right)_{i=1, \dots, \infty} \end{cases} \quad (3.6)$$

Où  $z(\alpha) = z(x, t; \alpha)$  est la solution de (3.3).

On dira que la fonctionnelle  $\mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \alpha)$  est une sentinelle définie par  $u_i(\tilde{\alpha})$  si les conditions suivantes ont lieu:

$$\|u_i(\tilde{\alpha})\|_{L^2(\mathcal{G})} = \text{minimum}. \quad (3.7)$$

$$D_{\alpha} \mathcal{S}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = Id + M \quad \forall \hat{\alpha} \in l^2(\mathbb{R}) \quad (3.8)$$

Où  $Id$  est la matrice identité (unité) et  $M \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{R}))$  telle que:

$$\|(M_i)\|_{l^2(\mathbb{R})} = \frac{\epsilon}{i} \quad \text{pour } i = 1, \dots, \infty \quad (3.9)$$

Telle que  $D_{\alpha} \mathcal{S}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha})$  le différentiel de  $\mathcal{S}$ , calculé au point  $(\hat{\alpha}, \hat{\alpha})$ .  $(M_i)$  la ligne  $i^{\text{ème}}$  du matrice  $M$ .

Alors  $\mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \alpha)$  définie par (3.6) (3.7) (3.8) (3.9) existe et unique. (Cela signifie l'existence et l'unicité de la famille des fonctions  $u_i(\tilde{\alpha})_{i=1, \dots, \infty}$ ).

### 3.3.1 Etat Adjoint

#### La condition d'insensibilité

Désignons par:  $z_{\alpha_j} = \frac{\partial z(\tilde{\alpha})}{\partial \alpha_j}$  pour  $j = 1, \dots, \infty$ ; la solution de:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z_{\alpha_j} - \Delta z_{\alpha_j} & = 0 & \text{dans } \mathcal{Q}_{\tilde{\alpha}} \\ z_{\alpha_j} & = 0 & \text{sur } \Sigma^* \\ z_{\alpha_j} & = -b_j(\nabla z(\tilde{\alpha}) w) & \text{sur } \Sigma_{\tilde{\alpha}} \\ z_{\alpha_j}(\cdot, 0) & = 0 & \text{dans } \Omega_{\tilde{\alpha}} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Où  $z(\tilde{\alpha}) = z(x, t; \tilde{\alpha})$  est la solution de (3.3).

L'élément général de la matrice infinie  $D_\alpha \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})$  donnée par:

$$(D_\alpha \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}))_{ij} = \int_{\mathcal{G}} u_i(\tilde{\alpha}) z_{\alpha_j} dxdt \quad (3.11)$$

D'après la condition (3.8) et pour "i" fixé on a:

$$\int_{\mathcal{G}} u_i(\tilde{\alpha}) z_{\alpha_j} dxdt = \delta_{ij} + (M)_{ij} \quad j = 1, \dots, \infty \quad (3.12)$$

Où la matrice  $M$  est définie comme (3.9).

### L'état adjoint

Soit  $q_i \in L^2(]0, T[; H_0^1(\Omega_{\tilde{\alpha}}) \cap H^2(\Omega_{\tilde{\alpha}}))$  est la solution du problème adjoint suivant:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} q_i - \Delta q_i = u_i(\tilde{\alpha}) \chi_{\mathcal{G}} & \text{dans } \mathcal{Q}_{\tilde{\alpha}} \\ q_i = 0 & \text{sur } \Sigma_{\tilde{\alpha}} \\ q_i(., T) = 0 & \text{dans } \Omega_{\tilde{\alpha}} \end{cases} \quad (3.13)$$

En multipliant l'équation (3.13) par  $z_{\alpha_j}$  et en appliquant la formule de **Green**, on obtient

$$\int_{\mathcal{G}} u_i(\tilde{\alpha}) z_{\alpha_j} dxdt = \int_{\Sigma_{\tilde{\alpha}}} b_j(\nabla z(\tilde{\alpha}) \cdot w) \frac{\partial q_i}{\partial \nu} d\Sigma \quad (3.14)$$

On définit maintenant un opérateur linéaire continu  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}), l^2(\mathbb{R}))$

Par

$$\mathcal{B} : \begin{cases} L^2(\mathcal{G}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}) \\ u_i(\tilde{\alpha}) \longmapsto (\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}))_j = \left( \int_{\Sigma_{\tilde{\alpha}}} b_j(\nabla z(\tilde{\alpha}) \cdot w) \frac{\partial q_i}{\partial \nu} d\Sigma \right)_{j=1, \dots, \infty} \end{cases}$$

Après l'équation (3.14) et (3.11) on peut écrire

$$\begin{aligned} (D_\alpha \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}))_{ij} &= \int_{\mathcal{G}} u_i(\tilde{\alpha}) z_{\alpha_j} dxdt = \left( \int_{\Sigma_{\tilde{\alpha}}} b_j(\nabla z(\tilde{\alpha}) \cdot w) \frac{\partial q_i}{\partial \nu} d\Sigma \right)_{j=1, \dots, \infty} \\ &= (\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}))_{j=1, \dots, \infty} \end{aligned}$$

Alors

$$(D_\alpha \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}))_{ij} = (\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}))_j \quad (3.15)$$

C'est un problème de contrôle ; c'est-à-dire trouver  $u_i(\tilde{\alpha}) \in L^2(\mathcal{G})$  de la norme minimal tels que  $\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}) = y$  avec  $y \in l^2(\mathbb{R})$ .

Mais c'est un type du problème de contrôlabilité exacte ; et ce que pouvons réaliser la contrôlabilité approximative, qui est suffisante pour l'application numérique.

### 3.3.2 Construction de la sentinelle

#### Équivalence à un problème de contrôlabilité

On va montrer que  $\overline{\text{Im}(\mathcal{B})} = l^2(\mathbb{R})$  (on peut montrer que  $B^*$  "adjoint de  $B$ " est injective).

C'est-à-dire  $\ker(\mathcal{B}^*) = \{0\}$ .

L'opérateur adjoint  $\mathcal{B}^* \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{R}), L^2(\mathcal{G}))$  est donnée par:

$$\mathcal{B}^* : \begin{cases} l^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathcal{G}) \\ (\sigma_j)_{j=1, \dots, \infty} & \longmapsto & \mathcal{B}^*(\sigma_j) = \chi_{\mathcal{G}} \Phi \end{cases}$$

Où  $\Phi$  la solution du système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \Delta \Phi = 0 & \text{dans } \mathcal{Q}_{\tilde{\alpha}} \\ \Phi = 0 & \text{sur } \Sigma^* \\ \Phi = -(\nabla z(\tilde{\alpha}) \cdot w) \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j b_j & \text{sur } \Sigma_{\tilde{\alpha}} \\ \Phi(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega_{\tilde{\alpha}} \end{cases} \quad (3.16)$$

En effet d'après (3.16) on a:

$$(u, \Phi)_{L^2(\mathcal{G})} = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \int_{\Sigma_{\tilde{\alpha}}} b_j (\nabla z(\tilde{\alpha}) \cdot w) \frac{\partial q_i}{\partial \nu} d\Sigma = (\sigma, \mathcal{B}u)_{l^2(\mathbb{R})}$$

C'est-à-dire:

$$\Phi \chi_{\mathcal{G}} = B^* \sigma$$

On Suppose maintenant que  $B^* \sigma = \Phi \chi_{\mathcal{G}} = 0$ . C'est-à-dire  $\Phi = 0$  dans  $\mathcal{G}$ .

Alors d'après le théorème de **SAUT** et **SCHEURER** (voir [50]):

$$\Phi = 0 \Leftrightarrow (\nabla z(\tilde{\alpha}) \cdot w) \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j b_j = 0$$

Puisque  $(b_j)_{j=1, \dots, \infty}$  est une base de  $l^2(\mathbb{R})$ , alors

$$\{\nabla z(\tilde{\alpha}) w = 0\} \quad \text{ou} \quad \{\sigma_j = 0; j = 1, \dots, \infty\}$$

On va décomposé la zone  $w$  sur la normale et des vecteurs de tangente  $\nu_{\tilde{\alpha}}$  et  $\tau_{\tilde{\alpha}}$  sur  $P_{\tilde{\alpha}}$  que nous avons

$$\nabla z(\tilde{\alpha}) w(x) = \nabla z(\tilde{\alpha}) (a\nu_{\tilde{\alpha}}(x)) + \nabla z(\tilde{\alpha}) (b\tau_{\tilde{\alpha}}(x)); \forall x \in P_{\tilde{\alpha}}$$

puisque  $z(\tilde{\alpha}) = 0$  sur  $P_{\tilde{\alpha}}$  alors on a:

$$\nabla z(\tilde{\alpha}) w(x) = \nabla z(\tilde{\alpha})(a\nu_{\tilde{\alpha}}(x)) = a \frac{\partial z(\tilde{\alpha})}{\partial \nu_{\tilde{\alpha}}}; \forall x \in P_{\tilde{\alpha}}$$

D'après l'unicité de **CAUCHY** on a:

$$\nabla z(\tilde{\alpha}) \neq 0 \quad \text{sinon} \quad z(\tilde{\alpha}) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{Q}_{\tilde{\alpha}}$$

Donc

$$\nabla z(\tilde{\alpha}) \neq 0 \quad \text{alors} \quad \{\sigma_j = 0; j = 1, \dots, \infty\}$$

Alors on déduit que  $\mathcal{B}^*$  est injective.

$\ker(\mathcal{B}^*) = \{0\}$  équivaut à  $\overline{\text{Im}(\mathcal{B})} = l^2(\mathbb{R})$  C'est-à-dire

$$\forall \rho > 0, \forall y \in l^2(\mathbb{R}), \exists u_i(\tilde{\alpha}) \in L^2(\mathcal{G}); \|\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}) - y\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho. \quad (3.17)$$

### Utilisation de la contrôlabilité

Pour construire  $u_i(\tilde{\alpha})$  comme fonction de la norme minimal satisfaisant (3.17), qui sera fait par la méthode de dualité de Fenchel-Rockafellar

Soit:

$$u_{ad} = \left\{ u \in L^2(\mathcal{G}) \text{ telle que } \|\mathcal{B}u - y\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho, y \in l^2(\mathbb{R}) \right\}$$

D'après (3.17)  $u_{ad}$  est un ensemble admissible (non vide + convexe + fermé) dans  $L^2(\mathcal{G})$ . Ainsi il existe  $u_i(\tilde{\alpha})$  unique satisfaisant (3.7) et solution du problème de minimisation suivant:

$$\min_{u \in u_{ad}} \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathcal{G})}^2 \quad (3.18)$$

Soit  $F$  et  $G$  deux fonctions définies par:

$$F(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathcal{G})}^2 \quad \text{et} \quad G(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\mu - y\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut écrire la formule (3.18) sous la forme:

$$\min_{u \in L^2(\mathcal{G})} F(u) + G(\mathcal{B}u)$$

On appliquant le théorème de dualité de Fenchel-Rockafellar [26]. On obtient

$$u_i(\tilde{\alpha}) = \mathcal{B}^* \sigma^* \quad (3.19)$$

Où  $\sigma^*$  est la solution du problème dual de minimisation suivant:

$$\min_{\sigma \in l^2(\mathbb{R})} F^*(\mathcal{B}^* \sigma) + G^*(-\sigma) \quad (3.20)$$

Avec  $F^*$  et  $G^*$  étant les conjugués de Fenchel de  $F$  et  $G$ .

Telle que  $F^* = F$  et  $G^*$  définie par:

$$\begin{aligned} G^*(\sigma) &= \sup_{\mu \in l^2(\mathbb{R})} (\mu, \sigma) - G(\mu) = \sup_{\mu \in \overline{B(0, \rho)}} (y + \mu, \sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \\ &= (y, \sigma)_{l^2(\mathbb{R})} + \rho \|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Où  $\overline{B(0, \rho)}$  boule fermé du centre 0 et du rayon  $\rho$ .

Alors la formule (3.20) devient

$$\min_{\sigma \in l^2(\mathbb{R})} J(\sigma) = F(\Phi) + \rho \|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})} - (y, \sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \quad (3.21)$$

Où  $\Phi$  est la solution de (3.16)

**Lemme 3.3.1**  $\sigma^* = 0$  est la solution de (3.21) si et seulement si  $\|y\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$ .

**Preuve.** Puisque  $\sigma^* = 0$ , alors d'après (3.19) on a  $u_i(\tilde{\alpha}) = 0$  et  $\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}) - y = -y$

Donc  $\|\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}) - y\|_{l^2(\mathbb{R})} = \|y\|_{l^2(\mathbb{R})}$

D'après (3.17) on a:  $\|y\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$ .

Si  $\|y\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$  alors d'après (3.17) on a  $u_i(\tilde{\alpha}) = 0$  Appartient à  $u_{ad}$ .

$u_i(\tilde{\alpha}) = 0$  est alors la solution de (3.18). Puisque  $\mathcal{B}^*$  est injective l'équation (3.19)

fournit ce  $\sigma^* = 0$ . ■

Pour  $\sigma^* \neq 0$  Alors on suppose que  $\|y\|_{l^2(\mathbb{R})} > \rho$ .

Quel-que soit  $\delta\sigma \in l^2(\mathbb{R})$  et  $\sigma \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial J}{\partial \sigma}, \delta\sigma \right)_{l^2(\mathbb{R})} &= (\mathcal{B}^* \sigma, \mathcal{B}^* \delta\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} + \rho \left( \frac{\sigma}{\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})}}, \delta\sigma \right) - (y, \delta\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \\ &= \left( \mathcal{B} \mathcal{B}^* \sigma + \rho \frac{\sigma}{\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})}} - y, \delta\sigma \right)_{l^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Alors en particulier pour  $\sigma = \sigma^*$  on a

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^*\sigma^* + \rho \frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} - y = 0$$

Alors

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^*\sigma^* - y = -\rho \frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} \quad (3.22)$$

Puisque  $u_i(\tilde{\alpha}) = \mathcal{B}^*\sigma^*$  alors on a:

$$\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}) - y = -\rho \frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}$$

Donc

$$\|\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}) - y\| = \rho$$

Choix  $(y)_j = \delta_{ij}; j = 1, \dots, \infty$

Où  $(y)_j$  est la coordonnée générique de  $y$  sur la base canonique de  $l^2(\mathbb{R})$  et

$$\rho = \frac{\epsilon}{i}; \text{ telle que } \epsilon > 0 \text{ suffisamment petits}$$

D'après (3.22):

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^*\sigma^* - y = -\rho \frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}$$

Puisque  $\|y\|_{l^2(\mathbb{R})} > \rho$  alors on a

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^*\sigma^* = y - \rho \frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} \Leftrightarrow \mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}) = y - \rho \frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}$$

Donc

$$(\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}))_j = (y)_j - \rho \frac{(\sigma^*)_j}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} = \delta_{ij} - \frac{\epsilon}{i} \frac{(\sigma^*)_j}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}; j = 1, \dots, \infty \quad (3.23)$$

Et combinant (3.23) par (3.15) nous obtenons (3.8)

$$(\mathcal{B}u_i(\tilde{\alpha}))_j = (D_\alpha \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}))_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\epsilon (\sigma^*)_j}{i \|\sigma^*\|}$$

Alors:

$$D_\alpha \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) = Id + M; \forall \tilde{\alpha} \in l^2(\mathbb{R})$$

Donc on a la démonstration de l'existence et l'unicité d'une famille des fonctions  $u_i(\tilde{\alpha})$  pour  $i = 1, \dots, \infty$  solution (3.7)-(3.8).

### 3.3.3 Usage d'une sentinelle: Identification d'une partie de la frontière inconnue

Pour  $\tilde{\alpha}$  fixe,  $\mathcal{S}_{\tilde{\alpha}}(\alpha) = \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \alpha)$  est une sentinelle au sens J.L.Lions [29]. En effet

$$\mathcal{S}_{\tilde{\alpha}}(\alpha) = \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \alpha) \simeq \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, 0) + \alpha D_{\alpha} \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, 0)$$

Nous construirons maintenant l'arrangement itératif pour la résolution du problème présenté dans la section précédente. Différencier  $\mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \alpha)$  en ce qui concerne  $\alpha$  au point  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})$  on obtient:

$$\mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \alpha) \simeq \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) + (\alpha - \tilde{\alpha}) D_{\alpha} \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) + o(|\alpha - \tilde{\alpha}|)$$

Et en particulier pour  $\alpha = \bar{\alpha}$  on a

$$\mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}) \simeq \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) + (\bar{\alpha} - \tilde{\alpha}) D_{\alpha} \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) + o(|\bar{\alpha} - \tilde{\alpha}|)$$

D'après (3.8) on obtient

$$\mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}) \simeq \mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) + \bar{\alpha} - \tilde{\alpha} + M(\bar{\alpha} - \tilde{\alpha}) + o(|\bar{\alpha} - \tilde{\alpha}|)$$

Cela suggère les itérations suivantes

$$\mathcal{S}(\alpha^k, \bar{\alpha}) \simeq \mathcal{S}(\alpha^k, \alpha^k) + \bar{\alpha} - \alpha^k + M(\bar{\alpha} - \alpha^k) + o(|\bar{\alpha} - \alpha^k|)$$

Alors

$$\mathcal{S}(\alpha^k, \bar{\alpha}) + \alpha^k - \mathcal{S}(\alpha^k, \alpha^k) \simeq \bar{\alpha} + M(\bar{\alpha} - \alpha^k) + o(|\bar{\alpha} - \alpha^k|)$$

On pose

$$\alpha^{k+1} = \mathcal{S}(\alpha^k, \bar{\alpha}) + \alpha^k - \mathcal{S}(\alpha^k, \alpha^k) \tag{3.24}$$

Telle que

$$\mathcal{S}(\alpha^k, \bar{\alpha}) = \left( \int_{\omega} u_i(\alpha^k) z_{obs} dx dt \right)_{i=1, \dots, \infty} \tag{3.25}$$

$$\mathcal{S}(\alpha^k, \alpha^k) = \left( \int_{\omega} u_i(\alpha^k) z(\alpha^k) dx dt \right)_{i=1, \dots, \infty} \tag{3.26}$$

Où  $z(\alpha^k) = z(x, t; \alpha^k)$  est la solution de (3.3).

Nous pouvons maintenant étudier la convergence de notre schéma.

D'après le théorème

**Théorème 3.3.1** La suite  $(\alpha^k)_{k=0,\dots,\infty}$

$$\begin{cases} \alpha^0 \in l^2(\mathbb{R}) \text{ donnée comme une première estimation} \\ \alpha^{k+1} = \alpha^k + \mathcal{S}(\alpha^k, \bar{\alpha}) - \mathcal{S}(\alpha^k, \alpha^k) \end{cases} \quad (3.27)$$

Converge vers  $\bar{\alpha}$  dans  $l^2(\mathbb{R})$ .

**Preuve.** Le schéma numérique (3.27) peut être regardé comme méthode pour résoudre un problème de point fixe

$$\begin{cases} \alpha^0 \in l^2(\mathbb{R}) \\ \alpha^{k+1} = \alpha^k + \mathcal{S}(\alpha^k, \bar{\alpha}) - \mathcal{S}(\alpha^k, \alpha^k) \end{cases}$$

On pose

$$g(\alpha^k) = \alpha^k + \mathcal{S}(\alpha^k, \bar{\alpha}) - \mathcal{S}(\alpha^k, \alpha^k)$$

Alors  $\alpha^{k+1} = g(\alpha^k)$

Où  $g : l^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R})$  est un opérateur de trace et défini comme (3.6) (3.27) et (3.25). On va calculer  $g'(\mu)$  pour  $\mu \in l^2(\mathbb{R})$ ; on a

$$g(\mu) = \mu + \mathcal{S}(\mu, \bar{\alpha}) - \mathcal{S}(\mu, \mu)$$

Alors

$$g'(\mu) = Id + D_{\bar{\alpha}}\mathcal{S}(\mu, \bar{\alpha}) - D_{\bar{\alpha}}\mathcal{S}(\mu, \mu) - D_{\alpha}\mathcal{S}(\mu, \mu)$$

Avec tous les dérivées étant justifiées, alors en particulier pour  $\mu = \bar{\alpha}$  on a

$$g'(\bar{\alpha}) = Id + D_{\bar{\alpha}}\mathcal{S}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) - D_{\bar{\alpha}}\mathcal{S}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) - D_{\alpha}\mathcal{S}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha})$$

Donc

$$g'(\bar{\alpha}) = Id - D_{\alpha}\mathcal{S}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha})$$

Donc

$$D_{\alpha}\mathcal{S}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) = Id - g'(\bar{\alpha})$$

Alors d'après (3.8) (dans proposition (3.1)) on a

$$Id + M = Id - g'(\bar{\alpha})$$

Alors

$$g'(\bar{\alpha}) = -M$$

Où  $M \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{R}))$  telle que

$$\|(M_i)\| = \frac{\epsilon}{i}; i = 1, \dots, \infty$$

Maintenant calculons la norme de **Hilbert-Schmidt** de  $g'(\bar{\alpha})$  :

$$\begin{aligned} \|g'(\bar{\alpha})\|_{HS}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (g'(\bar{\alpha}))_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (g'(\bar{\alpha}))_{ij}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|M_i\|_{l^2(\mathbb{R})}^2 = \epsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

La valeur de la série (3.28) peut être placée en choisissant une valeur appropriée pour  $\epsilon$ . Notamment que nous pouvons prendre à  $\epsilon$  tels que  $\|g'(\bar{\alpha})\|_{HS} < 1$ .

Alors le processus (3.27) d'itérations est localement convergent dans  $l^2(\mathbb{R})$ . ■

C'est-à-dire la suite  $(\alpha^k)_{k=0, \dots, \infty}$  convergent localement vers  $\bar{\alpha}$  dans un certain sens, à partir d'une première estimation  $\alpha^0$ . que ceci donnera une approximation de la forme de  $P_{\bar{\alpha}}$  telle que  $P_{\bar{\alpha}}$  la forme d'une partie inconnue de la frontière d'un domaine.

### 3.4 RÉULTATS NUMÉRIQUES

Nous disposons de mesures  $z_{obs}$  de l'état. Durant un temps  $T$  sur une portion de la domaine, notée  $\mathcal{O}$ , que l'on appelle observatoire. Donc pour estimer la forme d'une partie inconnue de la frontière d'un domaine nous fabriquons une suite  $(\alpha^k)_{k=0, \dots, \infty}$  convergent localement vers  $\bar{\alpha}$  dans un certain sens, à partir d'une première estimation  $\alpha^0$ . Que ceci donnera une approximation de la forme de  $P_{\bar{\alpha}}$ . Le calcul  $\alpha^{k+1}$  de  $\alpha^k$  sera fait par la méthode de sentinelle.

Considérons la paramétrisation suivante de  $P_{\alpha}$  :

$$P_{\alpha} = \left\{ x(s) + \sum_{j=1}^N \alpha_j b_j(s) w(s); s \in [0, 1], x(s) \in P_0 \right\} \quad (3.29)$$

de sorte que  $N$  est la dimension du sous espace d'approximation de la déformation. La méthode des sentinelles consiste à construire une fonctionnelle  $\mathcal{S}$  comme (1.6).

Où  $u$  est à déterminer pour que la sentinelle  $\mathcal{S}$  soit sensible au paramètre à identifier et insensible aux autres. Commençons par identifier le paramètre  $\bar{\alpha}$ . On cherche alors un  $u$  solution du problème (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9).

Une fois  $u$  trouvé, on effectue un développement de Taylor de  $\mathcal{S}$  au voisinage de  $(\hat{\alpha}, \hat{\alpha})$ . D'où une estimation de  $\bar{\alpha}$ , sachant que  $\mathcal{S}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha})$  est calculable et  $\mathcal{S}(\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}) = \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} u z_{obs} dx dt$ .

**Calcul de  $u$ :**

Résoudre le problème (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9). revient à trouver  $u$  de norme minimale.

Théoriquement, par la méthode précédente.

Mais numériquement, pour la détermination de  $u$ , on utilise une méthode d'optimisation utilisant un algorithme de gradient conjugué, la fonction coût étant donné par la formule (3.18). L'état (3.3) est discrétisé par un schéma implicite de différences finies, d'ordre 1 en temps et 2 en espace, le système d'optimalité est calculé à partir de l'équation d'état et de la fonction de coût discrétisées.

Toutes les opérations peuvent être résumées dans l'algorithme suivant:

- choisir  $\alpha^0 \in \mathbb{R}^N$  comme une estimation initiale de  $\bar{\alpha}$ .
- boucle sur  $k$  sera  $\|\alpha^{k+1} - \alpha^k\|_{\mathbb{R}^N} \geq \eta$ 
  - calcul  $z(\alpha^k)$
  - pour  $i = 1, \dots, N$ 
    - \* calcul  $\sigma_i^*$ .
    - \*  $u_i(\alpha^k) = \mathcal{B}^* \sigma_i^*$ .
    - \*  $s_i = \int_{\mathcal{G}} u_i(\alpha^k) (z_{obs} - z(\alpha^k)) dx dt$ .
  - fin de la boucle sur  $i$ .
  - ensemble  $\alpha^{k+1} = \alpha^k + s$ .
- fin de la boucle sur  $k$  :  $\alpha^k \simeq \bar{\alpha}$ .

On trouvera une étude plus complète dans l'article de **O. bodart** [50].

**Remarque 3.4.1** 1/ Tous les programmes ont été écrits dans *FREE-FEM* ou *MATLAB*.

2/ Pour les résultats numériques, par exemple: le carré (la place)  $]0; 1[ \times ]0; 1[$  : Nous avons pour avoir discrétisé un carré (la place)  $]0; 1[ \times ]0; 1[$  : avec 100 éléments,

et l'observatoire se compose par les éléments du centre 36 de la maille. La frontière déformé  $P_{\alpha}$  sera d'un côté de la place, et la frontière  $\Gamma^*$  les trois autres. L'estimation initiale sera  $\alpha^0$  : la frontière de la place  $]0; 1[ \times ]0; 1[$ . Nous allons présenter ici une série d'expériences numériques pour la déformation de la place  $]0; 1[ \times ]0; 1[$ . Nous avons observé des difficultés numériques en identifiant la frontière si l'observatoire ne se trouve pas suffisamment près de lui. En particulier si l'observatoire se trouve sur un côté du carré et la frontière inconnue de l'autre côté. Les résultats numériques sont présentés sur les figures (3.1) et (3.2). L'itération 8 s'assortit visuellement avec la frontière inconnue (voir O. Bodart [50]; page 9, 10, 11).

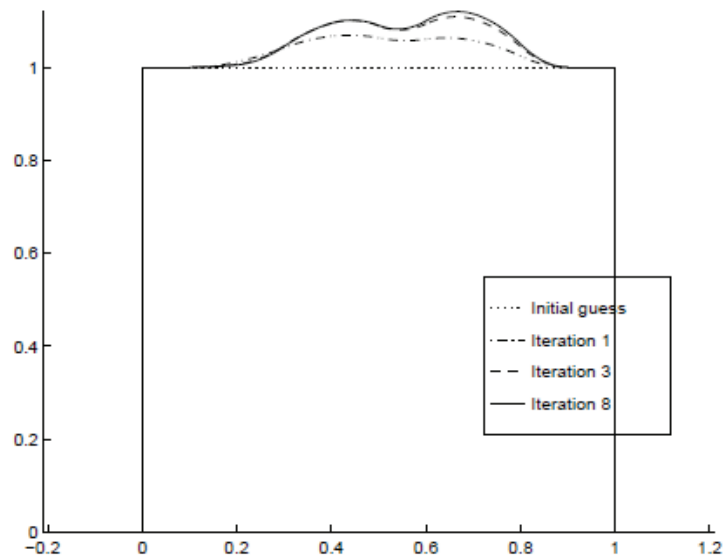
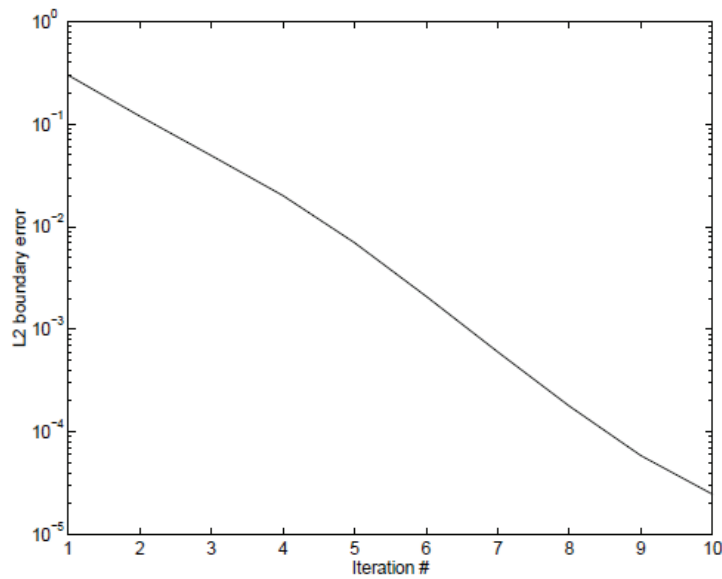


Figure (3.1) : Evolution de la place  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  grâce au processus d'itération.



*Figure (3.2): Différence entre la frontière calculée et la frontière exacte en fonction de l'étape d'itération.*

**Conclusion 3.4.1** *Les sentinelles sont un bon outil pour l'identification de paramètres dans les systèmes (linéaires ou non) à données incomplètes. Les sentinelles ont un avantage en coût de calcul lorsque l'on a plusieurs séries de mesures, ce qui est souvent le cas dans les expériences réelles. En effet, dès que le contrôle  $u$  est calculé, il suffit d'évaluer une intégrale pour identifier un paramètre et ceci pour chaque série de mesures. Donc dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode efficace pour identifier une partie inconnue de la frontière d'un domaine pour l'équation de la chaleur. La théorie utilisée pour l'identification a besoin de la méthode de sentinelles développée par Lions [29] et Bodart [50]. Et en fin, nous avons obtenu un résultat local de convergence pour le schéma numérique itératif identifiant la frontière inconnue.*

## **Partie II**

### **Autres Types de Sentinelles**

## Chapitre 4

# Sentinelles faibles pour les systèmes distribués à termes de pollution dans la frontière

**L'objectif:** On propose une nouvelle définition de sentinelle qu'on appellera sentinelle faible. Plus précisément, on cherche à obtenir des informations sur le terme de pollution sachant que l'insensibilité de la sentinelle par rapport aux termes manquants n'est pas exacte mais "approchée". Enfin, on montre que le problème d'existence de la sentinelle faible est équivalent à un problème de contrôlabilité faible à zéro non trivial dont on utilisera une autre approche pour le résoudre.

La question qui nous vient à l'esprit est:

### Pourquoi la notion de sentinelle faible?

Du point de vue théorique, il est important d'avoir des résultats de sentinelle exacte afin de bien d'écrire les ensembles atteignables. Toutefois, du point de vue numérique, la sentinelle faible est largement suffisante. En effet on ne peut jamais, lors d'un calcul, atteindre exactement un objectif. Quand on ne peut pas atteindre un objectif donné, on peut restreindre ses prétentions et essayer de s'en approcher le plus possible.

**Résumé:** La notion des sentinelles a été introduite dans l'étude des problèmes à données incomplètes par J.L.Lions [29]. Ces sentinelles sont construites à partir de

l'existence de la contrôlabilité exacte du système adjoint. Dans ce travail, nous avons introduit les sentinelles faibles pour obtenir des informations sur le terme de pollution des systèmes distribués à données manquantes sachant que l'insensibilité de la sentinelle aux termes manquants n'est pas exacte mais "approchée". On montre dans ce chapitre qu'on peut établir la structure des sentinelles faibles pour une observations sans bruits et que la pollution apparaît au bord<sup>(1)</sup>.

## 4.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  représentant le domaine géométrique du système ( $n = 1, 2, 3$  pour les applications) et soit  $T > 0$ . On suppose que la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  est assez régulière.

On considère un système à paramètre distribué décrit par l'équation d'état de système:

$$\left\{ \begin{array}{ll} z' + Az + f(z) = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times ]0, T[ \\ z(0) = z_0 + \tau \widehat{z}_0 & \text{dans } \Omega \\ z = \xi + \lambda \widehat{\xi} & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[ \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Donc: 1/ Les données initiales sont incomplètes, avec  $\|\widehat{z}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\tau$  un paramètre suffisamment petit.

2/  $z = \xi + \lambda \widehat{\xi}$  sur  $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[$ , et  $z = 0$  sur  $\Sigma_1 = \Sigma \setminus \Sigma_0$ ; on a donc pollution par la frontière.

On suppose que  $\xi, z_0$  soient données alors que les  $\widehat{\xi}, \widehat{z}_0$  soient deux fonctions inconnues

On suppose maintenant que l'observatoire  $\mathcal{O}$  est portées par une partie de  $\partial\Omega$

$$\mathcal{O} \subset \Gamma = \partial\Omega \quad \text{et} \quad \mathcal{O} \cap \Gamma_0 = \emptyset$$

Ici, on étudie le cas sans bruit i.e.  $z_{obs} = m_0$  où  $m_0$  est une mesure connue.

On rappelle le problème à résoudre:

---

<sup>(1)</sup>(voir: [23])

(q): Peut-on obtenir, à partir de la donnée  $m_0$ , des informations sur  $\widehat{\lambda\xi}$  qui soient indépendantes des variations de  $z(0)$  autour de  $z_0$ ?

Pour répondre au problème (q), on utilisera la méthode des sentinelles faibles. Pour cela, soit  $h_0 \in L^2(\mathcal{O} \times (0; T))$ .

On introduit

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (h_0 + u_\epsilon) \frac{\partial}{\partial \nu} z(x, t; \lambda, \tau) d\Gamma dt \quad (4.2)$$

Où  $u_\epsilon$  est à déterminer “au mieux” dans  $L^2(\mathcal{O} \times (0; T))$ , pour tout  $\epsilon > 0$ .

On cherche à déterminer  $u_\epsilon$  de façon que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{S}(0, 0) \right| \leq \epsilon, \forall \widehat{z}_0 \quad (4.3)$$

Et que

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} = \min \quad (4.4)$$

On dira alors que (4.2) définit une sentinelle.

Le plan est le suivant:

a/ On va d’abord construire une sentinelle. En effet  $u_\epsilon = -h_0$  donne évidemment (4.3) de sorte qu’il est facile de voir qu’il existe un élément  $u_\epsilon$  et un seul avec (4.3), (4.4).

La question est donc de construire cette sentinelle définie par  $h_0$ .

b/ Il faudra voir ensuite quelles informations sont fournies par la, puis, les sentinelles, construites sur  $h_0$  (ou sur une suite de fonctions  $h_0$ ).

Où  $z_0$  (pour  $\lambda = 0$  et  $\tau = 0$ ) est la solution de:

$$\left\{ \begin{array}{ll} z'_0 + Az_0 + f(z_0) = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_0(0) = z_0 & \text{dans } \Omega \\ z_0 = \xi & \text{sur } \Sigma_0 \\ z_0 = 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \quad (4.5)$$

**Remarque 4.1.1** Lorsque  $\lambda = \tau = 0$ , la solution correspondante  $z(0, 0)$  est complètement déterminée. Dans le cas contraire, on dit que  $z(\lambda, \tau)$  est une perturbation de l’état autour de  $z(0, 0)$ .

Mais d'après (3.2),

$$\mathcal{S}(0,0) = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \frac{\partial}{\partial \nu} z_0(x,t) d\Gamma dt$$

On effectue un développement de Taylor de  $\mathcal{S}$  au voisinage de  $(0,0)$

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) \simeq \mathcal{S}(0,0) + \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0,0) + \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0,0), \quad \text{pour } \tau \text{ petit.} \quad (4.6)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0,0) \simeq \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \frac{\partial}{\partial \nu} z_\lambda d\Gamma dt$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0,0) \simeq \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \frac{\partial}{\partial \nu} z_\tau d\Gamma dt$$

dans (4.7),  $z_\lambda$  est la solution de

$$\begin{cases} z'_\lambda + Az_\lambda + f'(z_0)z_\lambda = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_\lambda(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ z_\lambda = \widehat{\xi} & \text{sur } \mathcal{O}_0 \times ]0, T[ \\ z_\lambda = 0 & \text{sur } (\Gamma \setminus \mathcal{O}) \times ]0, T[ \end{cases} \quad (4.7)$$

dans (4.8),  $z_\tau$  est la solution de

$$\begin{cases} z'_\tau + Az_\tau + f'(z_0)z_\lambda = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_\tau(0) = \widehat{z}_0 & \text{dans } \Omega \\ z_\tau = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (4.8)$$

Pour construire la sentinelle, on doit déterminer  $u_\epsilon$  qui assure les condition (4.3) et (4.4) pour un  $\epsilon$  positif donné.

## 4.2 ÉTAT ADJOINT

### 4.2.1 La condition “d’insensibilité”

On suppose que l’on peut calculer  $\frac{\partial z}{\partial \tau}$  pour  $\lambda = \tau = 0$ .

Sous réserve de vérification qui devra être faite dans chaque cas particulier,  $z_\tau = \frac{\partial z}{\partial \tau}$  est donné par (4.8).

Alors (4.3) équivaut à

$$\left| \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \frac{\partial}{\partial \nu} z_\tau d\Gamma dt \right| = \left| \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau} (0, 0) \right| \leq \epsilon \quad (4.9)$$

condition qui doit avoir lieu pour tout  $\widehat{z}_0$  dans la boule unité de l'espace des conditions initiales.

On va désormais supposer que  $z_0, \widehat{z}_0 \in L^2(\Omega)$ .

On transforme maintenant (4.9) par introduction (classique) de l'état adjoint.

### 4.2.2 L'état adjoint

Soit  $A^*$  l'opérateur adjoint de  $A$  (obtenue donc en remplaçant  $a_{ij}$  par  $a_{ji}$ ).

On définit  $q = q(x, t)$  solution de

$$\begin{cases} -q' + A^*q + f'(z_0)q = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = h_0 + u_\epsilon & \text{sur } \mathcal{O} \times ]0, T[ \\ q = 0 & \text{sur } (\Gamma \setminus \mathcal{O}) \times ]0, T[ \end{cases} \quad (4.10)$$

Dans (4.10),  $f'(z_0)$  désigne la dérivée de  $f$  au point  $z_0$ .

Le problème (4.10) admet une solution unique sous des hypothèses très générales sur  $f'(z_0)$ .

Cette fonction  $q$  dépend de  $u_\epsilon$  qui est à déterminer.

Le Lemme suivante montre que l'existence d'une sentinelle faible est équivalente à un problème de contrôlabilité faible à zéro.

**Lemme 4.2.1** *On suppose que  $q$  est solution du problème (4.10). Alors le problème d'existence d'une sentinelle insensible aux termes manquants est équivalent à un problème de contrôlabilité faible, c'est à dire  $\|q(x, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$ .*

**Preuve.** Si maintenant on multiplie (4.10) par  $z_\tau$ , on obtient après intégrations par parties:

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \frac{\partial}{\partial \nu} z_\tau d\Gamma dt = (q(0), \widehat{z}_0); \forall \widehat{z}_0, \|\widehat{z}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$$

Par conséquent, la condition (4.3) (ou (4.9)) équivaut à

$$\|q(x, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \quad (4.11)$$

Le problème est donc maintenant de trouver  $u_\epsilon$  dans  $\mathcal{U} = L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$  telle que l'on ait (4.11) et (4.3).

Cela est un problème de type contrôlabilité faible. Donc, le problème de trouver une sentinelle  $\mathcal{S}$  telle que (4.10) ait lieu, est équivalent au problème de contrôlabilité faible: (trouver  $u_\epsilon$  dans  $\mathcal{U}$  tel que il on ait (4.10) et (4.11)). ■

## 4.3 CONSTRUCTION DE LA SENTINELLE FAIBLE

### 4.3.1 Équivalence entre le problème de sentinelle faible et le problème de contrôlabilité faible

On cherche donc  $u_\epsilon$  tel que si  $q = q(x, t; u_\epsilon)$  est la solution de (4.10) on ait:

$$\begin{cases} \|q(x, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \\ \|u_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} = \min \end{cases}$$

Pour que les conditions (4.3) et (4.4), soient satisfaites il suffit que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une fonction  $u_\epsilon \in L^2(\Omega \times (0, T))$  telle que:  $\|q(x, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$

Pour cela on décompose le système (4.10) en deux systèmes:

$$\begin{cases} -q'_0 + A^*q_0 + f'(z_0)q_0 = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q_0(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q_0 = h_0 & \text{sur } \mathcal{O} \times ]0, T[ \\ q_0 = 0 & \text{sur } (\Gamma \setminus \mathcal{O}) \times ]0, T[ \end{cases} \quad (4.12)$$

et

$$\begin{cases} -y' + A^*y + f'(z_0)y = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ y = u_\epsilon & \text{sur } \mathcal{O} \times ]0, T[ \\ y = 0 & \text{sur } (\Gamma \setminus \mathcal{O}) \times ]0, T[ \end{cases} \quad (4.13)$$

La fonction  $q_0$  est donc donnée. On cherche  $u_\epsilon$  de façon que  $y = y(u_\epsilon)$ .

Si l'on considère ici que:

$$\begin{cases} u_\epsilon = \text{fonction de contrôle.} \\ y = y(u_\epsilon) = \text{état d'un (nouveau) système.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Soit  $q_0(0)$  l'état désiré donné par la résolution du système (4.12), le problème de la contrôlabilité faible consiste à trouver, pour tout  $\epsilon > 0$  un contrôle  $u_\epsilon$  de l'espace de contrôle  $\mathcal{U} = L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$  permettant d'approcher à  $\epsilon$  près, en un temps fini, l'état  $y(t)$  du système (4.13) d'un état initial  $y(T) = 0$ , à un état final désiré  $-q_0(0)$  sur  $\Omega$  et ceci avec une "dépense" minimum pour  $u_\epsilon$ , au sens  $\|u_\epsilon\|_{L^2} = \min$  (voir: [16]).

Le résultat principal est le suivant:

**Théorème 4.3.1** *Pour  $\epsilon > 0, h_0 \in L^2(\mathcal{O} \times (0; T))$ , il existe un contrôle  $u_\epsilon$  et un état  $q$  tels que (4.10) et (4.11) sont vérifiées. En outre, il existe un unique couple  $(\hat{u}_\epsilon, \hat{q})$  avec  $\hat{u}_\epsilon$  de norme minimale dans  $L^2(\mathcal{O} \times (0; T))$ , c'est à dire tel que (4.10), (4.11) et (4.4) sont vérifiées.*

L'outil principal pour la démonstration de ce théorème est le résultat suivant:

La condition d'insensibilité de la sentinelle par rapport au terme manquant (4.3) est équivalent à un problème de contrôlabilité faible, c'est à dire  $\exists u_\epsilon \in \mathcal{U} = L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$  tel que si  $y$  est solution de (4.13), on ait:

$$\mathcal{F}(0) = \{y(x, 0)/u_\epsilon \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))\} \text{ est dense dans } L^2(\Omega).$$

Pour démontrer la densité, il suffit d'utiliser le théorème de **HAHN BANACH** et de remarquer que  $\mathcal{F}^\perp$  est réduit à zéro ( $\mathcal{F}^\perp = 0$ ).

$$\text{Soit } \rho^0 \in \mathcal{F}^\perp \text{ et } \rho \text{ solution de: } \rho' + A\rho + f'(z_0)\rho = 0, \rho(0) = \rho^0, \rho = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

(4.15)

**Remarque 4.3.1** *Puisque  $u_\epsilon = -h_0$*

*donne  $q \equiv 0$ , donc (4.10), le problème précédent admet toujours une solution et une seul de sorte que le vrai problème est calculer le  $u_\epsilon$  optimal.*

En résumé, le problème d'existence d'une unique sentinelle faible revient à résoudre le problème d'optimisation sous contraintes suivant:

$$(P) : \left\{ \min_{\Lambda} \|u_\epsilon\|_{L^2} \right\} \quad (4.16)$$

Où

$$\Lambda = \left\{ u_\epsilon \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{ll} -q' + A^*q + f'(z_0)q = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = h_0 + u_\epsilon & \text{sur } \mathcal{O} \times ]0, T[ \\ q = 0 & \text{sur } (\Gamma \setminus \mathcal{O}) \times ]0, T[ \end{array} \right. \right\} \quad (4.17)$$

avec  $\|q(x, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$

Le domaine des contraintes du problème (P) est non vide car  $u_\epsilon = -h_0$  donne  $q \equiv 0$ , par conséquent le problème (P) admet toujours une solution et une seule que l'on note  $\widehat{u}_\epsilon$ . Il reste donc deux problèmes à résoudre

- 1/ Calculer  $\widehat{u}_\epsilon$ ,
- 2/ S'assurer que  $\widehat{u}_\epsilon \neq -h_0$ .

Afin de montrer que ce problème admet de solution ce qui justifie l'existence de la sentinelle faible, il est nécessaire de s'assurer que le domaine des contraintes  $\Lambda$  est non vide. Pour ce faire, on va utiliser une autre approche basée essentiellement sur un résultat important de continuation de **MIZOHATA**.

**Preuve.** (Théorème 4.3.1)

On introduit maintenant l'ensemble des états atteignables à l'instant  $t = 0$  défini par  $\mathcal{F}(0)$ .

$\mathcal{F}(0)$  est un sous-espace vectoriel dense dans  $L^2(\Omega)$ .

- Il est clair que  $\mathcal{F}(0)$  est un sous espace vectoriel de  $L^2(\Omega)$ . D'après le théorème de **HAHN-BANACH**, il sera dense dans  $L^2(\Omega)$  si et seulement si son orthogonal dans  $L^2(\Omega)$  est réduit à zéro.

- Comme  $\{0\} \subset \mathcal{F}^\perp(0)$ , il reste à montrer que  $\mathcal{F}^\perp(0) \subset \{0\}$ . Soit  $\rho^0 \in \mathcal{F}^\perp(0)$ , alors  $\langle \rho^0, y(0) \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \rho^0 y(0) dx = 0$ .

où  $y$  est la solution de (4.13), il est donc naturel de définir l'adjoint  $\rho$  de  $y$ , c'est la solution du problème

$$\rho' + A\rho + f'(z_0)\rho = 0, \rho(0) = \rho^0, \rho = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (4.18)$$

Le système (4.18) est un problème classique de l'équation de la chaleur qui a une solution unique  $\rho \in \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ .

Maintenant, on multiplie la première équation du système (4.18) par  $y$ . Après intégration par parties sur  $\mathcal{Q}$ , on obtient:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int_{\Omega \times (0, T)} \rho(-y' + A^*y + f'(z_0)y) dxdt + \int_{\Omega} \rho(T) y(T) dx \\ &+ \int \int_{\Gamma \times (0, T)} \rho \frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma dt - \int \int_{\Gamma \times (0, T)} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} y d\Gamma dt - \int_{\Omega} \rho^0 y(0) dx \end{aligned}$$

Comme  $y$  et  $\rho$  sont des solutions de (4.3) et (4.18) respectivement, donc:  $\int \int_{\Gamma \times (0, T)} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} u_{\epsilon} \chi_{\mathcal{O}} d\Gamma dt + \int_{\Omega} \rho^0 y(0) dx = 0$ .

Ceci est équivalent à  $\int \int_{\Gamma \times (0, T)} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} u_{\epsilon} \chi_{\mathcal{O}} d\Gamma dt = 0, \forall u_{\epsilon} \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ . Parce que,  $\rho^0 \in \mathcal{F}^{\perp}(0)$  et  $y(0) \in \mathcal{F}(0)$ . Enfin, nous avons  $\frac{\partial \rho}{\partial \nu} = 0$  sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ .

Et par conséquent  $\rho = 0; \frac{\partial \rho}{\partial \nu} = 0$  sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ .

Les données de Cauchy sont nulles sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ , ce qui suffit (si les coefficients sont assez réguliers; voir **S. MIZOHATA** [56], **J.C. SAUT** et **B. SCHEURER** [37]) pour conclure que  $\rho = 0$ , donc  $\rho^0 = 0$ . Ce qui montre que  $\mathcal{F}^{\perp}(0) = \{0\}$ . ■

**Remarque 4.3.2** 1. Le théorème (4.1) montre bien qu'il existe un contrôle  $u \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$  tel que la solution  $q$  de (4.10) vérifie  $\|q(0) - w\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon; \forall w \in L^2(\Omega)$ . Par conséquent, on peut conclure qu'il existe un couple  $(u, q) \in \Lambda$  (i.e.  $\Lambda \neq \emptyset$ ).

2. On déduit aussi du même théorème qu'il va bien sûr exister beaucoup de contrôles  $u$  ayant la même propriété (i.e.  $(u, q) \in \Lambda$ ). Mais afin de pouvoir réaliser l'existence des sentinelles faibles, il est nécessaire de sélectionner un contrôle de norme minimale.

La proposition suivante montre l'existence du contrôle optimal pour (P) ce qui signifie encore l'existence de la sentinelle faible pour une observation sans bruit.

**Proposition 4.3.1** Le problème (P) admet une unique solution  $(u_{\epsilon}, q_{\epsilon})$ .

**Preuve.** Le domaine  $\Lambda$  est alors non vide, de plus, il est fermé. D'autre part, l'application:  $v \mapsto \|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$  est continue, coercive et strictement convexe. Alors, on déduit qu'il existe une unique solution pour le problème (P) qu'on note  $(u_{\epsilon}, q_{\epsilon}) \in \Lambda$  qui vérifie

$$\|v_{\epsilon}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \leq \|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}; \forall (u, q) \in \Lambda.$$

■

## 4.4 EXISTENCE DE CONTRÔLE OPTIMAL

Dans cette partie, nous cherchons à caractériser le contrôle optimal en utilisant un résultat de dualité de **FENCHEL-ROCKAFELLAR** (voir [26]).

Le système d'optimalité satisfait par  $(\widehat{u}_\varepsilon, \widehat{q})$  est établi comme suit.

Soit alors  $\rho^0 \in L^2(\Omega)$  et  $\rho$  la solution associée de (4.18).

On introduit maintenant la fonctionnelle  $J_\varepsilon$  "coercive" définie par

$$J_\varepsilon(\rho^0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \sqrt{\varepsilon} \|\rho^0\|_{L^2(\Omega)} - \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 \frac{\partial \rho}{\partial \nu} d\Gamma dt \quad (4.19)$$

On considère le problème sans contrainte suivant:

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \min J_\varepsilon(\rho^0) \\ \rho^0 \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.20)$$

Alors, on a:

**Proposition 4.4.1** *La fonctionnelle  $J_\varepsilon$  est "coercive".*

**Preuve.** Pour prouver que  $J_\varepsilon$  est coercive, il suffit de montrer la relation suivante:

$$\lim_{\|\rho^0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty} \frac{J_\varepsilon(\rho^0)}{\|\rho^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon \quad (4.21)$$

Soit donc  $(\rho_j^0) \subset L^2(\Omega)$  une suite de données initiales du système (4.18) avec  $\|\rho_j^0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ . Posons

$$\widetilde{\rho}_j^0 = \frac{\rho_j^0}{\|\rho_j^0\|_{L^2(\Omega)}} \quad (4.22)$$

Pour que  $\|\widetilde{\rho}_j^0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

D'autre part, soit  $\widetilde{\rho}_j$  la solution (4.18) avec la donnée initiale  $\widetilde{\rho}_j^0$ . Alors, on a

$$\frac{J_\varepsilon(\rho_j^0)}{\|\rho_j^0\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{2} \|\rho_j^0\|_{L^2(\Omega)} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \widetilde{\rho}_j \right|^2 d\Gamma dt + \sqrt{\varepsilon} \|\widetilde{\rho}_j^0\|_{L^2(\Omega)} - \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 \frac{\partial}{\partial \nu} \widetilde{\rho}_j d\Gamma dt \quad (4.23)$$

Le deux cas suivants peuvent se produire:

1.  $\liminf \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \widetilde{\rho}_j}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt > 0$ . Dans ce cas on obtient immédiatement

$$\frac{J_\varepsilon(\rho_j^0)}{\|\rho_j^0\|_{L^2(\Omega)}} \rightarrow \infty \quad (4.24)$$

2.  $\liminf \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \tilde{\rho}_j}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt = 0$ . Dans ce cas comme  $(\tilde{\rho}_j^0)_j$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ , donc on peut extraire une sous suite  $(\tilde{\rho}_j^0)_j$  telle que:

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_j^0 \rightharpoonup \psi^0 \text{ converge faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \tilde{\rho}_j \rightharpoonup \psi \text{ converge faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)), \end{cases} \quad (4.25)$$

où  $\psi$  est solution du système (4.18) avec la donnée initiale  $\psi^0$ . De plus, par la semi continuité inférieure, il vient

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \leq \liminf \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \tilde{\rho}_j}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt = 0 \quad (4.26)$$

Par conséquent,

$$\psi = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \times (0, T),$$

Par l'application de la propriété de continuation unique de Mizohata, on trouve

$$\psi = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.27)$$

Ainsi,

$$\tilde{\rho}_j \rightharpoonup 0 \text{ converge faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Or,

$$\liminf \frac{J_\varepsilon(\rho^0)}{\|\rho^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \liminf \left[ \varepsilon + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 \frac{\partial \tilde{\rho}_j}{\partial \nu} d\Gamma dt \right]$$

Donc,

$$\liminf \frac{J_\varepsilon(\rho^0)}{\|\rho^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon. \quad (4.28)$$

D'où la relation (4.21) est satisfaite. ■

Le théorème suivant caractérise le contrôle optimal.

**Théorème 4.4.1** *Le problème (4.20) a une solution unique  $\hat{\rho}^0 \in L^2(\Omega)$ . En outre, si  $\hat{\rho}$  est la solution de (4.18) associé à  $\hat{\rho}^0$ , alors  $(\hat{u}_\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial \nu} \hat{\rho}, \hat{q})$  est une solution telle que (4.10), (4.11) et (4.4) sont vérifiées.*

**Preuve.** La fonctionnelle  $J_\varepsilon$  étant continue, convexe dans  $L^2(\Omega)$  et coercive. Donc le problème  $(P_\varepsilon)$  admet une solution unique  $\hat{\rho}^0$  dans  $L^2(\Omega)$ . Montrons maintenant que  $(\hat{u}_\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial \nu} \hat{\rho}, \hat{q})$  est solution de  $(P)$ .

Comme  $J_\varepsilon$  atteint sa valeur minimale à  $\widehat{\rho}^0 \in L^2(\Omega)$ , alors, pour tout  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$  et tout  $r \in \mathbb{R}$  on a

$$J_\varepsilon(\widehat{\rho}^0) \leq J_\varepsilon(\widehat{\rho}^0 + r\varphi^0) \implies J_\varepsilon(\widehat{\rho}^0 + r\varphi^0) - J_\varepsilon(\widehat{\rho}^0) \geq 0 \quad (4.29)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\widehat{\rho}^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \sqrt{\varepsilon} \|\widehat{\rho}^0\|_{L^2(\Omega)} - \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} d\Gamma dt \\ J_\varepsilon(\widehat{\rho}^0 + r\varphi^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \frac{r^2}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \\ &\quad + r \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt + \sqrt{\varepsilon} \|\widehat{\rho}^0 + r\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 \left( \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} + r \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) d\Gamma dt \end{aligned} \quad (4.30)$$

En substituant (4.30) dans (4.29) et après les simplifications, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &\leq J_\varepsilon(\widehat{\rho}^0 + r\varphi^0) - J_\varepsilon(\widehat{\rho}^0) \\ 0 &\leq \frac{r^2}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \sqrt{\varepsilon} \left[ \|\widehat{\rho}^0 + r\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} - \|\widehat{\rho}^0\|_{L^2(\Omega)} \right] \\ &\quad + r \left[ \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

D'autre part,

$$\|\widehat{\rho}^0 + r\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} - \|\widehat{\rho}^0\|_{L^2(\Omega)} \leq |r| \cdot \|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.32)$$

De (4.32) et (4.31), on obtient pour tous  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$  et  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq \frac{r^2}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \sqrt{\varepsilon} |r| \cdot \|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} + r \left[ \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt \right]$$

En divisant par  $r > 0$  et en passant à la limite  $r \rightarrow 0$ , on obtient

$$\sqrt{\varepsilon} \cdot \|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt \geq 0$$

Les mêmes calculs avec  $r < 0$  donnent

$$\left| \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}; \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega).$$

$$\text{Donc, } \left| \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}; \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega).$$

$$\text{Donc, } \left| \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left( h_0 - \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}; \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega).$$

Aussi, si on prend  $\widehat{u}_\epsilon = -\frac{\partial}{\partial \nu} \widehat{\rho}$  dans (4.10) et on multiplie la première équation du système (4.10) par  $\varphi$  solution de (4.18), on obtient après intégration par parties sur  $\mathcal{Q}$ ,

$$\int_{\Omega} q(0) \varphi^0 dx = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + \widehat{u}_\epsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt$$

On obtient des deux dernières relations:

$$\left| \int_{\Omega} q(0) \varphi^0 dx \right| \leq \sqrt{\epsilon} \|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}; \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega).$$

Par conséquent,  $\|q(x, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\epsilon}$ . ■

On a donc démontré le théorème suivant:

**Théorème 4.4.2** *En conséquence de ce qui précède, la sentinelle faible pour une observation sans bruit est bien construite et est définie par la formule:*

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left( h_0 - \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} \right) \frac{\partial z}{\partial \nu}(\lambda, \tau) d\Gamma dt$$

où  $\widehat{\rho}$  est solution de (4.18).

Dans ce qui suit nous appliquons le résultat précédent pour estimer le terme de pollution de système (4.1).

## 4.5 ESTIMATION DU TERME DE POLLUTION

**Remarque 4.5.1** *Si le semi groupe  $\Phi^*(t)$  engendré par l'opérateur  $A^*$  est compact dans  $L^2(\Omega)$ , le système (4.13) n'est pas exactement contrôlable (voir: [8]).*

**Remarque 4.5.2** *Il y a des systèmes qui sont faiblement contrôlables mais ils ne sont pas exactement contrôlables.*

**Exemple 4.5.1**  $\Omega$  étant un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\partial\Omega$  régulière, considérons le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} z - \Delta z = v \quad (x, t) \in \mathcal{Q} \\ z(x, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ z(\gamma, t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

Le système ci-dessus est un cas particulier de système (4.13); en effet, il suffit de prendre  $A^* = \Delta$  quand  $z \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{O} = \Omega$ ,  $v = u_\epsilon \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ . Ce

système ne peut pas être exactement contrôlable dans  $L^2(\Omega)$  car le semi groupe  $\Phi^*(t)$  engendré par  $A^* = \Delta$  est compact, mais il est exactement contrôlable dans  $H_0^1(\Omega)$  (EL Jai, Pritchard [8]).

Ces deux remarques nous ont conduits à introduire la notion de la sentinelle faible pour estimer le terme de pollution indépendamment du terme manquant. On suppose que le système (4.13) n'est pas exactement contrôlable donc le théorème suivant montre l'intérêt de la contrôlabilité faible dans la construction des sentinelles faibles.

**Théorème 4.5.1** *Si le système (4.13) est faiblement contrôlable alors pour tout  $\epsilon$  positif il existe une fonction  $u_\epsilon \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$  qui vérifie les conditions (4.3) et (4.4).*

**Preuve.** déjà démontré. ■

**Théorème 4.5.2** *Si le système (4.13) est faiblement contrôlable sur  $\mathcal{O}$ , alors*

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial}{\partial \nu} q(h_0) \{ \lambda \widehat{\xi} \} d\Gamma dt \leq \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \left| m_0 - \frac{\partial}{\partial \nu} z_0 \right| d\Gamma dt + \tau \epsilon$$

Où  $z_0$  est la solution de (4.5) et  $m_0$  est l'état observé sur  $\mathcal{O}$  pendant l'intervalle du temps  $(0, T)$ .

**Preuve.** Soit  $\mathcal{S}(\lambda, \tau)$  la sentinelle faible définie par  $h_0$  donc

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) = \lambda \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \frac{\partial}{\partial \nu} z_\lambda d\Gamma dt = \mathcal{S}(\lambda, \tau) - \mathcal{S}(0, 0) - \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0)$$

D'où une estimation de  $\lambda \widehat{\xi}$ , sachant que  $\mathcal{S}(0, 0)$  est calculable et

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (h_0 + u_\epsilon) \frac{\partial}{\partial \nu} z(x, t; \lambda, \tau) d\Gamma dt$$

Et sur l'observatoire  $\mathcal{O}$  on pose  $z = m_0$  alors on a

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \left( m_0 - \frac{\partial}{\partial \nu} z_0 \right) d\Gamma dt - \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0)$$

Où  $z_\lambda$  est la solution de (4.7), on multiplie (4.10) par  $z_\lambda$ , on obtient alors

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial}{\partial \nu} q(h_0) \{ \lambda \widehat{\xi} \} d\Gamma dt = \lambda \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \frac{\partial}{\partial \nu} z_\lambda(x, t) d\Gamma dt$$

Et d'autre part on a

$$\left| \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) \right| = \left| \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \frac{\partial}{\partial \nu} z_\tau(x, t) d\Gamma dt \right| = |(q(0), \widehat{z}_0)| \leq \epsilon$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial}{\partial \nu} q(h_0) \{ \lambda \widehat{\xi} \} d\Gamma dt &= \mathcal{S}(\lambda, \tau) - \mathcal{S}(0, 0) - \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) \\ &\leq \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \left| m_0 - \frac{\partial}{\partial \nu} z_0 \right| d\Gamma dt + \tau \epsilon \end{aligned} \quad (4.33)$$

D'où le résultat du théorème. ■

Ainsi, on déduit de la relation (4.33) que la connaissance du contrôle  $u$  nous fournit des informations approchées sur le terme de pollution.

**Remarque 4.5.3** Si on fait tendre  $\epsilon$  vers zéro dans l'inégalité (4.33), on obtient

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial}{\partial \nu} q(h_0) \{ \lambda \widehat{\xi} \} d\Gamma dt = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (h_0 + u_\epsilon) \left( m_0 - \frac{\partial}{\partial \nu} z_0 \right) d\Gamma dt$$

Ce qui fournira à la limite des informations exactes sur le terme de pollution.

# Chapitre 5

## Sentinelles faibles pour les systèmes distribués à termes manquants ou de pollution dans les conditions aux limites

La notion des sentinelles a été introduite dans l'étude des problèmes à données incomplètes par J.L.Lions [29]. Ces sentinelles sont construites à partir de l'existence de la contrôlabilité exacte du système adjoint. Dans ce travail, nous avons introduit les sentinelles faibles pour étudier l'estimation de la pollution des systèmes distribués à données manquantes dans les conditions initiales et aux limites, et que la pollution apparaît au bord<sup>(1)</sup>.

### 5.1 ENONCÉ DU PROBLÈME

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  représentant le domaine géométrique du système ( $n = 1, 2, 3$  pour les applications) et soit  $T > 0$ . On suppose que la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  est assez régulière.

On considère un système à paramètre distribué décrit par l'équation d'état de sys-

---

<sup>(1)</sup>(voir: [23])

tème:

$$\left\{ \begin{array}{ll} z' + Az + f(z) = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times (0, T); \\ z(0) = z_0 + \tau_0 \widehat{z}_0 & \text{dans } \Omega; \\ z = g + \tau_1 \widehat{g} & \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times ]0, T[ \\ z = \xi + \lambda \widehat{\xi} & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[ \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Donc:

- Sur  $\Gamma_0$ , on aura des termes de pollution.
- Sur  $\Gamma_1$ , les données sont manquantes.
- les conditions aux limites sont connues sur  $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ .
- $A$  est un opérateur différentiel elliptique.
- la condition initiale est  $z(0) = z_0 + \tau_0 \widehat{z}_0$ , où  $\|\widehat{z}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ ,  $z_0$  est donné  $L^2(\Omega)$ , dans  $\tau_0 \in \mathbb{R}$  "petit".

- les conditions aux limites sont d'abord  $z = g + \tau_1 \widehat{g}$  sur  $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times ]0, T[$

On suppose  $g$  (régulière) donnée, et  $\widehat{g}$  bornée dans un espace convenable (défini par des théorèmes de traces, comme dans J.L. LIONS et E. MAGENES (voir [32])).

On suppose ensuite que  $z = \xi + \lambda \widehat{\xi}$  sur  $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[$ ,

Ce sont des termes de pollution. On va chercher à obtenir, par les sentinelles, des informations sur la pollution  $\lambda \widehat{\xi}$ .

On suppose enfin que  $z = 0$  sur  $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ ;

On va chercher à obtenir des informations sur la pollution  $\lambda \widehat{\xi}$ , informations qui soient insensibles aux coefficients  $\tau_0, \tau_1$ , à partir d'observations faites en  $z$ .

**Remarque 5.1.1** *On suppose que la fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  et que, pour  $\lambda \widehat{\xi}, \tau_0 \widehat{z}_0, \tau_1 \widehat{g}$  connus, le problème (5.1) admet une solution unique, notée  $z(x, t; \lambda, \tau), \tau = \{\tau_0, \tau_1\}$  dans l'espace  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ .*

### 5.1.1 Observation de l'état

On a donc un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et un opérateur  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times (0, T)); L^2(\mathcal{O} \times (0, T)))$ ;

tq:  $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ .

L'observation est donnée par: observation =  $\mathcal{B}z$ .

On supposera que

$$z_{obs} = \mathcal{B}z = z\chi_{\mathcal{O}} = m_0 \text{ connu dans } \mathcal{H} \quad (5.2)$$

## 5.2 CONSTRUCTION DES SENTINELLES

### 5.2.1 Généralités

On se donne  $h_0$  avec  $h_0 \in L^2(\mathcal{O} \times (0; T))$ .

On cherche une sentinelle

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = (h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z(\lambda, \tau))_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \quad (5.3)$$

Où  $u_\epsilon$  est à déterminer dans  $L^2(\mathcal{O} \times (0; T))$ , pour tout  $\epsilon > 0$ . de façon que

$$\|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}} = \min \quad (5.4)$$

Et que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau_1} \mathcal{S}(0, 0) \right| \leq \epsilon; \left| \frac{\partial}{\partial \tau_0} \mathcal{S}(0, 0) \right| \leq \epsilon \quad (5.5)$$

Où  $z_0$  (pour  $\lambda = 0$  et  $\tau = 0$ ) est la solution de:

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_0' + Az_0 + f(z_0) = 0 & \text{dans } \mathcal{Q}; \\ z_0(0) = z_0 & \text{dans } \Omega; \\ z_0 = g & \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times ]0, T[ \\ z_0 = \xi & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[ \\ z_0 = 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Mais d'après (5.3),

$$\mathcal{S}(0, 0) = (h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z_0)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$$

On effectue un développement de Taylor de  $\mathcal{S}$  au voisinage de  $(0, 0)$  :

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) \simeq \mathcal{S}(0, 0) + \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) + \tau_0 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_0}(0, 0) + \tau_1 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_1}(0, 0)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) &\simeq (h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z_\lambda) \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_0}(0, 0) &\simeq (h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z_{\tau_0}) \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_1}(0, 0) &\simeq (h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z_{\tau_1})\end{aligned}$$

$z_\lambda$  est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_\lambda + Az_\lambda + f'(z_0)z_\lambda = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q}; \\ z_\lambda(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega; \\ z_\lambda = \widehat{\xi} \quad \text{sur } \Sigma_0 = \mathcal{O}_0 \times ]0, T[ \\ z_\lambda = 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{array} \right. \quad (5.7)$$

$z_{\tau_0}$  est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_{\tau_0} + Az_{\tau_0} + f'(z_0)z_{\tau_0} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q}; \\ z_{\tau_0}(0) = \widehat{z}_0 \quad \text{dans } \Omega; \\ z_{\tau_0} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \quad (5.8)$$

$z_{\tau_1}$  est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_{\tau_1} + Az_{\tau_1} + f'(z_0)z_{\tau_1} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q}; \\ z_{\tau_1}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega; \\ z_{\tau_1} = \widehat{g} \quad \text{sur } \Sigma_1 \\ z_{\tau_1} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Pour construire la sentinelle (sentinelle faible), on doit déterminer  $u_\epsilon$  qui assure les condition (5.4) et (5.5) pour un  $\epsilon$  positif donné.

### 5.2.2 Etat adjoint

La condition (5.5) sont équivalente à:

$$|(h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z_{\tau_0})_{L^2}| \leq \epsilon; \quad (5.10)$$

$$|(h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z_{\tau_1})_{L^2}| \leq \epsilon; \quad (5.11)$$

On définit  $q$  par

$$\begin{cases} -q' + A^*q + f'(z_0)q = \mathcal{B}^*(h_0 + u_\epsilon) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (5.12)$$

Dans (5.12),  $\mathcal{B}^*$  est l'adjoint de  $\mathcal{B}$ , donc:  $\mathcal{B}^* \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{O} \times (0, T)); L^2(\Omega \times (0, T)))$ .

En multipliant (5.12) par  $z_{\tau_0}$  (resp.  $z_{\tau_1}$ ) et intégrant par parties, on voit que les conditions (5.10), (5.11) sont respectivement équivalentes à

$$|q(x, 0)| \leq \epsilon \quad (5.13)$$

(Où on a écrit  $|\cdot|$  pour  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ).

$$\left| \frac{\partial q}{\partial \nu_*} \right| \leq \epsilon \text{ sur } \Sigma_1 \quad (5.14)$$

(où  $\frac{\partial}{\partial \nu_*}$  dénote la dérivée normale à  $\Gamma$  associée à  $A^*$  et avec orientation vers l'extérieur de  $\Omega$ ).

Il s'agit là maintenant d'un problème du type "contrôlabilité"

**Remarque 5.2.1** *Il résulte de (5.12) et (5.14) que les données de Cauchy pour  $q$  sont nulles sur  $\Sigma_1$ . donc  $q \equiv 0$  dans la composante connexe du complémentaire du support de  $\mathcal{B}^*(h_0 + u_\epsilon)$  qui contient  $\Gamma_1$ . Si par conséquent  $\Gamma_0$  est dans (la frontière de) cette composante, alors  $q = 0$  au voisinage de  $\Gamma_0$  et la sentinelle ne fournit aucune information sur la pollution.*

### 5.2.3 Nouveau problème de type contrôlabilité

On pose  $q = q_0 + y$ , où  $q_0$  et  $y$  sont donnés comme suit:

$$\begin{cases} -q'_0 + A^*q_0 + f'(z_0)q_0 = \mathcal{B}^*h_0 \\ q_0(T) = 0 \\ q_0 = 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (5.15)$$

et

$$\begin{cases} -y' + A^*y + f'(z_0)y = \mathcal{B}^*u_\epsilon \\ y(T) = 0 \\ y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (5.16)$$

On cherche  $u_\epsilon$  tel que (cf. (5.13), (5.14))

$$\begin{cases} |y(0) + q_0(0)| \leq \epsilon \text{ sur } \Omega \\ \|u_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} = \min \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\left| \frac{\partial y}{\partial \nu_*} + \frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} \right| \leq \epsilon \text{ sur } \Sigma_1 \quad (5.18)$$

et (5.4).

**Remarque 5.2.2** Si l'on considère  $u_\epsilon$  comme un contrôle et  $y$  comme l'état d'un (nouveau) système, il s'agit de trouver  $u_\epsilon$  conduisant l'état de 0 pour  $T = 0$  à  $-q_0(0)$  pour  $t = 0$  et tel que en outre on ait (5.18). C'est un problème du type contrôlabilité avec la condition supplémentaire (5.18). (voir: [16]).

**Remarque 5.2.3** Comme  $u_\epsilon = -h_0$  donne évidemment lieu à (5.5), on sait qu'il y a en fait existence et unicité de la sentinelle, qui est définie par  $h_0$ . Les problèmes sont:

- 1/ de calculer cette sentinelle;
- 2/ de voir si elle donne effectivement des informations, et donc, en particulier si  $u_{opt} \neq -h_0$ , et si on ne tombe pas dans la difficulté signalée à la remarque (5.3).

En résumé, le problème d'existence d'une unique sentinelle revient à résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$(P) : \left\{ \min_{\Lambda} \|u_\epsilon\|_{L^2} \right\}$$

Où

$$\Lambda = \left\{ u_\epsilon \text{ tel que } \begin{cases} -q' + A^*q + f'(z_0)q = \mathcal{B}^*(h_0 + u_\epsilon) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \text{avec } |q(x, 0)| \leq \epsilon \text{ et } \left| \frac{\partial q}{\partial \nu_*} \right| \leq \epsilon \text{ sur } \Sigma_1 \end{cases} \right\}$$

Le domaine des contraintes du problème (P) est non vide car  $u_\epsilon = -h_0$  donne  $q \equiv 0$ , par conséquent le problème (P) admet toujours une solution et une seule que l'on note  $\hat{u}_\epsilon$ . Il reste donc deux problèmes à résoudre

- 1/ Calculer  $\hat{u}_\epsilon$ ,

2/ S'assurer que  $\widehat{u}_\epsilon \neq -h_0$ .

Une méthode classique pour obtenir le système d'optimalité pour le problème (P) est la méthode de pénalisation.

### 5.2.4 La méthode de Pénalisation

On considère la fonctionnelle

$$J_\vartheta(u_\epsilon, y) = \frac{1}{2} \|u_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}^2 + \frac{1}{2\vartheta} \|-y' + A^*y + f'(z_0)y - \mathcal{B}^*u_\epsilon\|_{L^2(\Omega \times (0, T))}^2 \quad (5.19)$$

On considère dans (5.19), les fonctions  $y$  telles que

$$\begin{cases} -y' + A^*y + f'(z_0)y \in L^2(\Omega \times (0, T)) \\ y(T) = 0; y = 0 \text{ sur } \Sigma \\ |y(0) + q_0(0)| \leq \epsilon \\ \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_*} + \frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} \right| \leq \epsilon \text{ sur } \Sigma_1 \end{cases} \quad (5.20)$$

où  $u_\epsilon^\vartheta, y^\vartheta$  la solution de  $\inf J_\vartheta(u_\epsilon, y)$ .

dans les conditions ci-dessus. Posons  $\rho^\vartheta = \frac{1}{\vartheta} (-\partial y^\vartheta / \partial t + A^*y^\vartheta + f'(z_0)y^\vartheta - \mathcal{B}^*u_\epsilon^\vartheta)$

on a:

$$(u_\epsilon^\vartheta, \widehat{u}_\epsilon)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} + \int_0^T \int_\Omega \rho^\vartheta (-\partial \widehat{y} / \partial t + A^*\widehat{y} + f'(z_0)\widehat{y} - \mathcal{B}^*\widehat{u}_\epsilon) dxdt = 0 \quad (5.21)$$

on a alors:

$$\begin{cases} -\partial \rho^\vartheta / \partial t + A\rho^\vartheta + f'(z_0)\rho^\vartheta = 0 \\ \rho^\vartheta = 0 \text{ sur } \Sigma \setminus \Sigma_1 \end{cases} \quad (5.22)$$

sans aucune condition sur  $\rho^\vartheta(0)$ ,  $\rho^\vartheta(T)$  ou sur  $\rho^\vartheta$  pris sur la frontière  $\Sigma_1$ .

par ailleurs, on déduit encore de (5.22) que  $u_\epsilon^\vartheta = \mathcal{B}\rho^\vartheta$

Un passage à la limite formel donne le système d'optimalité.

### 5.2.5 Système d'optimalité ( $\vartheta \rightarrow 0$ )

pour  $\rho^0 \in L^2(\Omega)$  et pour  $\sigma$  fonction régulière sur  $\Sigma_1$ , on définit  $\rho$  solution de

$$\rho' + A\rho + f'(z_0)\rho = 0, \rho(0) = \rho^0, \rho = \sigma \text{ sur } \Sigma_1, \rho = 0 \text{ sur } \Sigma \setminus \Sigma_1 \quad (5.23)$$

on définit ensuite  $y$  par

$$\begin{cases} -y' + A^*y + f'(z_0)y = \mathcal{B}^*\mathcal{B}\rho \\ y(T) = 0 \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (5.24)$$

On cherche  $\rho^0$  et  $\sigma$  de façon que:

$$|y(0) + q_0(0)| \leq \epsilon, \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_*} + \frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} \right| \leq \epsilon \text{ sur } \Sigma_1 \quad (5.25)$$

on définit l'opérateur linéaire  $\Lambda$  par:

$$\Lambda \{ \rho^0, \sigma \} = \left\{ y(0), -\frac{\partial y}{\partial \nu_*} \Big|_{\Sigma_1} \right\} \quad (5.26)$$

il s'agit donc de résoudre

$$\left| \Lambda \{ \rho^0, \sigma \} + \left\{ q_0(0), -\frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} \Big|_{\Sigma_1} \right\} \right| \leq \epsilon$$

### 5.2.6 Unicité et nouveaux espaces fonctionnels

Si l'on multiplie (5.24) par  $\rho$  on obtient, après intégrations par parties

$$\langle \Lambda \{ \rho^0, \sigma \}, \{ \rho^0, \sigma \} \rangle = \|\mathcal{B}\rho\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))}^2 \quad (5.27)$$

Cela conduit à introduire la quantité

$$\|\{ \rho^0, \sigma \}\|_{\mathcal{F}} = \|\mathcal{B}\rho\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))}$$

On désigne par  $\mathcal{F}$  l'espace de **Hilbert** séparé et complété des fonctions régulières  $\rho^0, \sigma$  pour la semi-norme:  $\|\{ \rho^0, \sigma \}\|_{\mathcal{F}} = \|\mathcal{B}\rho\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))}$ . Donc  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des états atteignables à l'instant  $t = 0$ .

$\mathcal{F}$  est un espace vectoriel. Et pour démontrer la densité, il suffit d'utiliser le théorème de **HAHN-BANACH** et de remarquer que  $\mathcal{F}^\perp$  est réduit à zéro.

Comme  $\{0\} \subset \mathcal{F}^\perp$ , il reste à montrer que  $\mathcal{F}^\perp \subset \{0\}$ . Soit  $\rho^0, \sigma \in \mathcal{F}^\perp$ .

Maintenant, on multiplie la première équation du système (5.23) par  $y$ . Après intégration par parties, on obtient:  $\rho \equiv 0$  sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$  et donc d'après l'unicité du problème de **CAUCHY** (toujours sous des hypothèses de régularité convenables sur

les coefficients et sur  $f'(z_0)$ ) on a  $\rho \equiv 0$ . Donc  $\rho^0 = 0$  et  $\sigma = 0$  sur  $\Sigma_1$ . Ce qui montre que  $\mathcal{F}^\perp = \{0\}$ .

Il peut contenir des éléments qui ne sont pas des distributions, ni sur  $\Omega$ , ni sur  $\Sigma_1$  (au moins si  $\Sigma_1$  est une variété  $\mathcal{C}^\infty$ ).

cela posé, on a (fait ce qu'il fallait pour avoir) le résultat:

$\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$  est un isomorphisme de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{F}'$ .

On a par conséquent la solution de

$$\left| \Lambda \{ \rho^0, \sigma \} + \left\{ q_0(0), -\frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} \Big|_{\Sigma_1} \right\} \right| \leq \epsilon \quad (5.28)$$

On note ensuite que:

$$\left\{ q_0(0), -\frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} \Big|_{\Sigma_1} \right\} \in \mathcal{F}' \quad (5.29)$$

mais en multipliant (5.15) par  $\rho$ , on trouve

$$\left\langle \left\{ q_0(0), -\frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} \Big|_{\Sigma_1} \right\}, \{ \rho^0, \sigma \} \right\rangle = (h_0, \mathcal{B}\rho)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \quad (5.30)$$

d'où (5.29), on a:

$$\left\| \left\{ q_0(0), -\frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} \Big|_{\Sigma_1} \right\} \right\|_{\mathcal{F}'} \leq \|h_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$$

Donc, il existe un couple unique  $(\widehat{u}_\epsilon, \widehat{q})$  solution du problème (P).

Et on considère le problème  $(P_\epsilon)$  sans contrainte suivant:

$$(P_\epsilon) : \begin{cases} \min J_\epsilon(u_\epsilon, y) \\ (u_\epsilon, y) \in B^\epsilon \end{cases}$$

avec

$$B^\epsilon = \left\{ (u_\epsilon, y) \text{ tel que } \begin{cases} -y' + A^*y + f'(z_0)y \in L^2(\Omega \times (0, T)) \\ y(T) = 0 \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \right\}$$

le problème  $(P_\epsilon)$  admet une solution unique qu'on notera  $(u_\epsilon^\epsilon, y^\epsilon)$  tel que  $u_\epsilon^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{u}_\epsilon$  faiblement dans  $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$  et  $y^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{q}$  faiblement dans  $L^2(\mathcal{Q})$ .

Alors,  $(\widehat{u}_\epsilon, \widehat{q})$  est l'unique solution du problème (P) si et seulement s'il existe une fonction  $\widehat{\rho}$  telle que  $\{\widehat{u}_\epsilon, \widehat{q}, \widehat{\rho}\}$  est solution du système d'optimalité suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\widehat{q}' + A^*\widehat{q} + f'(z_0)\widehat{q} = \mathcal{B}^*(h_0 + u_\epsilon) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \widehat{q}(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \widehat{q} = 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

Et  $\widehat{\rho}' + A\widehat{\rho} + f'(z_0)\widehat{\rho} = 0, \widehat{\rho}(0) = \widehat{\rho}^0, \widehat{\rho} = \sigma$  sur  $\Sigma_1, \widehat{\rho} = 0$  sur  $\Sigma \setminus \Sigma_1$

avec  $\widehat{u}_\epsilon = \mathcal{B}\widehat{\rho}$  sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ .

### 5.2.7 Construction des sentinelles

**Théorème 5.2.1** *La sentinelle définie par  $h_0$  et  $\mathcal{B}$  est construite de la manière suivante. on calcule  $q_0$  par (5.15). on définit  $\Lambda$  par (5.26) et on calcule  $\{\rho^0, \sigma\}$  par (5.28). la sentinelle correspondante est donnée par*

$$(h_0 + \mathcal{B}\rho, \mathcal{B}z(\lambda, \tau))_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$$

Dans ce qui suit nous appliquons le résultat précédent pour estimer le terme de pollution de système (5.1).

## 5.3 ESTIMATION DU TERME DE POLLUTION

**Théorème 5.3.1** *Si le système (5.16) est faiblement contrôlable sur  $\Omega$ , alors:*

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial \nu_*} q(h_0) \left\{ \lambda \widehat{\xi} \right\} d\Sigma_0 \leq (h_0 + u_\epsilon, |m_0 - \mathcal{B}z_0|)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} + \tau_0 \epsilon + \tau_1 \epsilon$$

Où  $z_0$  est la solution de (5.6) et  $m_0$  est l'état observé sur  $\mathcal{O}$  pendant l'intervalle du temps  $(0, T)$ .

**Preuve.** Soit  $\mathcal{S}(\lambda, \tau)$  la sentinelle définie par  $h_0$  donc

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) = \lambda (h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z_\lambda)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} = \mathcal{S}(\lambda, \tau) - \mathcal{S}(0, 0) - \tau_0 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_0}(0, 0) - \tau_1 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_1}(0, 0)$$

D'où une estimation de  $\lambda \widehat{\xi}$ , sachant que  $\mathcal{S}(0, 0)$  est calculable et

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = (h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z(\lambda, \tau))_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$$

Et sur l'observatoire  $\mathcal{O}$  on pose  $z = m_0$  alors on a

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda} (0, 0) = (h_0 + u_\epsilon, m_0 - \mathcal{B}y_0)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} - \tau_0 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_0} (0, 0) - \tau_1 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_1} (0, 0)$$

Où  $z_\lambda$  est la solution de (5.7), on multiplie (5.12) par  $z_\lambda$ , on obtient alors

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial \nu_*} q(h_0) \left\{ \lambda \widehat{\xi} \right\} d\Sigma_0 = \lambda (h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z_\lambda)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$$

Et d'autre part on a

$$\left| \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_0} (0, 0) \right| = |(h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z_{\tau_0})| \leq \epsilon, \quad \left| \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_1} (0, 0) \right| = |(h_0 + u_\epsilon, \mathcal{B}z_{\tau_1})| \leq \epsilon$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial \nu_*} q(h_0) \left\{ \lambda \widehat{\xi} \right\} d\Sigma_0 &= \mathcal{S}(\lambda, \tau) - \mathcal{S}(0, 0) - \tau_0 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_0} (0, 0) - \tau_1 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_1} (0, 0) \\ &\leq (h_0 + u_\epsilon, |m_0 - \mathcal{B}z_0|)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} + \tau_0 \epsilon + \tau_1 \epsilon \end{aligned}$$

D'où le résultat du théorème. ■

# Chapitre 6

## Domaines à données manquantes

La notion des sentinelles a été introduite dans l'étude des problèmes à données incomplètes par J.L.Lions [29]. Ces sentinelles sont construites à partir de l'existence de la contrôlabilité exacte du système adjoint. Dans ce travail, nous avons introduit les sentinelles pour étudier l'estimation de la pollution des systèmes distribués dans les domaines avec des données manquantes, et que la pollution apparaît au bord<sup>(1)</sup>.

### 6.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

On considère maintenant les situations où l'on manque d'informations sur le domaine (par exemple: partie inconnue sur la frontière) dans lequel le système est étudié.

On formulera cela de la manière suivante.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  donné et soit (Fig. 6.1)

$$S_0 \subset \Gamma = \partial\Omega \tag{6.1}$$

---

<sup>(1)</sup>(voir: [25])

**Keywords:** sentinel, controllability, distributed system, pollution term.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 93B05 (controllability); 92D40 (ecology); 93C20 (control systems governed by PDE).

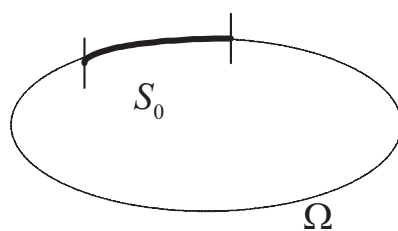


Fig. 6.1

On considère ensuite  $\Omega_\tau$  ouvert "voisin" de  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega_\tau = (\Gamma - S_0) \cup S_\tau$  (Fig. 6.2)

Où  $\Omega_\tau$  est définie à partir de  $\Omega$  comme le lieu des points

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \tau\alpha(x)\nu(x), x \in \Omega \\ \nu(x) = \text{normale unitaire à } \partial\Omega, \text{ dirigée vers l'extérieur de } \Omega, \\ \tau \text{ paramètre réel petit, } \alpha \text{ fonction } \mathcal{C}^1 \text{ quelconque sur } S_0 \\ \text{avec } |\alpha(x)| \leq 1, \alpha = 0 \text{ sur } \Gamma/S_0. \end{array} \right. \quad (6.2)$$

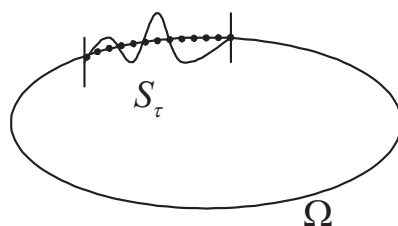


Fig. 6.2

Où  $S_\tau$  est définie à partir de  $S_0$  par:

$$S_\tau = \{x + \tau\alpha(x)\nu(x), x \in S_0\} \quad (6.3)$$

**Remarque 6.1.1** *Il n'y a pas de difficulté topologique dans la définition de  $\Omega_\tau$  dès que  $\tau$  est assez petit.*

*Notre objet est d'étudier le système dont l'état est donné par  $z' - \Delta z = 0$  dans  $\Omega_\tau \times (0, T)$*

où  $\Delta$  est un opérateur différentiel elliptique du 2ème ordre, à coefficients données dans  $\Omega \cup$  un voisinage de  $S_0$  et assez réguliers.

on suppose que  $z(0) = z_0$  dans  $\Omega_\tau$ .

**Remarque 6.1.2** La condition  $z(0) = z_0$  dans  $\Omega_\tau$  signifie plus précisément:

$z(0) =$  restriction à  $\Omega_\tau$  de  $z_0$  définie dans  $\Omega \cup$  au voisinage de  $S_0$ .

**Remarque 6.1.3** On pourrait considérer le cas des données manquantes sur  $z(0)$ , du type  $z(0) = z_0 + \tau_1 \widehat{z}_0$  dans  $\Omega_\tau$ .

Cela, qui n'introduirait pas de difficulté supplémentaire par rapport à ce qui suit, n'est pas développé ici.

On considère maintenant une situation où il y a pollution sur  $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[$ . Donc (par exemple)

$$z = \begin{cases} \xi + \lambda \widehat{\xi} & \text{sur } \Sigma_0 \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases}$$

Donc le système d'état est donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} z - \Delta z = 0 & \text{dans } \mathcal{Q}_\tau = \Omega_\tau \times ]0, T[ \\ z = \xi + \lambda \widehat{\xi} & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[ \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \\ z(0) = z_0 & \text{dans } \Omega_\tau \end{array} \right. \quad (6.4)$$

**Remarque 6.1.4** On suppose (Fig. 6.3) que  $\Gamma_0 \cap S_\tau = \emptyset$ . La situation où il y aurait pollution sur une partie à données incomplètes sur la frontière n'est pas examiné.

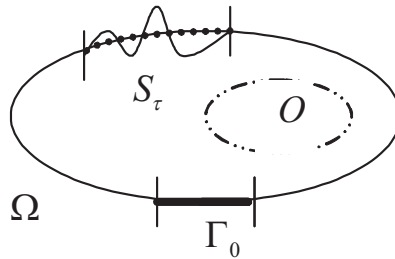


Fig. 6.3

On va introduire (si possible) les sentinelles à partir de l'observation de  $z$  sur  $\mathcal{O} \times (0, T)$ , où  $\mathcal{O}$  est un observatoire distribué  $\mathcal{O} \subset \Omega$ .

Donc, si  $z(x, t; \lambda, \tau)$  désigne la solution de (6.4), l'observation est

$$z(\lambda, \tau) \text{ sur } \mathcal{G} = \mathcal{O} \times (0, T) = m_0 \text{ donnée dans } L^2(\mathcal{G}).$$

## 6.2 APPLICATION DE LA MÉTHODE DES SENTINELLES

Soit  $h_0$  une fonction donnée avec  $h_0 \in L^2(\mathcal{G})$

Soit par ailleurs une fonction  $u$  à déterminer avec  $u \in L^2(\mathcal{G})$

On considère la fonctionnelle

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int \int_{\mathcal{G}} (h_0 + u) z(x, t; \lambda, \tau) dx dt$$

On se place ici dans le cadre du problème (6.4) l'observation n'est pas bruitée.

Si  $u$  est connue, on a accès à

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{obs}(\lambda, \tau) &= \int \int_{\mathcal{G}} (h_0 + u) z_{obs}(x, t; \lambda, \tau) dx dt \\ &= \int \int_{\mathcal{G}} (h_0 + u) m_0(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (6.5)$$

On dira que la fonctionnelle  $\mathcal{S}(\lambda, \tau)$  est une sentinelle définie par  $h_0$  si les conditions suivantes ont lieu

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{S}(0, 0) = 0, \quad (6.6)$$

Et

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{G})} = \text{minimum}. \quad (6.7)$$

**Remarque 6.2.1** *En fait,  $h_0$  étant donnée, les conditions (6.6)-(6.7) définissent  $u$  de manière unique. On dira alors que  $\mathcal{S}$  est la sentinelle définie par  $h_0$ .*

**Remarque 6.2.2** *La condition (6.6) est naturelle. Elle exprime que la sentinelle n'est pas affectée (au premier ordre !) par l'absence d'informations sur les termes manquants.*

**Remarque 6.2.3** Si la fonction  $h_0$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0 \geq 0 \\ \int \int_{\mathcal{G}} h_0 dxdt = 1 \end{array} \right.$$

Alors

$$\int \int_{\mathcal{G}} h_0 z(x, t; \lambda, \tau) dxdt$$

Est une moyenne. La condition (6.7) exprime que la sentinelle est aussi proche que possible d'une moyenne

Plus généralement,  $h_0$  est à notre disposition. La condition (6.7) exprime que l'on "s'éloigne le moins possible" (au sens  $L^2$ ) de  $h_0$ .

La remarque présentée est formelle mais fondamentale.

Désignons par  $z_0$  la solution de

$$\left\{ \begin{array}{llll} \frac{\partial}{\partial t} z_0 - \Delta z_0 & = & 0 & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times ]0, T[ \\ z_0 & = & \xi & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[ \\ z_0 & = & 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \\ z_0(0) & = & z_0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (6.8)$$

On suppose que l'on peut calculer cette solution  $z_0$ , alors (si  $u$  est calculée)

$$\mathcal{S}(0, 0) = \int \int_{\mathcal{G}} (h_0 + u) z_0(x, t) dxdt$$

est connu.

On effectue un développement de Taylor de  $\mathcal{S}$  au voisinage de  $(0, 0)$

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \mathcal{S}(0, 0) + \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) + \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0)$$

Et

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) = \int \int_{\mathcal{G}} (h_0 + u) z_\lambda(x, t) dxdt$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = \int \int_{\mathcal{G}} (h_0 + u) z_\tau(x, t) dxdt$$

Et  $z_\lambda(x, t)$  est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z_\lambda - \Delta z_\lambda = 0, \\ z_\lambda(0) = 0, \\ z_\lambda = \begin{cases} \widehat{\xi} & \text{sur } \Sigma_0, \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{cases} \end{cases} \quad (6.9)$$

**Lemme 6.2.1**  $z_\tau$  est la solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z_\tau - \Delta z_\tau = 0 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ z_\tau = -\alpha \frac{\partial z_0}{\partial \nu} & \text{sur } S_0 \times ]0, T[ \\ z_\tau = 0 & \text{sur } \Sigma \setminus S_0 \times ]0, T[ \\ z_\tau(0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (6.10)$$

**Preuve.** On a  $z_\tau = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{z(0, \tau) - z(0, 0)}{\tau} \right)$ , et  $z(0, \tau)$  est la solution du problème:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(0, \tau) - \Delta z(0, \tau) = 0 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ z(0, \tau) = -\alpha \frac{\partial z_0}{\partial \nu} & \text{sur } S_0 \times ]0, T[ \\ z(0, \tau) = 0 & \text{sur } \Sigma \setminus S_0 \times ]0, T[ \\ z(0)(0, \tau) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (6.11)$$

$z_0 = z(0, 0)$  est la solution du problème:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(0, 0) - \Delta z(0, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ z(0, 0) = -\alpha \frac{\partial z_0}{\partial \nu} & \text{sur } S_0 \times ]0, T[ \\ z(0, 0) = 0 & \text{sur } \Sigma \setminus S_0 \times ]0, T[ \\ z(0)(0, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (6.12)$$

On pose:  $\Sigma_0 = S_0 \times ]0, T[$  et  $\Sigma_1 = \Sigma \setminus \Sigma_0$ . Alors [(6.11) - (6.12)]  $\times \frac{1}{\tau}$  donne:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{z(0, \tau) - z(0, 0)}{\tau} \right) - \Delta \left( \frac{z(0, \tau) - z(0, 0)}{\tau} \right) = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \frac{z(0, \tau) - z(0, 0)}{\tau} = -\alpha \frac{\partial z_0}{\partial \nu} & \text{sur } \Sigma_0 \\ \frac{z(0, \tau) - z(0, 0)}{\tau} = 0 & \text{sur } \Sigma_1 \\ \left( \frac{z(0)(0, \tau) - z(0)(0, 0)}{\tau} \right) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (6.13)$$

Par passage à la limite quand  $\tau \rightarrow 0$  dans (6.13), on obtient (6.10). ■

Pour définir la sentinelle, on doit déterminer  $u$  qui assure les conditions (6.6)-(6.7).

**Orientation:** On va maintenant montrer comment,  $h_0$  donnée, on peut construire l'unique fonction  $u$  telle que l'on ait (6.6)-(6.7).

## 6.3 ÉTAT ADJOINT

### 6.3.1 La condition d'insensibilité

On suppose que l'on peut calculer  $\frac{\partial z}{\partial \tau}$  pour  $\lambda = 0, \tau = 0$ .

Sous réserve de vérification qui d'erra être faite dans chaque cas particulier,  $\frac{\partial z}{\partial \tau} = z_\tau$  est donnée par (6.10).

Alors

$$\int \int_{\mathcal{G}} (h_0 + u) z_\tau(x, t) dx dt = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = 0 \quad (6.14)$$

D'après (6.6).

On transforme maintenant (6.14) par introduire (classique) de l'état adjoint.

### 6.3.2 L'état adjoint

On définit l'état adjoint par:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial t} q - \Delta q = (h_0 + u) \chi_{\mathcal{O}} \\ q(T) = 0 \\ q = 0 \text{ sur } \Sigma \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Dans (6.15),  $\chi_{\mathcal{O}}$  = fonction caractéristique de  $\mathcal{O}$  défini par:

$$\chi_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{O} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{O} \end{cases}$$

Si maintenant on multiplie (6.15) par  $z_\tau$ , on obtient après intégrations par parties

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = \int \int_{\mathcal{G}} (h_0 + u) z_\tau(x, t) dx dt = - \int_{\Sigma} \frac{\partial q}{\partial \nu_*} z_\tau d\Sigma \quad (6.16)$$

C'est-à-dire, en utilisant (6.10):

$$\int_{S_0 \times ]0, T[} \alpha \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \frac{\partial q}{\partial \nu_*} d\Sigma = 0$$

Cette égalité doit avoir lieu pour toute fonction  $\alpha$  régulière, avec  $|\alpha(x)| \leq 1, \alpha = 0$  sur  $\Gamma/S_0$ . Cela équivaut à

$$\int_0^T \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \frac{\partial q}{\partial \nu_*} dt = 0, \forall x \in S_0$$

C'est un problème de contrôlabilité, encore de type nouveau.

On précise en décomposant  $q$  en  $q = q_0 + y$

Où

$$\begin{cases} -q'_0 - \Delta q_0 = h_0 \chi_{\mathcal{O}} \\ q_0(T) = 0, q_0 = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (6.17)$$

Et

$$\begin{cases} -y' - \Delta y = u \chi_{\mathcal{O}} \\ y(T) = 0, y = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (6.18)$$

On veut trouver  $u$  avec (6.1.7) tel que

$$\int_0^T \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \frac{\partial y}{\partial \nu_*} dt = - \int_0^T \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} dt \text{ sur } S_0 \quad (6.19)$$

## 6.4 SYSTÈME D'OPTIMALITÉ

On détaille ici les calculs. On considère le problème pénalisé suivant.

On introduit la fonctionnelle

$$J_\epsilon(u, y) = \frac{1}{2} \int \int_{\mathcal{G}} u^2 dx dt + \frac{1}{2\epsilon} \|-y' - \Delta y - u \chi_{\mathcal{O}}\|^2 \quad (6.20)$$

Où  $y$  vérifie

$$\begin{cases} y(T) = 0, y = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \text{et les conditions (6.1.19)} \end{cases} \quad (6.21)$$

Soit  $u_\epsilon, y_\epsilon$  la solution de  $\inf J_\epsilon(u, y)$  sous les conditions (6.1.21).

Si l'on pose

$$\rho_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} (-y'_\epsilon - \Delta y_\epsilon - u_\epsilon \chi_{\mathcal{O}}) \quad (6.22)$$

On a:

$$\int \int_{\mathcal{G}} u_\epsilon \widehat{u} dx dt + \int \int_{\Omega \times (0, T)} \rho_\epsilon (-\widehat{y}' - \Delta \widehat{y} - \widehat{u} \chi_{\mathcal{O}}) dx dt = 0 \quad (6.23)$$

$\forall \widehat{u}$  et  $\forall \widehat{y}$  tel que  $\widehat{y}(T) = 0, \widehat{y} = 0$  sur  $\Sigma$  et

$$\int_0^T \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu_*} dt = 0 \text{ sur } S_0 \quad (6.24)$$

On a donc

$$\begin{cases} \rho'_\epsilon - \Delta \rho_\epsilon = 0, \\ \rho_\epsilon(0) = 0, \\ \rho_\epsilon = 0 \text{ sur } \Sigma \setminus S_0 \times (0, T) \end{cases} \quad (6.25)$$

Et

$$\int \int_{S_0 \times (0, T)} \frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu_*} \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial \nu} d\Sigma = 0, \forall \widehat{y} \text{ vérifiant (6.1.24)} \quad (6.26)$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial \nu} = \sigma_\epsilon(x) \frac{\partial z_0}{\partial \nu}(x, t) \text{ sur } S_0 \times (0, T), \\ \sigma_\epsilon \text{ "quelconque"} \end{cases} \quad (6.27)$$

Par ailleurs, (6.1.23) implique également que

$$u_\epsilon = \rho_\epsilon \chi_{\mathcal{O}} \quad (6.28)$$

Comme  $u_\epsilon$  est borné dans  $L^2(\mathcal{G})$  (et, en fait, converge, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , vers la solution du problème), on a sur  $\sigma_\epsilon$  une information implicite, correspondant à  $\int \int_{\mathcal{G}} \rho_\epsilon^2 dx dt \leq$  constante.

C'est ce que l'on va exploiter.

Un passage à la limite, formel pour l'instant, donne le système d'optimalité que voici.

Pour  $\sigma(x)$  à déterminer dans un espace convenable, on définit  $\rho$  par

$$\begin{cases} \rho' - \Delta \rho = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ \rho(0) = 0, \\ \rho = \sigma(x) \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \text{ sur } S_0 \times (0, T) \\ \rho = 0 \text{ sur } \Sigma \setminus S_0 \times (0, T) \end{cases} \quad (6.29)$$

On définit ensuite  $y$  par

$$\begin{cases} -y' - \Delta y = \rho \chi_{\mathcal{O}} \\ y(T) = 0, y = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (6.30)$$

On cherche  $\sigma$  de façon que

$$\int_0^T \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \frac{\partial y}{\partial \nu_*} dt = - \int_0^T \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} dt \text{ sur } S_0 \quad (6.31)$$

Si (6.31) admet une solution, alors l'élément  $u$  cherché dans la sentinelle est donné par

$$\rho \chi_{\mathcal{O}}, \rho \text{ donné par (6.29) où } \sigma \text{ est donné par (6.31)} \quad (6.32)$$

On pose

$$\Lambda \sigma = \int_0^T \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \frac{\partial y}{\partial \nu_*} dt \text{ sur } S_0 \quad (6.33)$$

$$M h_0 = \int_0^T \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \frac{\partial q_0}{\partial \nu_*} dt \text{ sur } S_0 \quad (6.34)$$

L'équation (6.31) équivaut alors à

$$\Lambda \sigma = -M h_0 \quad (6.35)$$

qu'il convient de résoudre.

## 6.5 NOUVEAUX ESPACES FONCTIONNELS

En multipliant (6.30) par  $\rho$  et en intégrant par parties, on trouve que

$$\langle \Lambda \sigma, \sigma \rangle = \int \int_{\mathcal{G}} \rho^2 dx dt \quad (6.36)$$

Ce qui conduit à introduire

$$\|\sigma\|_F = \left( \int \int_{\mathcal{G}} \rho^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.37)$$

Sous des hypothèses raisonnables de régularité sur les coefficients, la quantité  $\|\sigma\|_F$  est une norme, on désigne par  $F$  l'espace de Hilbert complété des fonctions régulières  $\sigma$  sur  $S_0$  pour la norme (6.37). Alors

$$\Lambda \text{ est un isomorphisme de } F \text{ sur } F' \quad (6.38)$$

On note ensuite que

$$\langle Mh_0, \sigma \rangle = \int \int_{\mathcal{G}} h_0 \rho dxdt \quad (6.39)$$

D'où résulte que

$$Mh_0 \in F', \|Mh_0\|_{F'} \leq \|h_0\|_{L^2(\mathcal{G})} \quad (6.40)$$

Et

$$M^* \sigma = \rho \chi_{\mathcal{O}} \quad (6.41)$$

Donc (6.38) admet une solution unique donnée par

$$\sigma = -\Lambda^{-1} Mh_0 \quad (6.42)$$

Et la fonction  $u$  cherchée est donnée par

$$u = -M^* \Lambda^{-1} Mh_0 \quad (6.43)$$

La sentinelle cherchée est donc donnée par

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int \int_{\mathcal{G}} (h_0 - M^* \Lambda^{-1} Mh_0) z(\lambda, \tau) dxdt \quad (6.44)$$

**Conclusion 6.5.1** *On conclut que le problème d'existence d'une sentinelle est équivalent au problème d'optimisation suivant:*

$$(P) : \left\{ \min_B \|u\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \right\} \quad (6.45)$$

Et

$$B = \left\{ u \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial t} q - \Delta q = (h_0 + u) \chi_{\mathcal{O}} \\ q(T) = 0 \\ q = 0 \text{ sur } \Sigma \end{array} \right. \right\} \quad (6.46)$$

Donc, il existe un couple unique  $(\hat{u}, \hat{q})$  solution du problème (P), tel que

$$\hat{u} = -\hat{\rho} \chi_{\mathcal{O}} \quad (6.47)$$

Et on définit  $\hat{\rho}$  est la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho}' - \Delta \hat{\rho} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ \hat{\rho}(0) = 0, \\ \hat{\rho} = \sigma(x) \frac{\partial z_0}{\partial \nu} \text{ sur } S_0 \times (0, T) \\ \hat{\rho} = 0 \text{ sur } \Sigma \setminus S_0 \times (0, T) \end{array} \right. \quad (6.48)$$

On utilise la méthode de pénalisation pour obtenir le système d'optimalité pour  $(\hat{u}, \hat{q})$ .  
 Pour  $\epsilon > 0$ , soit la fonction suivante:

$$J_\epsilon(u, y) = \frac{1}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} u^2 dx dt + \frac{1}{2\epsilon} \|-y' - \Delta y - u\chi_{\mathcal{O}}\|^2 \quad (6.49)$$

On considère le problème  $(P_\epsilon)$  suivant

$$(P_\epsilon) : \begin{cases} \min J_\epsilon(u, y) \\ (u, y) \in B^\epsilon \end{cases} \quad (6.50)$$

avec

$$B^\epsilon = \left\{ (u, y) \text{ tel que } \begin{cases} -y' - \Delta y - u\chi_{\mathcal{O}} \in L^2(\mathcal{Q}) \\ y(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \right\} \quad (6.51)$$

le problème  $(P_\epsilon)$  admet une solution unique  $(u_\epsilon, y_\epsilon)$  tel que

$$\begin{cases} u_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \hat{u} \text{ faiblement dans } L^2(\mathcal{U}), \\ y_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \hat{q} \text{ faiblement dans } L^2(\mathcal{Q}). \end{cases} \quad (6.52)$$

Alors,  $(\hat{u}, \hat{q})$  est l'unique solution du problème  $(P)$  si et seulement s'il existe une fonction  $\hat{\rho}$  telle que  $\{\hat{u}, \hat{q}, \hat{\rho}\}$  est solution du problème d'optimalité suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} \hat{q} - \Delta \hat{q} = (h_0 + u)\chi_{\mathcal{O}} & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ \hat{q}(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \hat{q} = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (6.53)$$

$$\text{et } \begin{cases} \hat{\rho}' - \Delta \hat{\rho} = 0 & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ \hat{\rho}(0) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \hat{\rho} = \sigma(x) \frac{\partial z_0}{\partial \nu} & \text{sur } S_0 \times (0, T) \\ \hat{\rho} = 0 & \text{sur } \Sigma \setminus S_0 \times (0, T) \end{cases}$$

avec

$$\hat{u} = -\hat{\rho}\chi_{\mathcal{O}} \quad (6.54)$$

## 6.6 FURTIVITÉ

$z(\lambda, \tau) = m_0$  sur  $\mathcal{G} = \mathcal{O} \times (0, T)$ ,

Donc

$$\int \int_{\mathcal{G}} (h_0 - M^* \Lambda^{-1} M h_0) (m_0 - z_0) dx dt \simeq \lambda \int \int_{\mathcal{G}} (h_0 - M^* \Lambda^{-1} M h_0) z_\lambda dx dt \quad (6.55)$$

Où  $z_\lambda$  est donné par (6.9).

Désignons par  $q(h_0)$  la solution de (6.12) pour  $u$  donné par (6.43).

On a alors

$$\lambda \int \int_{\mathcal{G}} (h_0 - M^* \Lambda^{-1} M h_0) z_\lambda dx dt = - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial \nu_*} q(h_0) \{ \lambda \widehat{\xi} \} d\Sigma \quad (6.56)$$

La pollution  $\widehat{\xi}$  est donc furtive pour la sentinelle définie par  $h_0$  si

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial \nu_*} q(h_0) \widehat{\xi} d\Sigma = 0 \quad (6.57)$$

Supposons maintenant  $\widehat{\xi}$  furtive pour toute sentinelle définie par une suite  $h_{01}, h_{02}, \dots$  complète dans  $L^2(\mathcal{G})$ .

Alors (6.57) a lieu  $\forall h_0$ , et donc d'après (6.56)

$$z_\lambda - M^* \Lambda^{-1} M z_\lambda = 0 \quad \text{sur } \mathcal{G} \quad (6.58)$$

Mais d'après (6.41), on a:

$$M^* \Lambda^{-1} M z_\lambda = \theta_\lambda \chi_{\mathcal{O}} \quad (6.59)$$

Où

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \theta_\lambda - \Delta \theta_\lambda = 0, \\ \theta_\lambda(0) = 0, \\ \theta_\lambda = \begin{cases} \sigma_\lambda(x) \frac{\partial z_0}{\partial \nu} & \text{sur } S_0 \times (0, T) \text{ pour } \sigma_\lambda \text{ convenable,} \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus S_0 \times (0, T). \end{cases} \end{cases} \quad (6.60)$$

Alors

$$\psi_\lambda = z_\lambda - \theta_\lambda \quad (6.61)$$

Vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \psi_\lambda - \Delta \psi_\lambda = 0, \\ \psi_\lambda(0) = 0, \\ \psi_\lambda = \begin{cases} \widehat{\xi} & \text{sur } \Sigma_0, \\ -\sigma_\lambda \frac{\partial z_0}{\partial \nu} & \text{sur } S_0 \times (0, T), \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \cup S_0 \times (0, T); \end{cases} \end{array} \right. \quad (6.62)$$

Et où, par ailleurs par (6.58)

$$\psi_\lambda = 0 \quad \text{sur } \mathcal{G} \quad (6.63)$$

Donc (pour des coefficients assez réguliers)  $\psi_\lambda \equiv 0$  et donc  $\widehat{\xi} = 0$ .

Il n'y a donc pas de pollution qui soit furtive pour toutes les sentinelles définies par une suite complète dans  $L^2(\mathcal{G})$ .

# Chapitre 7

## Sentinelles pour les systèmes de NAVIER-STOKES à l'identification des pollutions

### 7.1 ORIGINES PHYSIQUES DU PROBLÈME DE STOKES

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui sont censées décrire le mouvement des fluides newtoniens (liquide et gaz visqueux ordinaires) dans l'approximation des milieux continus. La résolution de ces équations modélisant un fluide comme un milieu continu à une seule phase incompressible, si elle est possible, est ardue. La cohérence mathématique de ces équations non linéaires n'est pas démontrée. Mais elles permettent souvent par une résolution approchée de proposer une modélisation des courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, la simulation numérique du comportement des gratte-ciel ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et ingénieurs, des avions, trains ou voitures à grandes vitesses pour leurs bureaux d'études concepteurs, mais aussi le trivial écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides.

Elles sont nommées d'après deux scientifiques, le mathématicien et ingénieur des Ponts, Henri Navier, et le physicien George Gabriel Stokes, le choix oubliant le rôle intermédiaire du physicien Barré de Saint-Venant. Pour un gaz peu dense, il est possible de dériver ces équations à partir de l'équation de Boltzmann, décrivant un comportement moyen des particules dans le cadre de sa théorie cinétique des gaz.

## 7.2 ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Dans ce travail, nous considérons un système de Navier-Stokes pour lequel au terme source est ajouté un terme de pollution et à la donnée initiale est affectée une incertitude ou terme manquant. Nous montrons qu'une sentinelle distribuée, peut-être associée à ce système et permet alors de caractériser cette pollution. Ainsi, nous revoyons une étude abordée par Lions dans [29]. <sup>(1)</sup>.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  représentant le domaine géométrique du système ( $n = 1, 2, 3$  pour les applications) et soit  $T > 0$ . On suppose que la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  est assez régulière;  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ ;  $\mathcal{Q} = \Omega \times (0, T)$ ;  $\mathcal{U} = \omega \times (0, T)$  tq:  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ , tel que  $\omega \neq \emptyset$

Par conséquent,  $z = \{z_1, \dots, z_n\}$  est "donné" par:

$$\left\{ \begin{array}{lll} z' - \mu\Delta z + z\nabla z + \nabla\pi & = & \xi + \lambda\widehat{\xi} \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ \operatorname{div} z & = & 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ z & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ z(0) & = & z_0 + \tau\widehat{z}_0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.1)$$

Dans ces équations :

- ici la constante  $\mu > 0$  représente la viscosité cinématique du fluide.
- $t$  représente le temps;
- la fonction vectorielle  $z$  représente la vitesse du fluide et la fonction scalaire  $\pi$  désigne la pression;

- L'opérateur nabla (Le gradient), qui s'exprime sous la forme:  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

---

<sup>(1)</sup>(voir: [24])

En coordonnées cartésiennes, nabla est un opérateur de dérivation spatiale du 1er ordre. Les opérateurs gradient, divergence et laplacien peuvent s'écrire à l'aide de cet opérateur:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}; \overrightarrow{\operatorname{grad}} A = \vec{\nabla} A; \Delta A = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} A) = \nabla^2 A \text{ donc } \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

•  $z_0, \widehat{z}_0 \in H$  ;  $\xi, \widehat{\xi} \in L^2(0, T; H)$  ou  $\xi, \widehat{\xi} \in L^2(0, T; V')$ ,  $V' = \text{dual de } V$ ;  $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$  “petits”.

Telle que:

$$V = \{\varphi/\varphi \in (H_0^1(\Omega))^n, \operatorname{div} \varphi = 0\}$$

$$H = \{\varphi/\varphi \in (L^2(\Omega))^n, \operatorname{div} \varphi = 0; \varphi \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

• Les notations sont toujours les mêmes:  $\widehat{\lambda\xi}$  correspond à la pollution,  $\tau\widehat{z}_0$  à un “terme manquant” (on n’a pas d’information et on ne cherche pas à en obtenir sur ce terme).

### 7.2.1 Observation de l'état

On a donc un espace de Hilbert  $\mathcal{H} = (L^2(\mathcal{O} \times (0, T)))^n$ .

On supposera que

$$z_{obs} = m_0 \in (L^2(\mathcal{O} \times ]0, T[))^n \tag{7.2}$$

## 7.3 CONSTRUCTION DES SENTINELLES

### 7.3.1 Généralités

On se donne  $h_0$  avec  $h_0 \in (L^2(\mathcal{O} \times (0; T)))^n$ .

On cherche une sentinelle

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z(x, t; \lambda, \tau) dx dt \tag{7.3}$$

Telle que  $\chi_{\mathcal{O}}$  et  $\chi_{\omega}$  sont les fonctions caractéristiques de  $\mathcal{O}$  et  $\omega$  respectivement.

Où  $u$  est à déterminer dans  $(L^2(\omega \times (0; T)))^n$ . de façon que

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \min \tag{7.4}$$

Et que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{S}(0, 0) = 0, \forall \widehat{z}_0 \quad (7.5)$$

Où  $z_0$  (pour  $\lambda = 0$  et  $\tau = 0$ ) est la solution de:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial t} z_0 - \mu \Delta z_0 + z_0 \nabla z_0 + \nabla \pi_0 & = & \xi \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ \operatorname{div} z_0 & = & 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_0 & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ z_0(0) & = & z_0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.6)$$

Mais d'après (7.3),

$$\mathcal{S}(0, 0) = \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z_0(x, t) dx dt$$

On effectue un développement de Taylor de  $\mathcal{S}$  au voisinage de  $(0, 0)$  :

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) \simeq \mathcal{S}(0, 0) + \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) + \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0), \text{ pour } \lambda, \tau \text{ petit.}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) &= \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z_{\lambda}(x, t) dx dt \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) &= \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z_{\tau}(x, t) dx dt \end{aligned}$$

$z_{\lambda}$  est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial t} z_{\lambda} - \mu \Delta z_{\lambda} + z_0 \nabla z_{\lambda} + z_{\lambda} \nabla z_0 + \nabla \pi_{\lambda} & = & \widehat{\xi} \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ \operatorname{div} z_{\lambda} & = & 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_{\lambda} & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ z_{\lambda}(0) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.7)$$

$z_{\tau}$  est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial t} z_{\tau} - \mu \Delta z_{\tau} + z_0 \nabla z_{\tau} + z_{\tau} \nabla z_0 + \nabla \pi_{\tau} & = & 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ \operatorname{div} z_{\tau} & = & 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ z_{\tau} & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ z_{\tau}(0) & = & \widehat{z}_0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.8)$$

Pour construire la sentinelle, on doit déterminer  $u$  qui assure les condition (7.4) et (7.5).

### 7.3.2 Etat adjoint

La condition (7.5) sont équivalente à :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z_{\tau}(x, t) dx dt = 0; \forall \widehat{z}_0, \|\widehat{z}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 \quad (7.9)$$

On définit l'état adjoint  $q = \{q_1, \dots, q_n\}$  par:

$$\left\{ \begin{array}{lll} L^* q + \nabla \bar{\pi} & = & h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega} \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ \operatorname{div} q & = & 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ q & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ q(T) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.10)$$

Telle que:  $L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \mathcal{D}(Id) z_0$  l'opérateur adjoint de  $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \mathcal{D}(Id) z_0$  et l'opérateur  $\mathcal{D}(Id) z_0$  est une fonction linéaire donnée par  $\mathcal{D}(Id) z_0 : q \mapsto \mathcal{D}q z_0 = (\nabla q + \nabla q^t) z_0$ .

En multipliant (7.10) par  $z_{\tau}$  et intégrant par parties, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) &= \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z_{\tau}(x, t) dx dt \\ &= - \int_{\Omega} \widehat{z}_0 \widehat{q}(0) dx, \forall \widehat{z}_0, \|\widehat{z}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Telle que:  $\widehat{q} = q(u) \in L^2(0, T; V) \cap \mathcal{C}^0((0, T); H)$ .

D'après ((7.11) - (7.5)) on a:

$$\int_{\Omega} \widehat{z}_0 \widehat{q}(0) dx = (\widehat{q}(0), \widehat{z}_0); \forall \widehat{z}_0, \|\widehat{z}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$$

Donc:

$$\widehat{q}(x, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (7.12)$$

Il s'agit là maintenant d'un problème du type "contrôlabilité"

### 7.3.3 Nouveau problème de type contrôlabilité

On pose  $q = q_0 + y$ , où  $q_0$  et  $z$  sont donnés comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{lll} L^* q_0 + \nabla \widehat{\pi} & = & h_0 \chi_{\mathcal{O}} \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ \operatorname{div} q_0 & = & 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q} \\ q_0 & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ q_0(T) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.13)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{llll} L^*y + \nabla\tilde{\pi} & = & u\chi_\omega & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \operatorname{div} y & = & 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(T) & = & 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.14)$$

On cherche  $u_\epsilon$  tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0, u) = -q_0(0) \text{ sur } \Omega \\ \|u\|_{\mathcal{H}} = \min \end{array} \right. \quad (7.15)$$

**Remarque 7.3.1** Si l'on considère  $u$  comme un contrôle et  $y$  comme l'état d'un (nouveau) système, il s'agit de trouver  $u$  conduisant l'état de 0 pour  $T = 0$  à  $-q_0(0)$  pour  $t = 0$  et tel que en outre on ait (7.15). C'est un problème du type contrôlabilité avec la condition supplémentaire (7.15). (voir: [16]).

### 7.3.4 Pénalisation

On considère la fonctionnelle:

$$J_\vartheta(u, y) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega u^2 dx dt + \frac{1}{2\vartheta} \|L^*y + \nabla\tilde{\pi} - u\chi_\omega\|_{L^2(\Omega \times ]0, T[)}^2 \quad (7.16)$$

On considère dans (7.16), les fonctions  $y$  telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} L^*y + \nabla\tilde{\pi} \in L^2(\Omega \times (0, T)) \\ \operatorname{div} y = 0; y(T) = 0; y = 0 \text{ sur } \Sigma \\ y(0; u_\epsilon) = -q_0(0) \end{array} \right. \quad (7.17)$$

où  $u^\vartheta, y^\vartheta$  la solution de  $\inf J_\vartheta(u, y)$ .

dans les conditions ci-dessus. Posons

$$\rho^\vartheta = \frac{1}{\vartheta} (L^*y^\vartheta + \nabla\tilde{\pi} - \chi_\omega u^\vartheta)$$

on a:

$$\int \int_{\omega \times (0, T)} u^\vartheta \cdot \hat{u} dx dt + \int \int_{\Omega \times (0, T)} \rho^\vartheta (L^*\hat{y} + \nabla\tilde{\pi} - \chi_\omega \hat{u}) dx dt = 0 \quad (7.18)$$

$\forall \hat{u} \in (L^2(\mathcal{U}))^n$ ; et pour tout  $\hat{y}$  telle que:

$$\begin{cases} L^*\hat{y} + \nabla\tilde{\pi} - \chi_\omega\hat{u} \in L^2(\Omega \times (0, T)) \\ \operatorname{div}\hat{y} = 0 \\ \hat{y}(T) = 0, \hat{y} = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (7.19)$$

on a alors:

$$\begin{cases} L^*\rho^\vartheta + \nabla\sigma = 0 \\ \operatorname{div}\rho^\vartheta = 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

et:

$$\rho^\vartheta = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (7.21)$$

sans aucune condition sur  $\rho^\vartheta(0)$ ,  $\rho^\vartheta(T)$ .

par ailleurs, on déduit encore de (7.20) que

$$u^\vartheta = \chi_\omega\rho^\vartheta \quad (7.22)$$

Un passage à la limite formel donne le système d'optimalité.

### 7.3.5 Système d'optimalité ( $\vartheta \rightarrow 0$ )

pour  $\rho^0 \in L^2(\Omega)$ , on définit  $\rho$  solution de:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\rho - \mu\Delta\rho + z_0\nabla\rho + \rho\nabla z_0 + \nabla\sigma = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}\rho = 0 \\ \rho(0) = \rho^0; \rho = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (7.23)$$

on définit ensuite  $y$  par

$$\begin{cases} L^*y + \nabla\tilde{\pi} = \chi_\omega\rho \\ \operatorname{div}y = 0 \\ y(T) = 0; y = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (7.24)$$

La sentinelle est alors donnée par

$$\int_{\mathcal{Q}} (h_0\chi_{\mathcal{O}} + \rho\chi_\omega) z(x, t; \lambda, \tau) dxdt$$

où  $\rho$  est la solution de (7.23) correspondant à  $\rho^0$  donné par la solution de (l'équation en  $\rho^0$ )

$$y(0) = -q_0(0) \quad (7.25)$$

### 7.3.6 Unicité et nouveaux espaces fonctionnels

on définit l'opérateur linéaire  $\Lambda$  par

$$\Lambda\rho^0 = y(0) \tag{7.26}$$

Si l'on multiplie (7.24) par  $\rho$  on obtient, après intégrations par parties:

$$\langle \Lambda\rho^0, \rho^0 \rangle = \int \int_{\omega \times (0, T)} \rho^2 dx dt$$

Cela conduit à introduire la quantité

$$\|\rho^0\|_{\mathcal{F}} = \left( \int \int_{\omega \times (0, T)} \rho^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.27}$$

Il s'agit en fait d'une norme.

En effet, si  $\|\rho^0\|_{\mathcal{F}}$  alors:  $\rho^2$  sur  $\omega \times (0, T)$ .

Et par conséquent  $\rho$  sur  $\omega \times (0, T)$ .

Alors:

- On désigne alors par  $z_0$  une solution du système (7.6),  $z_0 \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

On peut considérer ici  $z\chi_\omega = z_{obs}$  dans  $L^2(\omega \times (0, T))^n$ ;  $n \geq 2$ .

• Pour  $n = 2$ .

Dans le cas  $z\chi_\omega = \{z_1\chi_\omega, z_2\chi_\omega\}$ ,  $H = L^2(\omega \times (0, T))^2$ ; il s'agit d'une adaptation du théorème de **MIZOHATA**. Si  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  sur  $\omega \times (0, T)$  alors  $\rho \equiv 0$ .

au moins si les coefficients  $z_0$  sont assez réguliers (cf. J.C. SAUT et B. SCHEURER [37]).

Dans le cas  $z\chi_\omega = z_2\chi_\omega$ ,  $H = L^2(\omega \times (0, T))$ , le problème correspondant semble ouvert. Considérons seulement le cas très particulier où  $z_0 = 0$ . Alors  $\rho$  satisfait à l'équation de Stokes  $\rho' - \mu\Delta\rho + \nabla\sigma = 0$ ;  $\text{div } \rho = 0$ . Par analyticité, si  $\rho_2 = 0$  sur  $\omega \times (0, T)$  il en résulte que  $\rho_2 = 0$  dans  $\Omega \times (0, T)$ .

Mais alors  $\text{div } \rho = 0$  implique  $\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} = 0$  dans  $\Omega \times (0, T)$ . Ce qui est impossible avec  $\rho_1 = 0$  sur  $\Gamma$  sauf si  $\rho_1 = 0$  dans  $\Omega \times (0, T)$  donc  $\rho^0 = 0$ .

• Pour  $n = 3$ .

Dans le cas  $z_0 = 0$ , pour la situation  $z\chi_\omega = \{z_2\chi_\omega, z_3\chi_\omega\}$  avec  $H = L^2(\omega \times (0, T))^2$ . On a:  $\rho_2 = \rho_3 = 0$  sur  $\omega \times (0, T)$ , alors, par analyticité,  $\rho_2 = \rho_3 = 0$  dans  $\Omega \times (0, T)$ .

Alors comme  $\operatorname{div} \rho = 0$ , on a:  $\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} = 0$  dans  $\Omega \times (0, T)$ , d'où  $\rho_1 = 0$  (car  $\rho_1 = 0$  au bord) et donc  $\rho^0 = 0$ .

La situation  $z\chi_\omega = z_3\chi_\omega$  avec  $H = L^2(\omega \times (0, T))$ , conduit à un problème intéressant. Soit donc  $\rho$  vérifiant  $\rho' - \mu\Delta\rho + \nabla\sigma = 0$ ;  $\operatorname{div} \rho = 0$  et  $\rho_3 = 0$  sur  $\omega \times (0, T)$ . Alors  $\rho_3 = 0$  dans  $\Omega \times (0, T)$ . Cela implique-t-il que  $\rho \equiv 0$ . Alors on déduit, quel que soit  $n$  si  $\rho_n = 0$  sur  $\omega \times (0, T)$ , quand a-t-on  $\rho \equiv 0$ .

Enfin, nous avons  $\rho \equiv 0$  et par conséquent  $\rho^0 = 0$ .

**Remarque 7.3.2** On désigne par  $\mathcal{F}$  l'espace de Hilbert séparé et complété des fonctions régulières  $\rho^0$  pour la semi norme (7.27).

$\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$  est un isomorphisme de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{F}'$ . Et  $\Lambda^* = \Lambda$ ;

On a par conséquent la solution de:

$$\Lambda\rho^0 = -q_0(0) \quad (7.28)$$

On note ensuite que:

$$q_0(0) \in \mathcal{F}' \quad (7.29)$$

mais en multipliant (7.13) par  $\rho$ , on trouve

$$\langle q_0(0), \rho^0 \rangle = \int_{\mathcal{Q}} h_0\chi_{\mathcal{O}} \cdot \rho\chi_\omega dxdt \quad (7.30)$$

donc:

$$|\langle q_0(0), \rho^0 \rangle| \leq \|h_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \|\rho^0\|_{\mathcal{F}}$$

d'où (7.29) avec

$$\|q_0(0)\|_{\mathcal{F}'} \leq \|h_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$$

### 7.3.7 Construction des sentinelles

**Théorème 7.3.1** La sentinelle définie par  $h_0$  est construite de la manière suivante. on calcule  $q_0$  par (7.13). on définit  $\Lambda$  par (7.26) et on calcule  $\rho^0$  par (7.28). la sentinelle correspondante est donnée par

$$\int_{\mathcal{Q}} (h_0\chi_{\mathcal{O}} + \rho\chi_\omega) z(x, t; \lambda, \tau) dxdt$$

Dans ce qui suit nous appliquons le résultat précédent pour estimer le terme de pollution de système (7.1).

## 7.4 ESTIMATIUN DU TERME DE POLLUTION

**Théorème 7.4.1** *Si le système (7.14) est contrôlable sur  $\Omega$ , alors:*

$$\int_{\mathcal{Q}} \widehat{q}(h_0) \left\{ \lambda \widehat{\xi} \right\} dxdt \leq \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) (m_0 - z_0) dxdt$$

Où  $z_0$  est la solution de (7.6) et  $m_0$  est l'état observé sur  $\mathcal{O}$  pendant l'intervalle du temps  $(0, T)$ .

**Preuve.** Soit  $\mathcal{S}(\lambda, \tau)$  la sentinelle définie par  $h_0$  donc

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) = \lambda \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z_{\lambda}(x, t) dxdt = \mathcal{S}(\lambda, \tau) - \mathcal{S}(0, 0) - \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0)$$

D'où une estimation de  $\lambda \widehat{\xi}$ , sachant que  $\mathcal{S}(0, 0)$  est calculable et

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z(x, t; \lambda, \tau) dxdt$$

Et sur l'observatoire  $\mathcal{O}$  on pose  $z = m_0$  alors on a

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) = \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) (m_0 - z_0) dxdt - \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0)$$

Où  $z_{\lambda}$  est la solution de (7.7), on multiplie (7.10) par  $z_{\lambda}$ , on obtient alors

$$\int_{\mathcal{Q}} \widehat{q}(h_0) \left\{ \lambda \widehat{\xi} \right\} dxdt = \lambda \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z_{\lambda}(x, t) dxdt$$

Et d'autre part on a

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) z_{\tau}(x, t) dxdt = 0$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} \widehat{q}(h_0) \left\{ \lambda \widehat{\xi} \right\} dxdt &= \mathcal{S}(\lambda, \tau) - \mathcal{S}(0, 0) - \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) \\ &= \int_{\mathcal{Q}} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + u \chi_{\omega}) (m_0 - z_0) dxdt \end{aligned}$$

D'où le résultat du théorème. ■

**Conclusion 7.4.1** *Dans ce travail que nous avons présenté une méthode efficace pour estimer les termes de pollution dans systèmes de Navier-Stokes à données manquantes sont dans les conditions initiales, et que la pollution apparaît au source. La théorie utilisée pour l'identification a besoin de la méthode de sentinelles par Lions (voir [29]).*

# Conclusion et Perspectives

Cette thèse est consacrée à des problèmes paraboliques dont les données sont manquantes (inconnues ou partiellement connues), où on a traité l'identification du terme de pollution qui soit indépendant des variations du terme manquant.

Dans la première partie, la méthode des sentinelles [29] est appliquée à l'identification d'une frontière d'un domaine dans lequel évolue une équation aux dérivées partielles parabolique. Il faut noter que la relation de causalité, entre la forme de la frontière et l'observation, n'est pas linéaire. Des simulations numériques sont présentées et montrent la viabilité des sentinelles dans un cas non-linéaire.

Dans la seconde partie, nous avons appliqué la méthode de sentinelle (exacte et faible) qui soit la stratégie la plus répondue consiste à obtenir des informations sur les termes manquants à partir d'une moyenne pondérée de l'observation. La recherche de ces informations nous conduit naturellement à un problème de type inverse. Nous avons réalisé une étude des systèmes paraboliques à données incomplètes sur le bord et dans la donnée initiale où nous sommes utilisés la méthode des sentinelles de J. L. Lions pour répondre à la question.

Celle-ci a montré qu'on peut estimer le terme de pollution indépendamment des autres données qu'on ne veut pas identifier. Cette méthode consiste à transposer un problème d'identification ou d'estimation d'une donnée incomplète en un problème de contrôlabilité exacte ou faible. Dans la résolution de ces problèmes, il est nécessaire de disposer des données mesurées de l'état, pour cela nous avons traité les cas d'observation, sans bruit.

Ces résultats ouvrent des perspectives numériques de cette méthode. Les outils de simulation numériques disponibles sont encore perfectibles pour répondre aux

nombreux problèmes environnementaux actuels. Aujourd'hui, nous ansons espérer que l'élaboration de nouvelles techniques permettra une meilleure estimation des paramètres inconnus dans des systèmes pollués.

Cependant, beaucoup reste à faire théoriquement, telles que la recherche d'un observatoire qui nous ramène à un contrôle optimal et donc à l'estimation du terme de pollution au lieu de le fix au début du travail, et le lien reste à faire avec d'autres approches: le contrôle sans regret et à moindre regret et surtout le contrôle robuste.

# Bibliographie

- [1] A. TRAORE, *Contribution à la résolution numérique de problèmes de détection de pollution en milieu fluide à structure géométrique complexe*, Thèse Doctorat, Université de Cheikh Anta Diop, Sénégal, 2008.
- [2] A. BENABDALLAH, *Une introduction à la théorie du contrôle*, Université de Provence. CMI-LATP, 2007.
- [3] A. TRAOR, B. MAMPASSI, B. SALEY, *A numerical approach of the sentinel method for distributed parameter systems*, C. Euro. J. Math, Vol 5, N 4, 751-763, 2007.
- [4] A. AYADI, M. DJEBARNI, *Sentinelle faible*, Sciences & Technologie A- N 24, pp. 7-10, 2006.
- [5] A. AYADI, M. DJEBARNI, *Pollution terms estimation in parabolic system with incomplete data ; far east Math. Sci. (FJMS)*, Pushpa Publishing House 2005.
- [6] A. BENABDALLAH, F. A. KHODJA, *Une introduction à la théorie du contrôle*, Université de Provence et Université de Franche-Comté, 2005.
- [7] ALI BOUTOULOUT, *Contrôlabilité régionale, Cible frontière et contrôlabilité du gradient dans les systèmes distribués*. Thèse de doctorat, L'université Moulay Ismail 2000.
- [8] A. EL JAI , A. J. PRITCHARD, *Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués*. Masson. R.M.A 3. Paris. 1986.

- [9] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equation. Applied Maths. Sciences 44, Springer-Verlag. New-York, 1983.*
- [10] BERHAIL AMEL, *Étude des systèmes hyperboliques à données manquantes, Thèse de doctorat, Université de mentouri, Constantine, 2013.*
- [11] B. E. AINSEBA, J. P. KERNEVEZ, R. LUCE, *Application des sentinelles à l'identification de pollution dans les rivières, RAIRO, vol. 28, N 3, pp. 297-312, 1994.*
- [12] B. E. AINSEBA, J. P. KERNEVEZ, R. LUCE, *Identification de paramètre dans les problèmes non linéaires à données incomplètes, RAIRO, vol. 28, N 3, pp. 313-328, 1994.*
- [13] B. E. AINSEBA, *Contrôlabilité exacte, identification, sentinelles, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1992.*
- [14] C. BENARD, B. GUERRIER, H.G. LIU, AND WANG. X, *Inverse 2d phase change problem. In proceedings of the 16th IFIP TC7 conference on system modelling and optimization, Compiègne (France), 1993.*
- [15] D. ACHELI, J. P. KERNEVEZ, F. OUKASI, *The sentinel method used in identification of the position and trajectory of a source of pollution, Applicable Analysis, vol. 70 (3-4), pp. 303-319, 1999.*
- [16] E. H. ZERRIK, *Analyse régionale des systèmes distribués. Thèse doctorat. Université. Mohammed V. Rabat, Maroc, 1993.*
- [17] E.H. ZERRIK, A. AFIFI, A. EL JAI, *Systèmes dynamiques, Analyse régionale des systèmes linéaires distribués. Tome 2, Presses Universitaires de Perpignan, 2008.*
- [18] G. MOPHOU, J.VELIN, *A null controllability problem with constraint on the control deriving from boundary discriminating sentinels, J. Nolinear Analysis, No 71, 910-924, 2009.*

- [19] G. MASSENGO, J. P. PUEL, *Boundary sentinels with given sensitivity. Rev. Mat. Complut. Vol 22, N 1, 165-185, 2009.*
- [20] G. MASSENGO, O. NAKOULIMA, *Sentinels with given sensitivity. Euro. Jnl of Appl.Math, Vol.19, 21-40, 2008.*
- [21] HAÏM BREZIS, *Analyse fonctionnelle : théorie et application. Masson. Paris, 1983.*
- [22] I. REZZOUG, A. AYADI, *Weakly sentinels for the distributed system with pollution terms in the boundary. FEJ of AM. V. 63, N1, P 25-37, 2012.*
- [23] I. REZZOUG, A. AYADI, *Weakly sentinels for the distributed system with missing terms and with pollution in the boundary conditions. IJ of MA. V. 6, N1, no 45, P 2245-2256, 2012.*
- [24] I. REZZOUG, A. AYADI, *Weakly Sentinel involving a Navier-Stokes problem and detecting pollution ; "has been accepted for publication in Pensee Journal (ISSN: 0031-4773) based upon the reports of the reviewers. Your article will be published in Vol. 75, Issue. 11".*
- [25] I. REZZOUG, A. AYADI, *Sentinels for the identification of pollution in domains with missing data, ADSA. ISSN 0973-5321, Volume 7, Number 2, pp. 439-449, 2013.*
- [26] I. EKLAND, AND R. TEMAM, *Convex analysis and variational problems. North-Holland, Amsterdam, 1976.*
- [27] J.VELIN, *Discriminating distributed sentinel involving a navier stokes problem and parameter identification, Esaim, Proseedings, 143-166, 2007.*
- [28] J. S. PAULIN, M. VANNINATHAN, *Sentinelles et pollutions frontières dans des domaines minces, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, 1299-1304, 1997.*
- [29] J. L. LIONS, *Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes. RMA21. Paris. 1992.*
- [30] J. SIMON, *Domain Variation for Drag in Stokes flow, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 1991.*

- [31] J. KLAMKA, *Controllability of dynamical systems*, Kluwer, Academic Publishers, 1990.
- [32] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogène et application. Vol. 1 et 2. Dunod. Paris, 1988.*
- [33] J. L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, stabilisations et perturbations des systèmes distribués. Masson. Vol. 1. 1988.*
- [34] J. L. LIONS, *Distributed systems with incomplete data and problems environment. Some remarks, College de France, pp. 58-101, 1988.*
- [35] J. S. SAUT, B. SCHEURER, *Unique continuation for some evolution equations, J. Deff. Equ., Vol 66, pp. 118-139, 1987.*
- [36] J. LIONS, E. MAGENES, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Massons, Paris 1983.*
- [37] J. C. SAUT ET B. SCHEURER, *Remarques sur un théorème de prolongement unique de MIZOHATA. C.R.A.S. Paris, p. 307-310, 1983.*
- [38] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogène et application. Vol. 1. Dunod. Paris, 1968.*
- [39] K. J. ENGEL, R. NAGEL, *Parameter Semigroups for linear Evolution Equation, Springer, Mathematics Subjec Calassificaion 1991.*
- [40] L. AFIFI, A. EL JAI, E. ZERRIK, *Systèmes Dynamiques. Université de Perpignan 2008.*
- [41] LUDOVIC DAN LEMILE, *Une étude Comparative Concernant les Semi-groupes de classe  $C_0$  et les semi-groupes intégrés, Université Blaise Pascal, Aubière, France, 2005.*
- [42] LUDOVIC DAN LEMILE, *La formule de Lie-Trotter pour les semi-groupes fortement continus. Université Claude Bernard Lyon, 2001.*

- [43] L. ROBBIANO, *Uniqueness theorem adapted to the control of solutions of hyperbolic problems, J. Equ. Dériv. Part, pp. 1-4, 1991.*
- [44] M. DALAH, *Étude des problèmes paraboliques à données manquantes, Thèse de doctorat, Université de mentouri, Constantine, 2008.*
- [45] M. CLERC, P. L. TALLEC, M. MALLET, *Contrôle optimale de Navier-Stokes Parabolisé, Rapport de recherche, N 2653, 1995.*
- [46] N. CINDEA, *Problèmes inverses et contrôlabilité avec applications en élasticité et IRM, Thèse d'octorat, Université de Nancy, 2010.*
- [47] O. NAKOULIMA, *A revision of J. L. Lions notion of sentinels, Portugal. Math. (N.S). Vol. 65, Fasc. 1, pp. 1-22, 2008.*
- [48] O. NAKOULIMA, *Optimal control for distributed systems subject to null-controllability. Application to discriminating sentinels, ESAIM, COCV, Vol. 13, N 4, pp. 623-638, 2007.*
- [49] OUSSEYNOU NAKOULIMA, *Contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle. Université Antilles-Guyane, DMI, Campus de Fouillole, 97159 Pointe à Pitre cedex, Guadeloupe, pp 405-410, 2004.*
- [50] O. BODART, PIERRE, DEMEETERE, *Sentinels for the identification of an unknown boundary. M3AS, 7(6), pp. 871-885. Université de Technologie de Compiègne (France), 1997.*
- [51] O. BODART, P. DEMESTERE, *Sentinels for the identification of unknown boundary, M3AS, pp. 871-885, 1997.*
- [52] O. BODART, P. DEMESTERE, *Contrôle frontière de l'explosion en temps fini de la solution d'une équation de combustion, C. R. Acad. Sci., t. 325, Série I, pp. 841-845, 1997.*
- [53] O. BODART, J. P. KERNEVEZ, T. MANNIKKO, *Numerical method to compute sentinels for distributed system. In Proceedings of the 16th IFIP, TC7 conference in system modelling and optimization, Springer Verlag, Paris, 1994.*

- [54] O. BODART, *Applications de la méthode des sentinelles à l'identification des sources de pollution dans un système distribué. Contrôles insensibilisant*, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1993.
- [55] P. DEMEESTERE, *Méthode des sentinelles: Etude comparative et application à l'identification d'une frontière; contrôle du temps d'explosion d'une équation de combustion*. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1997.
- [56] S. MIZOHATA, *Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques*, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Série A, Vol 31, pp 219-239, 1958.
- [57] T. CHAHNAZ ZAKIA, *Détection de la pollution et identification des défauts en élasticité linéaire*, Thèse de doctorat, Université d'Oran, 2013.
- [58] Y. MILOUDI, O. NAKOULIMA, A. OMRANE, *A method for detecting pollution in dissipative systems with incomplete data*, ESAIM, Proceeding, Vol. 17, pp. 67-79, 2007.